ពីជគណិតទូទៅ១

គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

"មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍"

២០២២

គណៈកម្មការនិពន្ធ៖ លោក ហៃ ប៉ាហ៊ិន លោក ឈាន ហាង

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១.លោក ឯក លីម

២.លោក ជា សុទ្ធ

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឫសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ ៥៣%នៅឆ្នាំ ២០០៤មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្របដណ្ដប់ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្ដល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្ដាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍដោយមានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពីភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពង់បន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពមនុស្ស។ផ្ទុយទៅវិញប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាព្រិកកំពង់ស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវ ជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូវនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពីភពលោកក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំងពីរនេះមានមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន

ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃវិនិយោគទុនសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្ដុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទា ក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជា មូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ជាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយ ពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង

និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍ នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។ វិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍ អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើ

មធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យាអានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិបទនៃការរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេ អេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យនិងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះនិងការចុះទៅជួបសិស្សជាបណ្តុំតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន

4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណាន កាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ
6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈកាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈសិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគមួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា«មូលនិធិ សគ.ន.»និងជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា "RCI Fund"។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ ស គ.ន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ. ជាអាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិធំចំនួន៣ រួមមានឌីជីថលយនកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម ៤.០(Digitalization for IR.4.0)ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research)និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)។

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពវូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា)Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែល

កំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា មានគោលដៅដូចខាងក្រោម ៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់
- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់ឋានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួម ដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់

នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

Table of Contents

បុព្វកថា i

សេចក្ដីបញ្ជាក់ vii

អារម្ភកថា xi

សេចក្ដីថ្លែងអំណរគុណ xii

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា xiv

មូលន័យសង្ខេប xv

មេរៀនទី១ ៖ តក្កវិទ្យា និងសម្រាយបញ្ជាក់ 1

១.១.សំណើ 1

១.២.ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា 2

១.២.១.ឈ្នាប់មិន 2

១.២.២.ឈ្នាប់ឬ (∨) 3

១.២.៣.ឈ្នាប់ និង (∧) 4

១.២.៤.ឈ្នាប់នាំឱ្យ (Þ) 5

១.២.៥.ឈ្នាប់សមមូល (Û) 6

១.៣.TAUTOLOGIES និងCONTRADICTIONS 8

១.៤.សមមូលតក្កវិទ្យា(≡) 9

១.៥.បរិមាណករ 15

១.៦.សម្រាយបំភ្លឺសំខាន់ៗនៅក្នុងគណិតវិទ្យា 17

មេរៀនទី២ ៖ សំណុំ 39

២.១.សំណុំ និងធាតុ (Sets and Elements) 39

២.២.ប្រភេទនៃសំណុំ 41

មេរៀនទី៣ ៖ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ 64

៣.១.ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំមួយទៅសំណុំមួយ 64

៣.១.១.និយមន័យ 64

៣.១.២.ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាព(Domain and Range) 64

៣.២.ទំនាក់ទំនងច្រាស (Inverse Relations) 68

៣.៣.ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ និងទំនាក់ទំនង n ធាតុ(Ternary and n-ary relations) 74

៣.៤.ទំនាក់ទំនងសមមូល និងបំណែក (Equivalence relation and partitions)......... 77

៣.៥.សំណុំផលចែក (Quotient sets) 80

៣.៦.ទំនាក់ទំនងលំដាប់ (Ordering Relations) 81

៣.៧.ទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់ និងលំដាប់ដោយផ្នែក... 83

មេរៀនទី៤៖ អនុគមន៍ និងអនុវត្តន៍...91

ឯកសារយោង 140

អារម្ភកថា

បច្ចុប្បន្នភាពនៃការបណ្តុះបណ្តាលគរុកោសល្យជូនដល់គរុសិស្សមធ្យមសិក្សាបឋមភូមិ និងបឋមសិក្សា បានបង្កើនពី 12+2 ទៅជា 12+4 ដែលស្មើទៅនឹងការបណ្តុះបណ្តាលបរិញ្ញាបត្រ ។ ដោយការបណ្តុះបណ្តាលបង្កើន ២ ឆ្នាំដូច្នេះ កម្មវិធីសិក្សាក៏ត្រូវបញ្ចូលបន្ថែមមួយចំនួនដើម្បីឱ្យសមទៅនឹងសញ្ញាបត្រដែលទទួលបាន ។

ឯកសារសម្រាប់បម្រើឱ្យការបណ្តុះបណ្តាលនេះក៏សំខាន់ណាស់ដែរ ។ ដូច្នេះបានជាសៀវភៅពីជគណិតទូទៅ១ នេះត្រូវបានផលិតឡើងព្រមគ្នាជាមួយសៀវភៅផ្សេងៗជាច្រើនទៀត ។

សៀវភៅមួយក្បាលនេះពឹងផ្អែកទៅលើបទពិសោធន៍បង្រៀន និងយោងតាមឯកសារជាខេមរៈភាសា និងឯកសារបរទេសមួយចំនួន។ វាមិនមែនជាសៀវភៅល្អឥតខ្ចោះនោះទេ គឺគ្រាន់តែជាឯកសារគោលមួយប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះយើងខ្ញុំសូមអភ័យទោសជាមុនចំពោះកង្វះខាតដែលមានក្នុងសៀវភៅនេះ ។

យើងខ្ញុំសូមទទួលនូវការរិះគន់ ស្ថាបនាពីគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ។

ធ្វើនៅថ្ងៃ ព្រហស្បតិ៍ ២ កើត ខែ ចេត្រ ឆ្នាំ ខាល ចត្វាស័ក ព.ស. ២៥៦៦

រាជធានីភ្នំពេញ ថ្ងៃទី ២៣ ខែ មីនា គ.ស. ២០២៣

អ្នករៀបរៀង

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ «គណិតអប់រំ១» ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន។

យើងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា «មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និង កែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត/ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ ដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រមព្រៀង

និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវស្នាដៃ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និងប្រគល់សិទ្ធិ ស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្តីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិត នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ ដែលបានផ្តល់មតិកែលម្អលើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

យើងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

មុខវិជ្ជាពីជគណិតទូទៅ១ គឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃគណិតវិទ្យា ។ មុខវិជ្ជានេះសម្រាប់ឆ្នាំទី១ នៅឧត្តមសិក្សា ។ គេប្រើប្រាស់វាដើម្បីសិក្សាបន្តទៅពីជគណិតទូទៅ ២ ឬ ៣ ក្នុងពីជគណិតលីនេអ៊ែរ តូប៉ូវិទ្យា ... ផងដែរ ។ ក្នុងនោះទៀតផ្នែកសម្រាយបញ្ជាក់ក៏មានសារៈសំខាន់ប្រើប្រាស់ក្នុងគណិតវិទ្យាវិភាគ ធរណីមាត្រវិភាគក្នុងប្លង់ ក្នុងលំហ ធរណីមាត្រឌីផេរ៉ង់ស្យែល ... ផងដែរ ។

មូលន័យសង្ខេប

ពីជគណិតទូទៅ១ ចែកចេញជា ៤ មេរៀនរួមមានៈ

- មេរៀនទី១ តក្កវិទ្យា និងសម្រាយបញ្ជាក់មេរៀននេះនឹងនាំឱ្យអ្នកសិក្សាស្គាល់ពីសំណើ តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ ឈ្នាប់តក្កវិទ្យាមួយចំនួន បរិមាណករ វិធីសាស្ត្រស្រាយបញ្ជាក់មួយចំនួន ... ។
- មេរៀនទី២ សំណុំមេរៀននេះនឹងនាំឱ្យអ្នកសិក្សាស្គាល់ពីសំណុំ ការកំណត់សំណុំ ប្រមាណវិធីសំណុំ ចំនួនធាតុនៃសំណុំសំណុំរង ផលគុណដេកាតនៃសំណុំ បំណែក និងគម្រូបនៃសំណុំជាដើម ។

- មេរៀនទី៣ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុមេរៀននេះនឹងនាំឱ្យអ្នកសិក្សាស្គាល់ពីទំនាក់ទំនងរវាងធាតុនៃសំណុំមួយ(សំណុំដើម) ទៅធាតុនៃសំណុំមួយទៀត(សំណុំចុង)របៀបតាងទំនាក់ទំនងលក្ខណៈនៃទំនាក់ទំនង បណ្តាក់នៃទំនាក់ទំនងទំនាក់ទំនងសមមូល ថ្នាក់សមមូល ទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់ និងទំនាក់ទំនងលំដាប់ដោយផ្នែកជាដើម ។

- មេរៀនទី៤ អនុគមន៍ និងអនុវត្តន៍មេរៀននេះនឹងនាំឱ្យអ្នកសិក្សាស្គាល់ពីនិយមន័យនៃអនុគមន៍ អនុវត្តន៍ លក្ខណៈអនុគមន៍ អនុវត្ត ដែនកំណត់ សំណុំរូបភាព ក្រាប រូបភាពច្រាស អនុវត្តន៍ច្រាស អនុវត្តន៍ប្រកាន់ អនុវត្តន៍ពេញ អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍ ... ។

មេរៀនទី១៖ តក្កវិទ្យា និងសម្រាយបញ្ជាក់

១.១.សំណើ

និយមន័យ

សំណើ គឺជាប្រយោគ ឬការសម្តែងយោបល់មួយដែលអាចមានសម្រេចបានថា ពិត ឬ មិនពិត។

ឧទាហរណ៍៖

a.ដប់តិចជាងប្រាំបួន

b. ភ្នំពេញគឺជារាជធានីនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជា

c. ក្មេង គឺ តូច

d. ចំនួនទី 2023 ក្រោយក្បៀសនៃ $\frac{4}{37}$ គឺ 8

e. សុខ មិនខ្ពស់ជា សៅ ។

ប្រយោគ a. គឺជាសំណើ ព្រោះយើងដឹងថាវាមិនពិត ។ ប្រយោគ b. គឺជាសំណើ ព្រោះយើងដឹងថាវាពិត ។ ប្រយោគ c. មិនមែនជាសំណើ ព្រោះយើងមិនដឹងថាប៉ុណ្ណាទៅទើបហៅថាតូច ។ ប្រយោគ d. គឺជាសំណើ ព្រោះយើងអាចដឹងថាវាពិត ឬមិនពិតបាន ដោយប្រើចំណេះដឹងគណិតវិទ្យាធ្វើការដោះស្រាយបាន ។ ប្រយោគ e. គឺជាសំណើ ព្រោះយើងអាចដឹងថាវាពិត ឬមិនពិតបាន។

១.១.២.តម្លៃភាពពិត

ជាទូទៅគេតាងឈ្មោះនៃសំណើដោយអក្សរ $p\,;q\,;r\,;\ldots$ ។

- បើសំណើ p ជាសំណើពិត នោះគេតាងតម្លៃភាពពិតវាដោយ ត.$(p) = 1$ ឬ T ។

- បើសំណើ p ជាសំណើមិនពិត នោះគេតាងតម្លៃភាពពិតវាដោយ ត.$(p) = 0$ ឬ F ។

ឧទាហរណ៍៖ $p:$ 2 ជាចំនួនបឋម ។

$q:$ បាឡែន គឺជាត្រីទឹកសាប ។

$r:$ ក្រពើជាសត្វចតុបាទ ហើយស៊ីស្មៅជាអាហារ ។

យើងបាន ត.$(p) = 1$, ត.$(q) = 0$ និង ត.$(r) = 0$ ។

១.២.ឈ្នាប់តក្កវិទ្យា

កាលណាគេមានសំណើច្រើន នោះគេភ្ជាប់សំណើទាំងនោះដោយប្រើឈ្នាប់ ។ ឈ្នាប់តក្កវិទ្យាមានដូចជា៖ ឈ្នាប់ឬ($\vee$) , ឈ្នាប់និង ($\wedge$) , ឈ្នាប់នាំឱ្យ ($\Rightarrow$) , ឈ្នាប់សមមូល ($\Leftrightarrow$) , ... ។

ចំណាំ៖ ឈ្នាប់មិន ក៏ជាឈ្នាប់តក្កវិទ្យាដែរ តែប្រើដើម្បីបដិសេធសំណើតែប៉ុណ្ណោះ ។ និមិត្តសញ្ញាសម្រាប់ឈ្នាប់មិន គេប្រើខុសៗគ្នាតាមការនិយម មានដូចជា $\bar{\ }$, : , Ø ។

១.២.១.ឈ្នាប់មិន

សំណើមិន នៃ p មួយត្រូវបានគេតាងដោយ $\bar{p}$ ឬ $\sim p$ ឬ $\neg p$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $p:$ 2 ជាចំនួនបឋម គឺ $\bar{p}:$2 មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ឧទាហរណ៍២៖ ឈ្នាប់មិននៃសំណើ $q:$ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន គឺ $\bar{q}:$3 ជាចំនួនមិនអវិជ្ជមាន ។

យើងឃើញថា សំណើ p និងសំណើ $\bar{p}$ មានតម្លៃភាពពិតផ្ទុយគ្នា ។

គេបានតារាងភាពពិតទូទៅនៃសំណើ p និង $\bar{p}$

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

១.២.២.ឈ្នាប់ឬ (∨)

គេអាចភ្ជាប់សំណើពីរ ដោយប្រើពាក្យ "ឬ" ដើម្បីភ្ជាប់សំណើទាំងពីរនោះ ដែលគេហៅវាថាឈ្នាប់ឬ ។

ដើម្បីប្រើឈ្នាប់ឬ (∨) នៃសំណើ p និង q គេសរសេរជានិមិត្តសញ្ញា $p \vee q$ ។

តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p \vee q$ ត្រូវបានកំណត់ដូចតារាង 2 ខាងក្រោម៖

p	q	p Úq
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

តារាង 1

p	q	p Ùq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

តារាង 2

សំណើ $p \vee q$ មិនពិតតែក្នុងករណី p និង q មិនពិតព្រមគ្នាប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណើ $p:$ 2 ជាចំនួនបឋម ; $q:$ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន p Ú$q:$ 2 ជាចំនួនបឋម ឬ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដោយ ត.$(p) = 1$ និង ត.$(q) = 0$ នោះគេបាន ត.$(p \vee q) = 1$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានសំណើ r : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ; s : ឆ្មាជាសត្វចតុបាត ។

គេបាន r Ús : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ឬ វាជាសត្វចតុបាត ។

ដោយ ត.$(r) = 1$ និង ត.$(s) = 1$ នោះគេបាន ត.$(r \vee s) = 1$ ។

១.២.៣.ឈ្នាប់ និង $(\wedge)$

គេអាចភ្ជាប់សំណើពីរ ដោយប្រើពាក្យ "និង" ឬ "ហើយ" ឬ "ប៉ុន្តែ" ដើម្បីភ្ជាប់សំណើទាំងពីរនោះ ដែលគេហៅវាថាឈ្នាប់និង ។

ដើម្បីប្រើឈ្នាប់និង $(\wedge)$ នៃសំណើ p និង q គេសរសេរជានិមិត្តសញ្ញា $p \wedge q$ ។

តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p \wedge q$ ត្រូវបានកំណត់ដូចតារាង 3 ខាងលើ៖

សំណើ $p \wedge q$ ពិតតែក្នុងករណី p និង q ពិតព្រមគ្នាប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណើ $p:$ 2 ជាចំនួនបឋម ; $q:$ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន p Ù$q:$ 2 ជាចំនួនបឋម និង 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដោយ ត.$(p) = 1$ និង ត.$(q) = 0$ នោះគេបាន ត.$(p \wedge q) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានសំណើ r : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ; s : ឆ្មាជាសត្វចតុបាត ។

គេបាន r Ùs : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ហើយ វាជាសត្វចតុបាត ។

ដោយ ត.$(r) = 1$ និង ត.$(s) = 1$ នោះគេបាន ត.$(r \wedge s) = 1$ ។

១.២.៤.ឈ្នាប់នាំឱ្យ (Þ)

គេអាចភ្ជាប់សំណើពីរ ដោយប្រើពាក្យ "បើ .... នោះ ...." ដើម្បីភ្ជាប់សំណើទាំងពីរនោះ ដែលគេហៅវាថាឈ្នាប់នាំឱ្យដើម្បីប្រើឈ្នាប់នាំឱ្យ ($\Rightarrow$) នៃសំណើ p និង q គេសរសេរជានិមិត្តសញ្ញា $p \Rightarrow q$ ។

តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p \Rightarrow q$ ត្រូវបានកំណត់ដូចតារាងតម្លៃភាពពិតខាងក្រោម៖

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

តារាង 3

សំណើ $p \Rightarrow q$ មិនពិតតែក្នុងករណី p ពិត រីឯ q មិនពិត ប៉ុណ្ណោះ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណើ $p:$ 2 ជាចំនួនបឋម ; $q:$ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

គេបាន p Þ $q:$ បើ 2 ជាចំនួនបឋម នោះ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដោយ ត.$(p) = 1$ និង ត.$(q) = 0$ នោះគេបាន ត.$(p \Rightarrow q) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានសំណើ r : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ; s : ឆ្មាជាសត្វចតុបាត ។

គេបាន r Ús : បើ ឆ្មាជាថនិកសត្វ នោះ វាជាសត្វចតុបាត ។

ដោយ ត.$(r) = 1$ និង ត.$(s) = 1$ នោះគេបាន ត.$(r \Rightarrow s) = 1$ ។

១.២.៥.ឈ្នាប់សមមូល (Û)

គេអាចភ្ជាប់សំណើពីរ ដោយប្រើពាក្យ "លុះត្រាតែ" ដើម្បីភ្ជាប់សំណើទាំងពីរនោះ ដែលគេហៅវាថាឈ្នាប់សមមូល ។

ដើម្បីប្រើឈ្នាប់សមមូល (Û) នៃសំណើ p និង q គេសរសេរជានិមិត្តសញ្ញា p Û q ។

តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ p Û q ត្រូវបានកំណត់ដូចតារាងតម្លៃភាពពិតខាងក្រោម៖

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

តារាង 4

សំណើ $p \Leftrightarrow q$ មិនពិតតែក្នុងករណី p និង q មានតម្លៃភាពពិតមិនដូចគ្នាប៉ុណ្ណោះ ។

ចំណាំ៖ សំណើ $p \Leftrightarrow q$ ដូចគ្នាទៅនឹងសំណើ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណើ p : 2 ជាចំនួនបឋម ; q : 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។ គេបាន p Ù q : 2 ជាចំនួនបឋម លុះត្រាតែ 3 ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

ដោយ ត.$(p) = 1$ និង ត.$(q) = 0$ នោះគេបាន ត.$(p \Rightarrow q) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានសំណើ r : ឆ្មាជាថនិកសត្វ ; s : ឆ្មាជាសត្វចតុបាត ។

គេបាន r Ù s : ឆ្មាជាថនិកសត្វ លុះត្រាតែ វាជាសត្វចតុបាត ។

ដោយ ត.$(r) = 1$ និង ត.$(s) = 1$ នោះគេបាន ត.$(r \Leftrightarrow s) = 1$ ។

សំណើសមាស និងតារាងភាពពិតដោយប្រើឈ្នាប់ Ù ; Ú ; ¯ ; Þ ; Û និងសំណើ p ; q ; r ; L គេអាចបង្កើតបានសំណើសមាស តាងដោយ $P(p,q,r,$K$)$ ដែលសំណើ p ; q ; r ; L ហៅថាអថេរ។

គេអាចបញ្ជាក់តម្លៃភាពពិតនៃ $P(p,q,r,$K$)$ ដោយតារាងភាពពិត ។

ឧទាហរណ៍៖ សង់តារាងភាពពិតនៃសំណើសមាស $\overline{(p \text{ Ù } \bar{q})}$ ។

របៀបទី១

p	q	$\bar{q}$	p Ù$\bar{q}$	$\overline{(p \wedge \bar{q})}$

1 1 0 0	1 0 1 0	0 1 0 1	0 1 0 0	1 0 1 1

តារាង 5

របៀបទី២ គេអាចសរសេរ $\overline{(p \wedge \bar{q})}$ ទៅជា $\neg(p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
1 1 0 0	1 0 1 0	1 0 1 1	1 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 1	1 0 1 0
ជំហានទី		៥	១	៤	៣	២

តារាង 6

១.៣.TAUTOLOGIES និងCONTRADICTIONS

និយមន័យ៖

- សំណើសមាស $P(p,q,r,\ldots)$ ហៅថា Tautologies កាលណា $P(p,q,r,\ldots)$ ពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃភាពពិតនៃអថេរ $p\ ;q\ ;r\ ;L$ ។

- សំណើសមាស $P(p,q,r,\ldots)$ ហៅថា Contradiction កាលណា $P(p,q,r,\ldots)$ មិនពិតចំពោះគ្រប់តម្លៃភាពពិតនៃអថេរ $p\ ;q\ ;r\ ;$L ។

ឧទាហរណ៍១៖ សំណើសមាស p Ù $\bar{p}$ ជា Contradiction ហើយ p Ú $\bar{p}$ ជា Tautologies

p	$\bar{p}$	p Ù $\bar{p}$	p Ú $\bar{p}$
1 0	0 1	0 0	1 1

តារាង 7

ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ $P(p,q,r,$K$)$ ជា Tautologies នោះគេបាន $\bar{P}(p,q,r,$K$)$ ជា Contradiction និងផ្ទុយមកវិញ ។

១.៤.សមមូលតក្កវិទ្យា($\equiv$)

និយមន័យ៖ គេថាពីរសំណើសមាស $P(p,q,r,\ldots)$ និង $Q(p,q,r,\ldots)$ សមមូលគ្នា ដែលកំណត់សរសេរដោយ $P(p,q,r,\ldots) \equiv Q(p,q,r,\ldots)$ កាលណាសំណើសមាសទាំងពីរមានតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។

ឧទាហរណ៍៖ តាមតារាងភាពពិតនៃសំណើសមាស $\bar{p} \wedge \bar{q}$ និង $\overline{p \vee q}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$

1 1 0 0	1 0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1	0 0 0 1	1 1 1 0	0 0 0 1

តារាង 8

យើងឃើញថាក្នុងតារាង 9 ជួរឈរ $\bar{p} \wedge \bar{q}$ និង $\overline{p \vee q}$ មានបញ្ជីតម្លៃភាពពិតដូចគ្នា ។ ដូចនេះ សំណើសមាស $\bar{p} \wedge \bar{q}$ និង $\overline{p \vee q}$ ជាសំណើសមមូលគ្នា គេសរសេរ $\bar{p} \wedge \bar{q} \equiv \overline{p \vee q}$។

សមមូលតក្កវិទ្យាខ្លះៗ

1a. $p \vee q \equiv q \vee p$

1b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (លក្ខណៈត្រឡប់)

2a. $(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$

2b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$ (លក្ខណៈផ្តុំ)

3a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

3b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (លក្ខណៈបំបែក)

4a. $p \vee 0 \equiv p$

4b. $p \wedge 1 \equiv p$ (លក្ខណៈណឺត)

5a. $p \vee \bar{p} \equiv 1$

5b. $p \wedge \bar{p} \equiv 0$ (លក្ខណៈបំពេញ)

6a. $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$

6b. $\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$ (De Morgan)

ចំណាំ៖ 0 ក្នុង 4a និង 5b តាងឱ្យសំណើ contradiction

1 ក្នុង 4b និង 5a តាងឱ្យសំណើ tautology

ចំពោះ 2a និង 2b យើងអាចសរសេរដោយមិនប្រើវង់ក្រចកគឺ $p \vee q \vee r$ និង$p \wedge q \wedge r$ ។

វិចារ

វិចារគឺជាអំណះអំណាងដែលពីសំណុំនៃសំណើសមាស $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ហៅថាសម្មតិកម្ម ទាញបានសំណើសមាស Q មួយទៀត ហៅថាសេចក្តីសន្និដ្ឋាន ។

គេកំណត់សរសេរដោយ $P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow Q$ ។

- ប្រសិនបើសេចក្តីសន្និដ្ឋាន Q ពិត ចំពោះគ្រប់សម្មតិកម្ម $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ពិតព្រមគ្នា នោះវិចារ $P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow Q$ ត្រឹមត្រូវ (ឬមានសុពលភាព) ។ បើមិនដូច្នេះទេ នោះគេថាវិចារនេះមិនត្រឹមត្រូវ (ឬគ្មានសុពលភាព) ។

ម្យ៉ាងទៀត ដោយ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ពិតព្រមគ្នាលុះត្រាតែសំណើសមាស $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ ពិត នោះ $P_1, P_2, \ldots, P_n \rightarrow Q$ មានសុពលភាព លុះត្រាតែ $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ ពិត គេបាន Q ពិត

ឬ $P_1, P_2, \dots, P_n \to Q$ មានសុពលភាព លុះត្រាតែ$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ ជា Tautology ។
ឧទាហរណ៍១៖ តើវិចារ $p, p \Rightarrow q \to q$ មានសុពលភាព ឬទេ ?

ពិនិត្យតារាងភាពពិត

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

តារាង 9

ដោយ $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ ជា Tautology នោះវិចារ $p, p \Rightarrow q \to q$ មានសុពលភាព ។

ឧទាហរណ៍២៖ តើវិចារ $p \Rightarrow q, q \to p$ មានសុពលភាព ឬទេ ?

ពិនិត្យតារាងតាពពិត

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	1

តារាង 10

ដោយ$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ មិនមែនជា Tautology នោះវិចារ $p \Rightarrow q, q \to p$ គ្មានសុពលភាព។
ឧទាហរណ៍៣៖ ពិនិត្យវិចារខាងក្រោម៖

S_1 : បើ $ABCD$ ជាការេ នោះ $ABCD$ ជាចតុកោណកែង
S_2 : បើ $ABCD$ ជាចតុកោណកែង នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

S : បើ $ABCD$ ជាការេ នោះ $ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម

ក្នុងសំណើ S នៅខាងក្រោមបន្ទាត់តាងឱ្យការសន្និដ្ឋាននៃវិចារហើយ S_1 ; S_2 នៅខាងលើបន្ទាត់តាងឱ្យសម្មតិកម្មនៃវិចារ ។

តាងសំណើ p : "$ABCD$ ជាការេ" ; q : "$ABCD$ ជាចតុកោណកែង" ; r : "$ABCD$ ជាប្រលេឡូក្រាម" ។ នោះគេបានវិចារ $S_1, S_2 \to S$ មានទម្រង់ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \to p \Rightarrow r$ ។

ពិនិត្យតារាងភាពពិតនៃសំណើ $[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

A គឺ p Þ q ; B គឺ q Þ r ; C គឺ p Þ r ; D គឺ $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)$

និង E គឺ $[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ។

p	q	r	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

តារាង 11

តាមតារាង 12 គេបាន $[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ជា tautology ដូច្នេះវិចារ $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \to p \Rightarrow r$ មានសុពលភាព ។ មានន័យថា វិចារ $S_1, S_2 \to S$ មានសុពលភាព។

១.៥.បរិមាណករ

ក.បរិមាណករគ្រប់ (∀)

សញ្ញា " មើលថា គ្រប់ តាងឱ្យបរិមាណគរគ្រប់ គេប្រើបរិមាណករ " ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍សំណើមួយទៅនឹងសកលមួយដែលត្រូវកំណត់ ក្នុងគោលគំនិតបំលែងអនុគមន៍សំណើមួយអថេរទៅជាសំណើពីអនុគមន៍សំណើពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ , ទៅជាសំណើ និងបន្តបន្ទាប់ ... ។

ឧទាហរណ៍១៖ $x^2 + 1 = 4$ ជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ

គេបាន "x Î ¡ : $x^2 + 1 = 4$ ជាសំណើមិនពិត ។

ឧទាហរណ៍២៖ $x^2 + y \geq 0$ ជាអនុគមន៍សំណើពីរអថេរ

គេបាន "x Î ¡ : $x^2 + y$ ³ 0 ជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ ។

និង "x Î ¡ ,"y Î ¥ : $x^2 + y$ ³ 0 ជាសំណើពិត ។

ខ.បរិមាណករមាន ($)

សញ្ញា $ មើលថា មាន តាងឱ្យបរិមាណគរមាន បានន័យថាមានយ៉ាងតិចមួយ ។

គេប្រើបរិមាណករ $ ដើម្បីភ្ជាប់អថេរនៃអនុគមន៍សំណើមួយ ទៅនឹងសកលមួយដែលត្រូវបានកំណត់ក្នុងគោលគំនិតបំលែង អនុគមន៍សំណើមួយអថេរ ទៅជាសំណើ ពីអនុគមន៍សំណើពីរអថេរទៅជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ , ទៅជាសំណើ និងបន្តបន្ទាប់ ... ។

ឧទាហរណ៍១៖ $x^2 + 1 = 4$ ជាអនុគមន៍សំណើមួយអថេរ

គេបាន $$x$ Î ¡ : $x^2 + 1 = 4$ ជាសំណើពិត ។

ឧទាហរណ៍២៖ $x^2 + y \geq 0$ ជាអនុគមន៍សំណើពីរអថេរ

គេបាន $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x^2 + y \geq 0$ ជាសំណើពិត ។

គ.ច្បាប់មិនលើបរិមាណករ

a. $\neg[\exists x : F(x)] \equiv \forall x : \neg F(x)$

b. $\neg[\forall x : F(x)] \equiv \exists x : \neg F(x)$

c. $\neg[\forall x, \exists y : F(x,y)] \equiv \exists x, \forall y : \neg F(x,y)$

d. $\neg[\exists x, \forall y : F(x,y)] \equiv \forall x, \exists y : \neg F(x,y)$ ។

ឃ. វិធីប្រើបរិមាណករ

a. $\forall x : [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow [\forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x)]$

b. $\exists x : [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x)]$

c. $\exists x : [P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [\exists x : P(x) \vee \exists x : Q(x)]$

d. $\forall x, \forall y : P(x,y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x : P(x,y)$

e. $\exists x, \exists y : P(x,y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x : P(x,y)$ ។

សម្គាល់៖ i. $[\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x)] \not\Rightarrow \exists x : [P(x) \wedge Q(x)]$

ឧទាហរណ៍៖ $(\exists x \in \mathbb{N} : x \mid 9) \wedge (\exists x \in \mathbb{N} : x > 15) \not\Rightarrow \exists x \in \mathbb{N} : (x \mid 9 \wedge x > 15)$

ii. កាលណាគេប្រើបរិមាណករពីរតគ្នាគេត្រូវគិតលំដាប់របស់វា ។

ឧទាហរណ៍៖ "x Î ¡ ,$y Î ¡ :y > x ជាសំណើពិត

ប៉ុន្តែ $y Î ¡ ,"x Î ¡ :y > x ជាសំណើមិនពិត ។

១.៦.សម្រាយបំភ្លឺសំខាន់ៗនៅក្នុងគណិតវិទ្យា

សម្រាយបញ្ជាក់គឺជាប្រមាណវិធីតក្កវិទ្យា ។ មានវិធីសម្រាយបញ្ជាក់ច្រើន ដើម្បីសម្របទៅតាមប្រភេទនៃចំណោទ ។

ក. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់

ប្រភេទនៃសម្រាយបញ្ជាក់នេះគឺជាការស្រាយបញ្ជាក់ដោយត្រង់ៗទៅតាមអ្វីដែលគេចង់បាន ។

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ n^2 ជាចំនួនគត់គូ ។

បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ $n = 2k$ ដែល $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ជាចំនួនគត់គូ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍១ ប្រសិនបើយើងប្តូរទៅជាឱ្យបង្ហាញថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់មិនអាចជួយបានទេនៅពេលនេះ ។ គេនឹងប្រើវិធីផ្សេងដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វា ដែលយើងនឹងឃើញនៅពេលក្រោយ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា បើ $|x| \geq |y|$ នោះ $x^2 \geq y^2$ ។

យើងមាន $|x| \geq |y|$ នោះ $\begin{cases} |x| - |y| \geq 0 \\ |x| + |y| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) \geq 0 \Rightarrow |x|^2 - |y|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |x|^2 \geq |y|^2$ យើងដឹងថា $|x|^2 = x^2$ និង $|y|^2 = y^2$ (មើលសម្រាយនៅខាងក្រោយ) ។

ដូច្នេះ បើ $|x| \geq |y|$ នោះ $x^2 \geq y^2$ ។

ខ. សម្រាយបញ្ជាក់ដោយបែងចែកជាករណី

ចំណោទមួយចំនួនត្រូវបែងចែកជាករណីដើម្បីស្រាយថាវាពិតម្ដងមួយករណីៗ រហូតគ្រប់ករណីទាំងអស់ ដែលករណីនីមួយៗដាច់ៗពីគ្នា ។

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា $|x|^2 = x^2$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ យើងអាចចែកជាពីរករណីគឺ $x \geq 0$ និង $x < 0$ ។

- ករណី $x \geq 0$ នោះ $|x| = x \Rightarrow |x|^2 = x^2$ ពិត

- ករណី $x < 0$ នោះ $|x| = -x \Rightarrow |x|^2 = (-x)^2 = x^2$ ពិត

ដូចនេះ $|x|^2 = x^2$ គ្រប់ $x \in \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{Z}$ ។

ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n គេអាចចែកវាជាបីករណីគឺ $n = 3k$; $n = 3k + 1$ និង $n = 3k + 2$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

- ករណី $n = 3k$ នោះ $n^3 - n = (3k)^3 - (3k) = 3(9k^2 - k)$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

- ករណី $n = 3k + 1$ នោះ $n^3 - n = (3k+1)^3 - (3k+1) = 3(3k+1)(3k^2 + 2k)$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

- ករណី $n = 3k + 2$ នោះ $n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = 3(3k+2)(3k^2 + 4k + 1)$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត ដូចនេះ $n^3 - n$ ចែកដាច់នឹង 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{Z}$ ។

គ. សម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម

នៅក្នុងចំណុចសមមូលតក្កវិទ្យា យើងបានដឹងរួចហើយថា $(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ ។

ដូច្នេះ បើយើងស្រាយបានថា $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ ពិត នោះយើងសន្និដ្ឋានបានថា $p \Rightarrow q$ ពិត ។

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។ បើយើងប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ដោយផ្ទាល់ ឬដោយបែងចែកជាករណី គឺមិនអាចទៅរួចទេសម្រាប់បញ្ហាមួយនេះ ។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់វា យើងប្រើវិធីសាស្ត្រសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម ដោយត្រូវស្រាយថា បើ n មិនមែនជាចំនួនគត់គូ នោះ n^2 មិនមែនជាចំនួនគត់គូ ។ តែចំនួនគត់មានតែគូ និងសេសប៉ុណ្ណោះ ដូច្នេះ យើងត្រូវស្រាយថា បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះ n^2 ជាចំនួនគត់សេស ។

បើ n ជាចំនួនគត់សេស $\Rightarrow n = 2k + 1$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ នោះ $n^2 = (2k + 1)^2$ $\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ បើ n^2 ជាចំនួនគត់គូ នោះ n ជាចំនួនគត់គូ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា បើ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ m ឬ n ជាចំនួនគត់គូ ។

ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម យើងត្រូវស្រាយថា បើ m និង n ជាចំនួនគត់សេស នោះ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់សេស ។

បើ m និង n ជាចំនួនគត់សេស $\Rightarrow \begin{cases} m = 2k + 1 \\ n = 2\ell + 1 \end{cases}$ ដែល $k, \ell \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow m \cdot n = (2k + 1) \cdot (2\ell + 1) = 4k \cdot \ell + 2k + 2\ell + 1 = 2(2k\ell + k + \ell) + 1$ ជាចំនួនគត់សេស ។

ដូចនេះ បើ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់គូ នោះ m ឬ n ជាចំនួនគត់គូ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថា បើ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ m និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

ដោយប្រើសម្រាយបញ្ជាក់ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម យើងត្រូវស្រាយថា បើ m ឬ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់គូ ។

បើ m ឬ n ជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2k \\ n = 2\ell \end{array}\right.$ ដែល $k, \ell \in \mathbb{Z}$

- បើ $m = 2k$ នោះ $m \cdot n = (2k) \cdot n = 2(kn)$ ជាចំនួនគត់គូ ពិត

- បើ $n = 2l$ នោះ $m \cdot n = m \cdot (2\ell) = 2(m\ell)$ ជាចំនួនគត់គូ ពិត

ដូចនេះ បើ $m \cdot n$ ជាចំនួនគត់សេស នោះ m និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

ឃ. ក្បួននាំឱ្យនៅក្នុងតក្កវិទ្យា $p \Rightarrow q$ បើយើងដឹងថា $p \Rightarrow q$ ពិត ហើយ p ពិត នោះគេសន្និដ្ឋានបានថា q ពិត ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណើ p : ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A

q : មេដ្យាន AM ជាកម្ពស់

គេបានសំណើ p Þ q : "បើ ត្រីកោណ ABC ជាត្រីកោណសមបាតកំពូល A នោះ មេដ្យាន AM ជាកម្ពស់" គឺជាសំណើពិត នោះបើសំណើ p ជាសំណើពិត យើងសន្និដ្ឋានបានថា មេដ្យាន AM ជាកម្ពស់ ។

ង. ក្បួន Syllogisme នៅក្នុងតក្កវិទ្យាបើ $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ ជាសំណើពិត នោះគេទាញបាន $p \Rightarrow r$ ជាសំណើពិត (លក្ខណៈឆ្លង)។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណើ $p : f$ មានដេរីវេត្រង់ x_0

$q : f$ ជាប់ត្រង់ x_0

$r : f$ មានលីមីតត្រង់ x_0

ពិនិត្យសំណើ $p \Rightarrow q$: “បើ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះវាជាប់ត្រង់ x_0” ជាសំណើពិត

$q \Rightarrow r$: “បើ f ជាប់ត្រង់ x_0 នោះវាមានលីមីតត្រង់ x_0” ជាសំណើពិត

គេបាន $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ ជាសំណើពិត

គេសន្និដ្ឋានបានថា $p \Rightarrow r$: “បើ f មានដេរីវេត្រង់ x_0 នោះវាមានលីមីតត្រង់ x_0” ជាសំណើពិត

ឆ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមសំណើផ្ទុយពីការពិត

យើងបានដឹងរួចហើយថា សំណើ p បើជាសំណើពិត នោះសំណើ $\bar{p}$ ជាសំណើមិនពិត ។ ពេលខ្លះដើម្បីស្រាយថាសំណើ p ពិត នោះយើងគ្រាន់តែស្រាយថាសំណើ $\bar{p}$ ជាសំណើមិនពិត ដោយចាប់ផ្តើមពីការឧបមាថាវាពិត រហូតដល់ចុងក្រោយវាមិនពិតវិញដោយសារផ្ទុយពីទ្រឹស្តីក្នុងគណិតវិទ្យា ។

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា គ្រប់ $a,b \in \mathbb{R} : e^a + e^b \geq 2\sqrt{e^{a+b}}$ ។

យើងឧបមាថាគ្រប់ $a,b \in \mathbb{R} : e^a + e^b < 2\sqrt{e^{a+b}}$ $\Rightarrow e^a - 2\sqrt{e^a \cdot e^b} + e^b < 0$ $\Rightarrow (\sqrt{e^a})^2 - 2\sqrt{e^a} \cdot \sqrt{e^b} + (\sqrt{e^b})^2 < 0 \Rightarrow (\sqrt{e^a} - \sqrt{e^b})^2 < 0$ ផ្ទុយពីការពិត ។

ដូចនេះ គ្រប់ $a,b \in \mathbb{R} : e^a + e^b \geq 2\sqrt{e^{a+b}}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា $\log_2 3$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ឧបមាថា $\log_2 3$ ជាចំនួនសនិទាន $\Rightarrow$ $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ ដែល m និង n ជាចំនួនគត់រិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ហើយ $n \neq 0$ ។

$\Rightarrow$ $\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{m}{n} \Rightarrow n\log 3 = m\log 2 \Rightarrow \log 3^n = \log 2^m \Rightarrow 3^n = 2^m$ សមីការនេះអាចទៅរួចតែក្នុងករណី $m = n = 0$ ប៉ុណ្ណោះ ដែលវាផ្ទុយពីលក្ខខណ្ឌដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានបឋមរវាងគ្នា ហើយ $n \neq 0$ ។

ដូចនេះ $\log_2 3$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ជ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមទ្វេលក្ខខណ្ឌ យើងបានដឹងរួចហើយថា សំណើ $p \Leftrightarrow q$ ជាសំណើពិតកាលណា $p \Rightarrow q$ និង $q \Rightarrow p$ ជាសំណើពិតព្រមគ្នា ។ ដូច្នេះ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថា $p \Leftrightarrow q$ ពិត យើងត្រូវស្រាយពីរជំហានគឺ៖

- ជំហានទី១ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ $p \Rightarrow q$

- ជំហានទី២ បង្ហាញលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ $q \Rightarrow p$

ឧទាហរណ៍១៖ បង្ហាញថា $2x + 1 = 3$ លុះត្រាតែ $x = 1$ ។

- លក្ខខណ្ឌចាំបាច់៖ យើងត្រូវបង្ហាញថា បើ $2x + 1 = 3$ នោះ $x = 1$ ។

គេមាន $2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ ពិត ។

- លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់៖ យើងត្រូវបង្ហាញថា បើ $x = 1$ នោះ $2x + 1 = 3$ ។

បើ $x = 1$ នោះ $2x = 2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 + 1 \Rightarrow 2x + 1 = 3$ ពិត ។

ដូចនេះ $2x + 1 = 3$ លុះត្រាតែ $x = 1$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បង្ហាញថា $x^2 - 4x + 3 = 0$ លុះត្រាតែ $x = 1$ ឬ $x = 2$ ។

- លក្ខខណ្ឌចាំបាច់៖ ត្រូវបង្ហាញថា បើ $x^2 - 4x + 3 = 0$ នោះ $x = 1$ ឬ $x = 3$ ។

គេមាន $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ ពិត ។

- លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់៖ ត្រូវបង្ហាញថា បើ $x = 1$ ឬ $x = 3$ នោះ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ។

បើ $x = 1$ ឬ $x = 3$ នោះ $\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $x^2 - 4x + 3 = 0$ នោះ $x = 1$ ឬ $x = 3$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ បង្ហាញថា $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ លុះត្រាតែ $x = -2$ និង $y = 1$ ។

- លក្ខខណ្ឌចាំបាច់៖ ត្រូវបង្ហាញថា បើ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ នោះ $x = -2$ និង $y = 1$ ។

គេមាន $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ ដោយ $\begin{cases} (x+2)^2 \geq 0 \\ (y-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 0$

នោះ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ កាលណា $\begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ ពិត ។

- លក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់៖ ត្រូវបង្ហាញថា បើ $x = -2$ និង $y = 1$ នោះ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$

បើ $x = -2$ និង $y = 1$ នោះ $\begin{cases} x+2 = 0 \\ y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ ពិត

ដូចនេះ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ លុះត្រាតែ $x = -2$ និង $y = 1$ ។

ឈ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមឧទាហរណ៍ផ្ទុយ

វិធីនេះត្រូវឱ្យគេរកឧទាហរណ៍មួយមកបញ្ជាក់ថា សំណើត្រូវបង្ហាញជាសំណើមិនពិត ។

ឧទាហរណ៍៖ បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមនេះមិនពិត៖

ក. គ្រប់ចំនួនបឋម គឺជាចំនួនគត់សេស ។

ខ. បើ $a > b$ នោះ $a^2 > b^2$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត a និង b ។

គ. គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត $a_n = n^2 - n + 41$ គឺជាចំនួនបឋម ។

ចំពោះសំណើ ក. យើងមាន 2 ជាចំនួនបឋម ហើយមិនមែនជាចំនួនគត់សេស ។

ចំពោះសំណើ ខ. យើងយក $a = 1$ និង $b = -2$ គេបាន $a > b$ តែ $a^2 > b^2$ មិនពិតទេ ។

ចំពោះសំណើ គ. យក $n = 41$ គេបាន $a_{41} = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ មិនមែនជាចំនួនបឋម ។

ញ. សម្រាយបញ្ជាក់តាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា

ពិនិត្យទៅគ្រាប់ដូមីណូ ។ ប្រសិនបើគ្រាប់ដូមីណូទី១ បានដួល ហើយយើងឃើញថាគ្រាប់ដូមីណូចុងក្រោយដួលដែរ នោះយើងសន្និដ្ឋានបានថាគ្រាប់ដូមីណូទាំងអស់សុទ្ធតែដួល ។

តក្កវិទ្យានៃគោលការណ៍វិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាគឺ៖

i. បើ P_n ពិតចំពោះ $n = 1$ (ឬចំនួនគត់ណាមួយផ្សេងពីនេះ) និង

ii. បើភាពពិតនៃ P_k នាំឱ្យ P_{k+1} ពិត ។

ឧទាហរណ៍១៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

- បើ $n = 1$ នោះ $(1)^3 + 2(1) = 3$ ចែកដាច់នឹង 3 ពិត

- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $k^3 + 2k$ ជាពហុគុណនៃ $3 \Rightarrow k^3 + 2k = 3\ell$ ដែល $\ell \in \mathbb{N}$ នោះពេល $n = k + 1$ គេបាន $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$

$$= (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3)$$
$$= 3\ell + 3(k^2 + k + 1) = 3(\ell + k^2 + k + 1)$$ ពិត

ដូចនេះ $n^3 + 2n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

- បើ $n = 1$ នោះ $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2(1)+1}$ ពិត

- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k$ គឺ $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$

នោះពេល $n = k + 1$ គេបាន៖

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$ ពិត

ដូចនេះ $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ គ្រប់ $n \in \mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ស្រាយបញ្ជាក់ថា $1 + 3n < n^2$ គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 4$ ។

- បើ $n = 4$ នោះ $1 + 3(4) = 13 < 4^2$ ពិត

- ឧបមាថាវាពិតដល់ $n = k \geq 4$ គឺ $1 + 3k < k^2$

នោះពេល $n = k + 1$ គេបាន៖

$$1 + 3(k+1) = (1 + 3k) + 3 < k^2 + 3 = k^2 + 2 + 1 < k^2 + 2 \cdot k + 1 = (k+1)^2$$

ពិត

ដូចនេះ $1 + 3n < n^2$ គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 4$ ។

លំហាត់

១.ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាងដែលជាសំណើក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងពីរនោះ។

ក. គ្រប់ប្រទេសនៅក្នុងទ្វីបអាស៊ី គឺជាសមាជិកនៃសមាគមន៍អាស៊ាន ។

ខ. សមីការ $2^x - 1 = 0$ មានចម្លើយ $x = 0$ ។

គ. បើគោជាសត្វចតុបាត នោះស្ពេកនឹងមានភ្លៀងនៅរាជធានីភ្នំពេញ ។

ឃ. ជ្រូក និងគោជាថនិកសត្វ ។

ង. មាន់ជាថនិកសត្វ លុះត្រាតែ កង្កែបជាបក្សី ។

២.បង្ហាញថា បើ a និង b ជាចំនួនគត់គូ នោះ $a+b+1$ ជាចំនួនគត់សេស ។

៣.បង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមនេះមិនពិតដោយប្រើឧទាហរណ៍ផ្ទុយ៖

ក. បើ a និង b ជាពីរចំនួនបឋមរវាងគ្នា នោះ a និង b ត្រូវតែជាចំនួនបឋម ។

ខ. សមីការ $x^2 = 1$ មានឫសតែមួយគត់គឺ $x = 1$ ។

គ. បើ a ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $\sqrt{a}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

៤.តើសំណើជាអ្វី? ចូររកឧទាហរណ៍សំណើពិត , សំណើមិនពិត។

៥.ចូរជ្រើសរើសអំណះអំណាងដែលជាសំណើក្នុងចំណោមអំណះអំណាងខាងក្រោម ហើយកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើទាំងពីរនោះ៖

ក. 2014 ចែកដាច់នឹង 7 ។

ខ. ភ្នំពេញជារាជធានីនៃប្រទេសកម្ពុជា។

គ. តើអ្នកឈ្មោះអ្វី ?

ឃ. ទែនីសគឺជាល្បែងមួយដែលគេលេងវាជាមួយនឹងរ៉ុកែត និងបាល់

ង. $5 \leq 10$

ច. ម៉ូស្គូឋិតនៅក្នុងអឌ្ឍគោលខាងត្បូង។

ឆ. ត្រីកោណដែលមានជ្រុងពីរស្មើគ្នាគឺជាត្រីកោណសមបាត។

ជ. គ្រប់ប្រទេសទាំងអស់នៅក្នុងទ្វីបអាស៊ីគឺជាសមាជិកអាស៊ាន។

ឈ. សមីការ $x^2 = 9$ មានឫសតែមួយគត់។

ញ. ការេមួយមានអង្កត់ទ្រូងចំនួន២។

ដ. ដាក់កង់របស់អ្នកឲ្យឆ្ងាយបន្ទាប់ពីប្រើរួច។

ឋ. $(2+3) \cdot 5 \geq 25$ ។

៦.វិនិច្ឆ័យថាតើអំណះអំណាងខាងក្រោមណាខ្លះជាសំណើ រួចបញ្ជាក់ភាពពិតៈ

ក. រដូវវស្សាគឺត្រជាក់ និងរដូវប្រាំងគឺក្ដៅ។

ខ.ចតុកោណកែងជាការេ និងការេជាចតុកោណស្មើ។

គ. បាងកក គឺជារដ្ឋធានីនៃប្រទេសថៃ ហើយថៃ ឋិតនៅក្នុងភាគខាងត្បូងនៃអាមេរិច

ឃ. ថៃ ឋិតនៅក្នុងទ្វីបអាស៊ី ឬ ថៃឋិតនៅក្នុងទ្វីបអាហ្វ្រិច។

ង. ត្រីកោណគឺជារូបធរណីមាត្រដែលមានជ្រុងបី ហើយ តើអ្នកឈ្មោះអី?

ច. កាលីហ្វញ៉ា គឺជារដ្ឋមួយនៃសហរដ្ឋអាមេរិច ហើយ ប្រទេសបារាំង ឋិតនៅក្នុងទ្វីបអាហ្វ្រិច

ឆ. មាន ២៦ អក្សរនៅក្នុងអក្ខរក្រមភាសាអង់គ្លេស ឬមាន ១០ លេខ ក្នុងប្រព័ន្ធរបាប់គោលដប់។

ជ. ១២ គឺជាកត្តាមួយនៃ ២៤ ហើយជាពហុគុណមួយនៃ ៥។

ឈ. ១៨ គឺជាកត្តាមួយនៃ ៥៤ ឬជាពហុគុណមួយនៃ ៨។

ញ. $(2+3)\times 5 \geq 30$ ឬ $3^2 < 10$។

ដ. ត្រីបាឡែន គឺជាថនិកសត្វ ហើយឥន្ទ្រីគឺជាបក្សី។

ឋ. បញ្ចកោណមានជ្រុង៥ ឬ $3^2 = 10$។

ឌ. ចតុកោណស្មើគឺជាប្រលេឡូក្រាម ហើយការេគឺជាចតុកោណស្មើ។

ឍ. $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x - 1$ ឬ មាន 4.5ℓ ក្នុង $450m\ell$។

ណ. មាន $10mm$ នៅក្នុង $1cm$ និង $100mm$ នៅក្នុង $1m$។

ត. មុំកែងគឺមានរង្វាស់ 90° ឬត្រីកោណសម័ង្សមានមុំទាំងបីប៉ុនគ្នា។

ឋ. ព្រះចន្ទគឺជាប៉េងប៉ោះ ឬកន្សោម $x+5$ គឺជាទ្វេធា។

៧.គេមានសំណើ៖ p : ខ្ញុំមានកិច្ចការផ្ទះ, q : ខ្ញុំនឹងលេងបាល់បោះ

ក. ចូរសរសេរសំណើ $p \vee q$, $p \wedge q$ ។

ខ. ឧបមាថាសំណើ p ពិត និងសំណើ q មិនពិត។ ចូរកំណត់តម្លៃភាពពិតនៃសំណើ $p \vee q, p \wedge q$ ។

៨.បើ៖ a : ខ្ញុំប្រឡងជាប់ b : ឪពុករបស់ខ្ញុំនឹងទិញកង់ថ្មីឲ្យខ្ញុំ។

ក. សរសេរសំណើ $a \wedge b, a \vee b, \bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \wedge \bar{b}, \bar{a} \vee \bar{b}, a \Rightarrow b, \bar{b} \Rightarrow \bar{a}, a \Leftrightarrow b$ ជាពាក្យ។

ខ. បង្កើតតារាងភាពពិតចំពោះសំណើនីមួយៗខាងលើ។

៩.បើ៖ p : សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ q : សំ ហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ ចូរសរសេរសំណើខាងក្រោមដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាតក្កវិទ្យា។

ក. សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ ហើយគាត់ហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ។

ខ. សំ មិនមែនជាកីឡាករបាល់ទាត់។

គ. សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ ឬគាត់មិនហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ

ឃ. សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ និងគាត់មិនហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ។

ង. សំ មិនមែនជាកីឡាករបាល់ទាត់ ឬគាត់មិនហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ។

ច. បើ សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ នោះគាត់ហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ។

ឆ. បើ សំមិនហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ នោះគាត់មិនមែនជាកីឡាករបាល់ទាត់។

ជ. សំ ជាកីឡាករបាល់ទាត់ លុះត្រាតែគាត់ហាត់លេងបាល់នៅសួនច្បារ។

១០.ក. ម៉ាស៊ីនផ្ញើសារជាប់រវល់ ឬម៉ាស៊ីនថតចម្លងខូច។
ខ. បាល់ពណ៌ស និង ឃ្លីពណ៌ក្រហម។

១១.សង់តារាងភាពពិតនៃសំណើ៖ $\bar{p} \wedge \bar{q}, \overline{\bar{p} \wedge q}, p \wedge (q \vee \bar{p}), \overline{p \vee \bar{q}}, \overline{\bar{p} \vee \bar{q}}, \overline{\overline{\bar{p} \vee q} \wedge \bar{q}}$ ។

១២.គេមានសំណើ៖ $p: x^2 + x - 6 = 0$, $q: x = 2, x = -3$

ក. បង្ហាញថា $p \Rightarrow q$ ជាសំណើពិត , $q \Rightarrow p$ ជាសំណើពិត

ខ. បង្ហាញថា $p \Leftrightarrow q$ ។

១៣.គេមានសំណើបី ៖ p : ថ្ងៃនេះជាថ្ងៃចន្ទ q : អាកាសធាតុត្រជាក់ r : មេឃភ្លៀង ចូរសរសេរកន្សោមនិមិត្តសញ្ញាខាងក្រោមជាពាក្យ ៖

ក. $p \Rightarrow q$

ខ. $\bar{q} \Rightarrow (p \wedge r)$

គ. $\bar{p} \Rightarrow (q \vee r)$

១៤.ពិនិត្យមើលថាតើសំណើរសមាសខាងក្រោមណាខ្លះជា Tautology ។

ក. $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow q$

ខ. $[(q \Rightarrow p) \Rightarrow q] \Rightarrow q$

គ.$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \bar{q})] \Rightarrow \bar{p}$

ឃ. $[(p \vee q) \Rightarrow \bar{r}] \Rightarrow (\overline{\bar{q} \wedge r})$

ង.$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

ច. $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

ឆ.$[(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$

ជ. $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$

ឈ.$p \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]\}$

ញ. $p \Rightarrow \{(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]\}$ ។

១៥.ពិនិត្យមើលថាតើវិចារខាងក្រោមណាខ្លះមានសុពលភាព ។

ក. $\bar{p} \Rightarrow q, \bar{p} \Rightarrow \bar{q} \rightarrow p$

ខ. $p \Rightarrow (q \wedge r) \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

គ. $(p \wedge q) \Rightarrow r \rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

ឃ. $(p \wedge q) \Rightarrow r \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

ង. $(p \vee q) \Rightarrow r \rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

ច. $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow \bar{r}, r \rightarrow p \vee \bar{q}$ ។

១៦.សិក្សាពីសុពលភាពនៃវិចារខាងក្រោម៖

S_1 : បើមេឃភ្លៀង នោះលោកសុខឈឺ

S_2 : មេឃមិនភ្លៀង

S : លោកសុខមិនឈឺ

១៧.បង្ហាញថាបើ x និង y ជាចំនួនសនិទាន នោះ $3x-2y$ គឺជាចំនួនសនិទាន។

១៨.បង្ហាញថា៖

ក. បើ x និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $2x-y+1$ ជាចំនួនគត់គូ។

ខ. បើ x និង y ជាចំនួនគត់គូនោះ $3x+5y+4$ ជាចំនួនគត់គូ។

គ. បើ x ជាចំនួនគត់គូ និង y ជាចំនួនគត់សេសនោះ $xy+y-1$ ជាចំនួនគត់គូ។

ឃ. បើ x ជាចំនួនគត់គូនិងy ជាចំនួនគត់សេសនោះ$(x-1)^2+2y$ ជាចំនួនគត់សេស។

១៩.ក. បង្ហាញថា បើ n^2 ជាពហុគុណនៃ 3 នោះ n ជាពហុគុណនៃ 3 ។

ខ. បង្ហាញថាចំពោះចំនួនគត់ m និង n បើផលគុណ mn មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 នោះ m និង n ក៏មិនមែនជាពហុគុណនៃ 5 ដែរ។

គ. បង្ហាញថាបើមុំឆ្លាស់ក្នុងពីរនៃបន្ទាត់ពីរជាមុំស្មើគ្នា នោះបន្ទាត់ទាំងពីរនោះស្របគ្នា។

២០.ក. បង្ហាញថា $\sqrt{5}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ខ. បង្ហាញថា $\sqrt[3]{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

គ. បង្ហាញថា $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន។

២១.ក. បង្ហាញថា $x^3 - 9x = 0$ លុះត្រាតែ $x = 0$ ឬ $x = -3$ ឬ $x = 3$។

ខ. បង្ហាញថា $(x-1)^2 + y^2 = 0$ លុះត្រាតែ $x = 1$ និង $y = 0$ ។

គ. បង្ហាញថា $5n$ ជាពហុគុណនៃ 15 លុះត្រាតែ n ជាពហុគុណនៃ 3។

២២.តើលក្ខខណ្ឌមួយណាដែលជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងមួយណាដែលជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ភាពពិតនៃ "ចំនួនគត់ n មិនមែនជាចំនួនបឋម (composite)" ?

ក. "n ចែកដាច់នឹង 3"

ខ. "n ចែកដាច់នឹង 6"

គ. "n ជាចំនួនគត់គូ"

ឃ. "n មានកត្តាផ្សេងគ្នាពីរយ៉ាងតិច"

ង. "n មានកត្តាផ្សេងគ្នាច្រើនជាងពីរ"

ច. "$n = 15$"

ឆ. "n មានកត្តាមួយផ្សេងពី n"

ជ. "n មានកត្តាបឋមមួយ"

ឈ. "n មានកត្តាបឋមមួយផ្សេងពី n"។

២៣.ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា (n ជាចំនួនគត់) ចូរស្រាយបំភ្លឺថា៖

ក. $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ គ្រប់ $n\geq 1$ (រូបមន្ត Gauss)

ខ. $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=1-x^n$ គ្រប់ $n\geq 1$

គ. $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ឃ. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ង. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ គ្រប់ $n\geq 1$

ច. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ឆ. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n\cdot(n+1)^2=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ជ. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ គ្រប់ $n\geq 1$

ឈ. $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ញ. $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}n(n+1)$ គ្រប់ $n\geq 1$

ដ. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ គ្រប់ $n\geq 1$ ។

២៤.បង្ហាញវិសមភាពនីមួយៗខាងក្រោមតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា (n ជាចំនួនគត់)

ក. $n < 2^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$

ខ. $n^2 \leq 2^n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$

គ. $2^n < n!$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$

ឃ. $n! \leq 2^{n^2}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 4$

ង. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ច. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

ឆ. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n} - 1$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$។

២៥.ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា (n ជាចំនួនគត់) ចូរស្រាយបំភ្លឺថា៖

ក. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ជាពហុគុណនៃ 9 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ. $n^3 - n$ ជាពហុគុណនៃ 3 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

គ. $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ ។

២៦.បង្ហាញថា $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ ចំពោះគ្រប់ $n > 2$ ។

២៧.បង្ហាញថា $3^{3n} + 1$ ជាពហុគុណនៃ 7 ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់សេស $n > 1$ ។

២៨.ក្នុងករណីមួយៗខាងក្រោម ចូរសន្និដ្ឋានតួទូទៅនៃស្ទីត a_n រួចស្រាយបញ្ជាក់វាដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា៖

ក. $a_0 = 2 ; a_{n+1} = -a_n , n \geq 0$

ខ. $a_0 = 1 ; a_1 = -2 ; a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1} , n \geq 0$

គ. $a_0 = 1 ; a_{n+1} = 1 - a_n , n \geq 0$

ឃ. $a_0 = 3 ; a_{n+1} = (a_n)^2 , n \geq 0$ ។

២៩.គេឱ្យ (a_n) ជាស្វ៊ីតកំណត់គ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ គ្រប់ $n \geq 0$ ។ ស្រាយតាមវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាថា៖

ក. បើ $a_0 = 1$ និង $a_1 = -1$ នោះ $a_n = (-1)^n$ ។

ខ. បើ $a_0 = 1$ និង $a_1 = 2$ នោះ $a_n = 2^n$ ។

គ. បើ $a_0 = p$ និង $a_1 = 1$ នោះ $a_n = \frac{1}{3}[(p+q)2^n + (2p-q)(-1)^n]$ ។

៣០.ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យាចូរបង្ហាញថា៖

ក. 3 ជាកត្តានៃ $n^3 + 2n$

ខ. 3 ជាកត្តានៃ $n^3 - 7n$

គ. 3 ជាកត្តានៃ $n^3 - n$

ឃ. 3 ជាកត្តានៃ $n^3 + 5n$

ង. 6 ជាកត្តានៃ $n^3 - n$

ច. 6 ជាកត្តានៃ $n^3 + 5n$

ឆ. 3 ជាកត្តានៃ $4^n - 1$

ជ. 8 ជាកត្តានៃ $9^n - 1$

ឈ. 5 ជាកត្តានៃ $7^n - 2^n$

ញ. 4 ជាកត្តានៃ $9^n - 5^n$

ដ. 4 ជាកត្តានៃ $3^{2n} - 1$

ឋ. 5 ជាកត្តានៃ $3^{2n} - 2^{2n}$ ។

មេរៀនទី២ ៖ សំណុំ

២.១.សំណុំ និងធាតុ (Sets and Elements)

ក.និយមន័យ

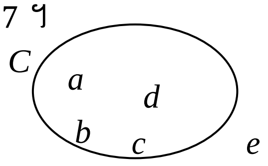
សំណុំជាការប្រមូលផ្តុំនៃគណិតវត្ថុ (ចំនួន អនុគមន៍ គូមានលំដាប់ ឬវត្ថុផ្សេងៗទៀត ដែលយើងចង់សិក្សា) ។

ជាទូទៅ៖

- គណិតវត្ថុនីមួយៗ ដែលបង្កើតសំណុំហៅថា ធាតុនៃសំណុំ (Elements or Members) ។
- សំណុំតាងដោយអក្សរធំដូចជា $A\ ;B\ ;C\ ;\mathrm{K}$ ។
- ធាតុនៃសំណុំមួយមិនមានភាពច្រំដែលទេ មានន័យថាធាតុនៃសំណុំនោះត្រូវតែខុសៗគ្នា ។
- ចំនួនធាតុនៃសំណុំ A តាងដោយ $n(A)$ ឬ $\#(A)$ ឬ $|A|$ ឬ $\mathrm{Card}(A)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ A ជាសំណុំនៃចំនួនគត់គូវិជ្ជមានតូចជាង 16 ។

គេសរសេរ $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ ហើយ $n(A)=7$ ។



- គេប្រើសញ្ញា ∈ និង ∉ សម្គាល់ ជារបស់ និងមិនមែនជារបស់ រៀងគ្នា ។

ឧទាហរណ៍២៖ តាមឧទាហរណ៍១ខាងលើ គេបាន 2 Î A ; 4 Î A តែ $3 \notin A$ ។

- គេកំណត់សំណុំតាមពីររបៀបគឺ ការកំណត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ និងការកំណត់តាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ B ជាសំណុំនៃចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតូចជាង 16 ។

គេបាន $B = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$ (កំណត់តាមការរៀបរាប់ឈ្មោះធាតុ) និង $B = \{x|x$ ជាចំនួនគត់សេសវិជ្ជមានតូចជាង $16\}$ (កំណត់តាមលក្ខណៈរួមធាតុ)

- គេប្រើផ្នែកមួយនៃប្លង់ខ័ណ្ឌដោយខ្សែបិទជិត ដើម្បីតាងសំណុំហៅថាដ្យាក្រាមវិន (Venn Diagram) ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យសំណុំ $C = \{a, b, c, d\}$ ។

ខ. សំណុំគោល

- សំណុំចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\mathbb{N} = \{1,2,3,4, \dots\}$

- សំណុំចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$

- សំណុំចំនួនសនិទាន $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

- សំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}$

- សំណុំចំនួនកុំផ្លិច $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណុំ $A=\{x\in\mathbb{N}|x^2-5x+4\leq 0\}$

នោះគេបាន $A=\{1,2,3,4\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេមានសំណុំ $B=\{x\in\mathbb{C}|x^4+1=0\}$

នោះគេបាន $B=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$

២.២.ប្រភេទនៃសំណុំ

ក. សំណុំទទេ

សំណុំដែលគ្មានធាតុគេហៅថាសំណុំទទេ ហើយតាងដោយ $\emptyset$ ឬ $\{\}$ តែ $\{\emptyset\}$ មិនតាងឱ្យសំណុំទទេឡើយ ។ គេបាន $n(\emptyset)=0$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A=\{x\in\mathbb{N}|x^2-3=0\}$ ។

គេបាន $A=\emptyset$ ព្រោះ $x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ សំណុំ B ជាសំណុំនៃចំនួនគត់វិជ្ជមានចែកដាច់នឹង 0 ។

គេបាន $B=\emptyset$ ព្រោះគ្មានចំនួនគត់ណាដែលចែកដាច់នឹង 0 ទេ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ តើសំណុំខាងក្រោមណាខ្លះជាសំណុំទទេ ?

$C=\{x|x$ ជាចំនួនគត់ចែកដាច់នឹង $5\}$

$D=\{x|x$ ជាចំនួនបឋមគូ$\}$

$E = \{x | x$ ជាចំនួនគត់គូចែកដាច់នឹង $3\}$

$F = \{x | x$ ជាចំនួនគត់សេសចែកដាច់នឹង $2\}$

គេបាន $C = \{5,10,15, \ldots\}$ នោះ C មិនមែនជាសំណុំទទេឡើយ ។

$D = \{2\}$ នោះ D មិនមែនជាសំណុំទទេឡើយ ។

$E = \{6,12,18, \ldots\}$ នោះ E មិនមែនជាសំណុំទទេឡើយ ។

$F = \{\}$ នោះ F ជាសំណុំទទេ ។

ខ. សំណុំរាប់អស់ និងសំណុំអនន្ត

- សំណុំរាប់អស់ គឺជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុ ជាចំនួនកំណត់ ។

- សំណុំអនន្ត គឺជាសំណុំដែលមានចំនួនធាតុច្រើនរាប់មិនអស់ ។

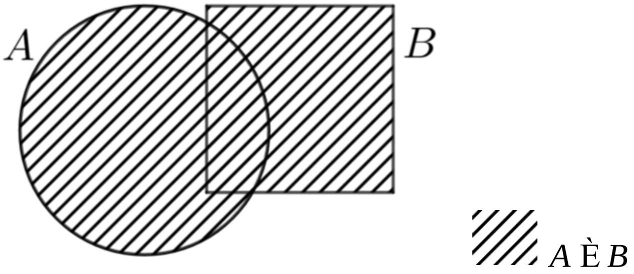
ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A = \{1,2,3, a, b, c\}$ មាន $n(A) = 6$ ដូច្នេះ A ជាសំណុំរាប់អស់។
សំណុំ B = { ចំណុចទាំងអស់នៅលើបន្ទាត់ $(L)\}$ ជាសំណុំអនន្ត ។

ប្រមាណវិធីលើសំណុំ (Set Operations)

ក. ប្រជុំ (Union)

ពីរសំណុំ A និង B ។ ប្រជុំនៃពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ដែលជាធាតុរបស់សំណុំ A មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ B ឬ ជាធាតុរបស់សំណុំ B មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ A ឬ ជាធាតុរួមរបស់សំណុំ A និង B ។

គេកំណត់សរសេរ $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ ។



រូបភាពទី 2

ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{2,4,5,6,7\}$ ។

គេបាន $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ កំណត់សំណុំ $C \cup D$ និង $n(C \cup D)$ បើ $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{x | 2 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z}\}$ ។

គេមាន $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{2,4,5,6\}$ នោះ $C \cup D = \{-2,1,0,2,4,5,6\}$ និង $n(C \cup D) = 7$ ។

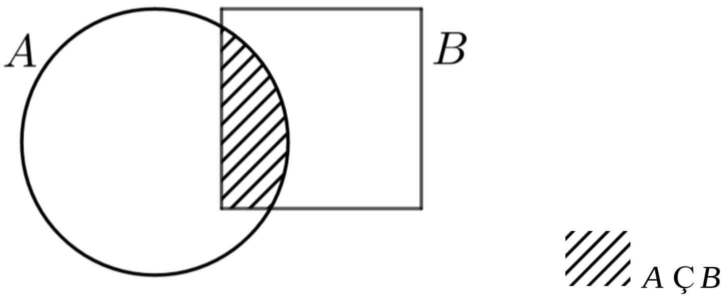
ឧទាហរណ៍៣៖ កំណត់សំណុំ $E \cup F$ និង $n(E \cup F)$ បើ $E = \{\emptyset, \{1\}, \{3,4\}, 3,4\}$ និង $F = \{1, \{1\}, 2,3, \{2,4\}\}$ ។

គេបាន $E \cup F = \{\emptyset, \{1\}, \{3,4\}, 3,4,1,2, \{2,4\}\}$ និង $n(E \cup F) = 8$ ។

ខ. ប្រសព្វ (Intersection)

ពីរសំណុំ A និង B ។ ប្រសព្វនៃពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ដែលជាធាតុរួមរបស់សំណុំ A និង B ។

គេកំណត់សរសេរ $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ ។



រូបភាពទី 3

ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{2,4,5,6,7\}$ ។

គេបាន $A \cap B = \{2,4\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ កំណត់សំណុំ $C \cap D$ និង $n(C \cap D)$ បើ $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{x | 2 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z}\}$ ។

គេមាន $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{2,4,5,6\}$ នោះ $C \cap D = \emptyset$ និង $n(C \cap D) = 0$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ កំណត់សំណុំ $E \cap F$ និង $n(E \cap F)$ បើ $E = \{\emptyset, \{1\}, \{3,4\}, 3, 4\}$ និង $F = \{1, \{1\}, 2, 3, \{2,4\}\}$ ។

គេបាន $E \cap F = \{\{1\}, 3\}$ និង $n(E \cap F) = 2$ ។

គេថា សំណុំពីរ A និង B ជាសំណុំពីរដាច់គ្នា (Disjoint) កាលណាសំណុំទាំងពីរគ្មានធាតុរួមទាល់តែសោះ មានន័យថា $A \cap B = \emptyset$ ។ តាមនិយមន័យប្រសព្វ និងប្រជុំគេបានទំនាក់ទំនង $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ អង្គការក្រៅរដ្ឋាភិបាលមួយបានចុះឈ្មោះស៊ើបសួរព័ត៌មានអំពីការចូលចិត្តសិក្សាមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា (M) និងមុខវិជ្ជាភាសាខ្មែររបស់សិស្សចំនួន 150 នាក់នៅសាលាបឋមសិក្សាមួយ។ គេទទួលបានព័ត៌មានថាមានសិស្សចំនួន 102 នាក់ ចូលចិត្តសិក្សាគណិតវិទ្យា ចំនួន71 នាក់ចូលចិត្តសិក្សាភាសាខ្មែរ និងចំនួន 40 នាក់ចូលចិត្តសិក្សាមុខវិជ្ជាទាំងពីរ ។

តើមានសិស្សចំនួនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តសិក្សាយ៉ាងហោចណាស់មួយមុខវិជ្ជា?

តាមបំរាប់ គេបាន $n(M) = 71\,;\, n(K) = 102$ និង $n(M \cap K) = 40$

តាមទំនាក់ទំនង $n(M \cup K) = n(M) + n(K) - n(M \cap K) = 71 + 102 - 40 = \boxed{133}$ នាក់

លក្ខណៈនៃប្រសព្វ និងប្រជុំ

1a.	$A \cup A = A$	1b.	$A \cap A = A$
2a.	$A \cup \emptyset = A$	2b.	$A \cap \emptyset = \emptyset$
3a.	$A \cup B = B \cup A$	3b.	$A \cap B = B \cap A$
4a.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	4b.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

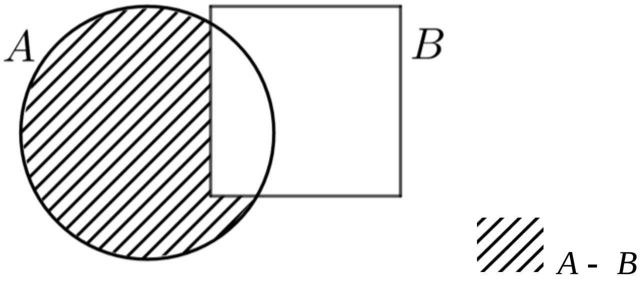
5a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

គ. ផលដកសំណុំ (Difference)

ពីរសំណុំ A និង B ។ ផលដកនៃពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ដែលជាធាតុរបស់សំណុំ A មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ B ។

គេកំណត់សរសេរ $A - B = \{x \in A | x \notin B\}$ ។



រូបភាពទី 4

ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{2,4,5,6,7\}$ ។

គេបាន $A - B = \{1,3\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ កំណត់សំណុំ $C - D$ និង $n(C - D)$ បើ $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{x|2 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z}\}$ ។

គេមាន $C = \{-2,1,0\}$ និង $D = \{2,4,5,6\}$នោះ $C - D = \{-2,1,0\}$និង $n(C - D) = 3$ ។

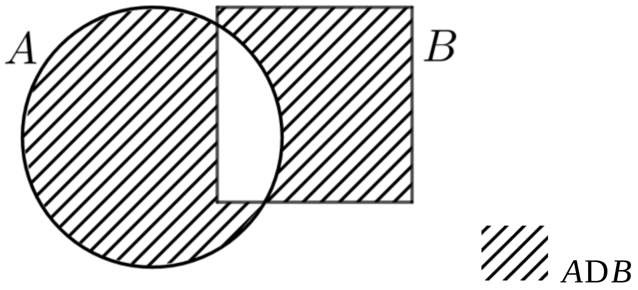
ឧទាហរណ៍៣៖ កំណត់សំណុំ $E - F$ និង $n(E - F)$ បើ $E = \{\emptyset, \{1\}, \{3,4\}, 3,4\}$ និង $F = \{1, \{1\}, 2, 3, \{2,4\}\}$ ។

គេបាន $E - F = \{\emptyset, \{3,4\}, 4\}$ និង $n(E - F) = 3$ ។

ឃ. ផលដកឆ្លុះ (Symmetry Difference)

ពីរសំណុំ A និង B ។ ផលដកឆ្លុះនៃពីរសំណុំ A និង B ជាសំណុំនៃធាតុទាំងអស់ដែលជាធាតុរបស់សំណុំ A មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ B ឬ ជាធាតុរបស់សំណុំ B មិនមែនជាធាតុរបស់សំណុំ A ។

គេកំណត់សរសេរ $A\Delta B=\{x|(x\in A\land x\notin B)\lor(x\in B\land x\notin A)\}$ ។



រូបភាពទី 5

ឧទាហរណ៍១៖ សំណុំ $A=\{1,2,3,4\}$ និង $B=\{2,4,5,6,7\}$ ។

គេបាន $A\Delta B=\{1,3,5,6,7\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ កំណត់សំណុំ $C\Delta D$ និង $n(C\Delta D)$ បើ $C=\{-2,1,0\}$ និង

$D=\{x|2<x\leq 6,x\in\mathbb{Z}\}$ ។

គេមាន $C=\{-2,1,0\}$ និង $D=\{2,4,5,6\}$ នោះ $C\Delta D=\{-2,1,0,2,4,5,6\}$និង $n(C\Delta D)=7$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ កំណត់សំណុំ $E\Delta F$ និង $n(E\Delta F)$ បើ $E=\{\emptyset,\{1\},\{3,4\},3,4\}$ និង

$F=\{1,\{1\},2,3,\{2,4\}\}$ ។

គេបាន $E\Delta F=\{\emptyset,\{3,4\},4,1,2,\{2,4\}\}$ និង $n(E\Delta F)=6$ ។

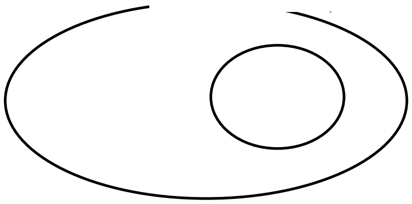
សំណុំសកល និង សំណុំរង (Universal set and Subset)

ក. សំណុំរង

គេមានសំណុំពីរ A និង B ។ គេថា សំណុំ A ជាសំណុំរងនៃសំណុំ B កាលណាគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ A ជាធាតុនៃសំណុំ B ។ គេសរសេរ A Í B អានថា A នៅក្នុង B ឬ A ជាសំណុំរងនៃ B ។

សំណុំ $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ។

A



រូបភាពទី 7

សម្គាល់៖

- ទំនាក់ទំនង $A \subset B$ មានន័យថា $A \subseteq B$ និង $A \neq B$ ។ ក្នុងករណីនេះគេហៅ A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ B ។

- សំណុំ $A = B$ លុះត្រាតែ $A \subseteq B$ និង $B \subseteq A$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

$\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$

$$\{1,2,3\} \not\subset \{1,2,4,5\}$$

ឧទាហរណ៍២៖ ក្នុងសំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ គេបាន $(4,5) \subset [4,5) \subset [4,5]$

ជាទូទៅ៖

- បើ $A \subseteq B$ នោះ $n(A) \leq n(B)$

- បើ $A \subset B$ នោះ $n(A) < n(B)$ ។

លក្ខណៈ

1a. $\emptyset \subseteq A$ គ្រប់សំណុំ A 1b. $A \subseteq A$

ឧទាហរណ៍៣៖ ចូរសរសេរគ្រប់សំណុំរងនៃសំណុំ $A = \{1,3\}$ ។

សំណុំរងនៃ A មានសំណុំរងដែលគ្មានធាតុ មាន $\emptyset$

សំណុំរងនៃ A មានសំណុំរងដែលមាន១ធាតុ មាន $\{1\},\{3\}$

សំណុំរងនៃ A មានសំណុំរងដែលមាន២ធាតុ មាន $\{1,3\}$

ដូចនេះ សំណុំរងនៃ A មានចំនួន 4 សំណុំ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ សំណុំ A មាន n ធាតុ នោះចំនួនសំណុំរងនៃ A ទាំងអស់មានចំនួន 2^n ។

សម្រាយ

សំណុំរងនៃ A ដែលគ្មានធាតុមានចំនួន $C(n,0)$

សំណុំរងនៃ A ដែលមាន១ធាតុមានចំនួន $C(n,1)$

សំណុំរងនៃ A ដែលមាន២ធាតុមានចំនួន $C(n,2)$

....

សំណុំរងនៃ A ដែលមាន $n-1$ ធាតុមានចំនួន $C(n,n-1)$

សំណុំរងនៃ A ដែលមាន n ជាតុមានចំនួន $C(n,n)$

គេបាន ចំនួនសំណុំរងទាំងអស់នៃ A គឺ $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n-1)+C(n,n)$

តែដោយ $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n-1)+C(n,n)=(1+1)^n=2^n$

ដូចនេះ បើសំណុំ A មាន n ជាតុ នោះចំនួនសំណុំរងរបស់វាគឺ 2^n ។

ឧទាហរណ៍៤៖ សំណុំ A មាន 5 ជាតុ ។ តើសំណុំរងផ្ទាល់ មិនទទេនៃ A មានប៉ុន្មាន ?

សំណុំរងទាំងអស់នៃ A មាន $2^5 = 32$ តែក្នុងចំណោម 32 សំណុំរងមានសំណុំទទេ ១ និង សំណុំ A ខ្លួនឯង ១ ។ ដូច្នេះ សំណុំរងផ្ទាល់ មិនទទេនៃ A មាន $32 - 2 = \boxed{30}$ សំណុំ ។

ខ. សំណុំសកល

សំណុំសកល គឺជាសំណុំដែលមានគ្រប់ជាតុដែលគេបានជ្រើសរើសយកមកសិក្សា ។

សំណុំសកល តាងដោយអក្សរ U ។

ឧទាហរណ៍១៖ បើគេសិក្សាពីការបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់មួយគ្រាប់ចំនួនមួយដង នោះគេបាន

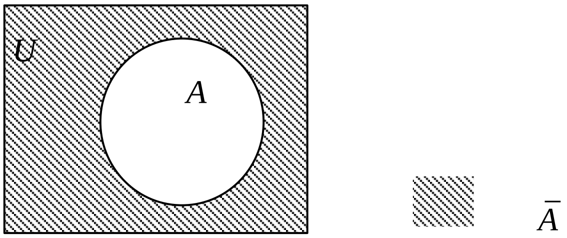
សំណុំសកល $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ ដែល $n(U)=6$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ បើគេសិក្សាពីការបោះកាក់មួយគ្រាប់ចំនួនពីរដង នោះគេបាន

សំណុំសកល $U=\{HH,HT,TH,TT\}$ ដែល $n(U)=4$ ។

គ. សំណុំរងបំពេញ (Complement)

U ជាសំណុំសកលមួយ និង A ជាសំណុំរងនៃ U ។ សំណុំរងបំពេញនៃ A ក្នុង U តាងដោយ $\bar{A}$ ឬ A^C ឬ C_E^A ជាសំណុំដែលមានធាតុទាំងអស់ជាធាតុរបស់ U ដែលមិនមែនជាធាតុរបស់ A ។ គេសរសេរ $\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$ ។



លក្ខណៈ

1a. $A \cup \bar{A} = U$ 1b. $A \cap \bar{A} = \emptyset$

2a. $A \cup U = U$ 2b. $A \cap U = A$

3.a $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 3b. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (De Morgan)

ជាទូទៅ៖ $n(U) = n(A) + n(\bar{A}) \Rightarrow n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ អង្គការក្រៅរដ្ឋាភិបាលមួយបានចុះឈ្មោះស៊ើបសួរព័ត៌មានអំពីការចូលចិត្តសិក្សាមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យា (M) និងមុខវិជ្ជាភាសាខ្មែររបស់សិស្សចំនួន 150 នាក់នៅសាលាបឋមសិក្សាមួយ។ គេទទួលបានព័ត៌មានថា មានសិស្សចំនួន 102 នាក់ ចូលចិត្តសិក្សាគណិតវិទ្យាចំនួន 71 នាក់ចូលចិត្តសិក្សាភាសាខ្មែរ និងចំនួន 40 នាក់ចូលចិត្តសិក្សាមុខវិជ្ជាទាំងពីរ ។

ក. តើមានសិស្សចំនួនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តសិក្សាតែមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាប៉ុណ្ណោះ ?

ខ. តើមានសិស្សចំនួនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តសិក្សាតែមុខវិជ្ជាភាសាខ្មែរប៉ុណ្ណោះ?

គ. តើមានសិស្សចំនួនប៉ុន្មាននាក់ដែលចូលចិត្តសិក្សាយ៉ាងហោចណាស់មួយមុខវិជ្ជា?

ឃ. តើមានសិស្សចំនួនប៉ុន្មាននាក់ដែលមិនចូលចិត្តសិក្សាមុខវិជ្ជាទាំងពីរ?

ចំពោះសំណួរ ក. គេសួររក $n(M \cap \bar{K})$

ដោយ $n(M) = n(M \cap K) + n(M \cap \bar{K})$ នោះ $n(M \cap \bar{K}) = 102 - 40 = \boxed{62}$ នាក់។

ចំពោះសំណួរ ខ. គេសួររក $n(K \cap \bar{M})$

ដោយ $n(K) = n(K \cap M) + n(K \cap \bar{M})$ នោះ $n(K \cap \bar{M}) = 71 - 40 = \boxed{31}$ នាក់។

ចំពោះសំណួរ គ. គេសួររក $n(M \cup K) = 133$ នាក់ (សម្រាយខាងលើ)។
ចំពោះសំណួរ ឃ. គេសួររក $n(\bar{M} \cap \bar{K}) = n(\overline{M \cup K}) = n(U) - n(M \cup K)$
$= 150 - 133 = \boxed{17}$ នាក់ ។

ផលគុណដេកាត (Cartesian Product)

គេមានពីរសំណុំ E និង F ។ ផលគុណដេកាតនៃពីរសំណុំ E និង F តាមលំដាប់នេះកំណត់ដោយ $E \times F = \{(x, y) | x \in E \wedge y \in F\}$ ។
ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណុំ $E = \{1,2,3\}$ និង $F = \{a, b\}$ ។
គេបាន $E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ ហើយ $n(E \times F) = 6$ ។

$F \times E = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$E \times E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$F \times F = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

ជាទូទៅ៖ $n(E \times F) = n(E) \times n(F)$ ។

បំណាំ៖ $(x, y) = (x', y')$ លុះត្រាតែ $x = x' \wedge y = y'$

$(x, y) \neq (x', y')$ លុះត្រាតែ $x \neq x' \vee y \neq y'$

$\{x, y\} = \{y, x\}$ (គ្មានលំដាប់)

ជាទូទៅ៖ គេឱ្យ n សំណុំ $E_1; E_2; \ldots; E_n$ ។ ផលគុណដេកាតនៃ n សំណុំនេះតាមលំដាប់តាងដោយ $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in E_i, \forall i = \overline{1, n}\}$។

ហើយ $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n$

និង $n(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = n(E_1) \times n(E_2) \times \cdots \times n(E_n)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេឱ្យ $A = \{1,2\}$ ។ កំណត់សំណុំ A^2 ; A^3 ។

គេបាន $A^2 = A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

និង $A^3 = A \times A \times A = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$ ។

លំហាត់

1. សរសេរគ្រប់ធាតុនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x = 4\}$

ខ. $B = \{y \in \mathbb{Z} | (y-1)(y+3)(2y+3)(y+5) = 0\}$

គ. $C = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3\}$

ឃ. $D = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3 \wedge x^2 - 3x = 4\}$

ង. $E = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x < 3 \wedge x^2 - 3x \neq 4\}$

ច. $F = \{x \in \mathbb{N} | x$ ជាចំនួនគត់សេសមានលេខតែ 1 ខ្ទង់$\}$

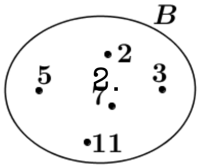
2. សរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមការរៀបរាប់ឈ្មោះ៖

ក. { ថ្ងៃទាំងអស់នៃសប្តាហ៍ }   ខ. { ចំនួនរាប់តូចជាង 6 }

គ. { អក្សរទាំងអស់ក្នុងពាក្យ "dictionary" } ។

3. សរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ៖

ក. $A = \{0,2,4,6,8,10,12\}$



គ. C = { Sunday, Saturday } ។

4. សរសេរធាតុនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $\{x : x(x+2)(x-1) = 0, x$ Î ¢$\}$

ខ. $\{x : x^2$ ³ x, x Î ¢$\}$

គ. $\{x : 0$ £ x £ $18, x$ គឺជាចំនួនបឋម$\}$

ឃ. $\{x : x$ ជាចំនួនគត់គូ ពហុគុណនៃ 5 តូចជាង 48$\}$

ង. { អក្សរទាំងអស់ក្នុងពាក្យ "mediterranean" }

ច. $\{x : x$ គឺជាចំនួនគត់វ៉ិឡាទីបតូចជាង 17 ហើយសេសពហុគុណនៃ 3$\}$ ។

5. សរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុ៖

ក. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ ខ. $B = \{1,3,5,7,9,$K$\}$

គ. $C = \{6,8,10,12,14,16\}$ ឃ. $D = \{5,10,15,20,$K$\}$

ង. $E = \{2,3,5,7,11,13,17\}$ ច. $F = \{3,6,9,12,15,18,$K$\}$

ឆ. $G = \{$K$,-3,-2,-1,0,1,2,3,$K$\}$ ជ. $H = \{12,18,24,30,$K$\}$ ។

6. សរសេរសំណុំខាងក្រោមតាមលក្ខណៈរួមនៃធាតុៈ

ក. $A = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ខ. $B = \{2,4,6,8\}$

គ. $C = \{2,4,6,8,10,12, \dots\}$ ឃ. $D = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$

ង. $E = \{0,1,8,27,64,125, \dots\}$ ច. $F = \{3,6,9,12,15,18, \dots\}$

ឆ. $G = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ជ. $H = \{12,18,24,30, \dots\}$ ។

7. គេឱ្យ $A = \{a, b, c\}$ ។ តើសំណើខាងក្រោមណាខ្លះដែលពិត ?

ក. $c \in A$ ខ. $b \subset A$ គ. $b \subseteq A$

ឃ. $\{a\} \subset A$ ង. $\{a\} \subseteq A$ ច. $\{a\} \in A$

ឆ. $\{a, c\} \subset A$ ជ. $\{a, c\} \subseteq A$ ឈ. $\{a, b, c\} \subset A$

ញ. $\{a, b, c\} \subseteq A$ ។

8. កំណត់ថាសំណុំនីមួយៗខាងក្រោមជាសំណុំទទេ ឬអត់។

ក. $A = \{$ នាយករដ្ឋមន្ត្រីស្រីក្នុងប្រទេសកម្ពុជា $\}$

ខ. $B = \{$ ចំនួនគត់ធម្មជាតិដែលអាចចែកបាននឹងសូន្យ $\}$

គ. $C = \{x : x^2 = -4$ និង x គឺជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ $\}$

ឃ. $D = \{x : 5x - 1 = 8 , x$ គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\}$

ង. $E = \{\emptyset\}$

ច. $F = \left\{x : \dfrac{x^2}{x} = x , x \right.$ គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\}$ ។

9. សរសេរគ្រប់សំណុំរងនៃសំណុំ $A = \{a, b\}$ និង $B = \{0, 1, 2\}$ ។

10. គេឱ្យ $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, \{2\}, A\}$ ។ តើសំណើខាងក្រោមណាខ្លះដែលពិត?

ក. $1 \in A$

ខ. $2 \in B$

គ. $\{2\} \subset B$

ឃ. $A \subset B$

ង. $2 \subset B$

ច. $\{2\} \subset B$

ឆ. $\{2\} \subset A$

ជ. $\{A\} \subset A$

ឈ. $\{A\} \subseteq B$

ញ.$A \in B$

ដ. $\{A\} \in B$

ឋ. $\{\{2\}\} \subseteq B$

ឌ.$\{1,2\} \in B$

ឍ. $\{\{1,2\}\} \subseteq B$ ។

11. គេឱ្យ $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ជាសំណុំសកល ហើយ $A = \{1,2,4,7\}$ និង $B = \{0,2,5,6,7,9\}$ ។ ចូរកំណត់សំណុំ៖

ក. $A \cap B$

ខ. $A \cup B$

គ. $A - B$

ឃ.$B - A$

ង. $A - (A - B)$

ច. $B - (A - B)$

ឆ. B'

ជ. $(A \cap B)'$

ឈ. $A \cap B'$

ញ.$(A \cup B)'$

ដ. $(A \cup B)' - (B - A)'$ ។

12. បើសំណុំ A មួយមានសំណុំរងផ្ទាល់ទាំងអស់ 63 ចូររកចំនួនធាតុនៃសំណុំ A ។

13. រកចំនួននៃសំណុំរងនៃសំណុំ A បើវាមាន 2^{3n-8} សំណុំរងចំពោះ $n(A) = n$ ។

14. តើសំណុំA មានប៉ុន្មានធាតុបើផលបូកនៃសំណុំរងជាមួយនឹងសំណុំរងផ្ទាល់របស់វាគឺ1023 ?

15. តើមានចំនួនប៉ុន្មានសំណុំរងនៃ $A = \{a,b,c,d\}$

ក. ដែលមិនមានធាតុ b ?

ខ. មានធាតុ c ?

គ. មិនមានធាតុ b និង c ?

16. រកចំនួននៃសំណុំរងដែលមានយ៉ាងតិចបួនធាតុនៃសំណុំមួយដែលមាន 6 ធាតុ។

17. បើ $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ តើមានប៉ុន្មានសំណុំរងដែលមាន ប្រាំធាតុនៃ A ផ្ទុកធាតុ 2,3 និង 8 ព្រមគ្នា?

18. កំណត់សំណុំទទេក្នុងសំណុំខាងក្រោម។

ក. $\{\emptyset\}$

ខ. $\{0\}$

គ. $\{x : x^2 = 9$ និង $x = 5, x \in \mathbb{R}\}$

ឃ. $\{n : n^2 < 0$ និង $n \in \mathbb{N}\}$

ង. { ភាវៈរស់ រស់នៅឋានព្រះចន្ទ }

ច. {x : - 25 £ x < - 1 , x Î ¥ }

ឆ. $\{x : x$ គឺជាចំនួនគត់គូមួយ និងជាចំនួនបឋម$\}$

ជ. {n : n² - n < 0 , n Î ¤ } ។

19. សរសេរសំណុំរង និងសំណុំរងផ្ទាល់នៃសំណុំខាងក្រោម។

ក. $\{\emptyset, \{\}\}$

ខ. {x : - 1 < x £ 3 , x Î ¢ }

គ. {x : 2x² - 1 = 31 , x Î ¢ }

ឃ. {x : x Î [1,5] , x Î ¢ }

ង. $\{1, \{2\}, a, \{1,2\}\}$

ច. {x : 0 £ x² £ 9 , x Î ¥ }

ឆ. $\{x : x \in [-1,3], x \in \mathbb{N}\}$

ជ. { អក្សរនៃពាក្យ "BOOK" } ។

20. តើសំណើខាងក្រោមណាដែលពិតគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ? បើពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ ហើយបើមិនពិតចូរឱ្យឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ។

ក. $A \cup A = A$

ខ. $(A')' = A$

គ. $B \cap B = B$

ឃ. $(A \cap B)' = A' \cap B'$

ង. $A - B = (B - A)'$

ច. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ ។

21. តើសំណើខាងក្រោមណាដែលពិតគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ? បើពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ ហើយបើមិនពិតចូរឱ្យឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ។

ក. បើ $A \cap B = \emptyset$ នោះ $A \subset B$

ខ. $B \times A = A \times B$

គ. $\emptyset \times A = \emptyset$

ឃ. $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

ង. $(A - B) \cup (B - A) = A - C$

ច. $(A - C) \cap (A - B) = A - (B \cup C)$

ឆ. $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$

ជ. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

ឈ. $A \times \emptyset = \emptyset$ ។

22. តើសំណើខាងក្រោមណាដែលពិតគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ? បើពិតចូរស្រាយបញ្ជាក់ ហើយបើមិនពិតចូរឱ្យឧទាហរណ៍ផ្ទុយ ។

ក. $P(A) \times P(A) = P(A^2)$

ខ. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

គ. $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$ ។

23. ចំពោះអំណះអំណាងខាងក្រោម ចូររកលក្ខខណ្ឌទូទៅសម្រាប់សំណុំ A និង B ដើម្បីឱ្យអំណះអំណាងនោះពិត ។

ក. $A \cup B = A$

ខ. $A \cup \emptyset = \emptyset$

គ. $A \cup B \subseteq A \cap B$

ឃ. $A \cap B = A$

ង. $B - A = \emptyset$

ច. $A \times B = B \times A$ ។

24. ចំពោះសំណុំរាប់អស់S យើងតាង $|S|$ ជាចំនួនធាតុនៃ S ។ បើ $|A| = 3$និង $|B| = 4$ចូររកៈ

ក. $|A \times B|$

ខ. $|A^2|$

គ. $|B^2|$

ឃ. តម្លៃអតិបរមានៃ $|A \cap B|$

ង. តម្លៃអប្បបរមានៃ $|A \cup B|$ ។

25. រកចំនួនធាតុនៃសំណុំ $A = \{x, 0,2,20, \{2,0\}, y, z, \{y, z\}\}$ ។

26. រកចំនួនធាតុនៃសំណុំ A បើផលបូកនៃសំណុំរង និងសំណុំរងផ្ទាល់គឺ 511 ។

27. តាង $A = \{a, b\}$ ហើយ $B = \{a, b, c, d, e\}$ ។ តើមានចំនួនសំណុំរងនៃ K ដែលអាចសរសេរ $A \subset K \subset B$ ចំនួនប៉ុន្មាន?

28. បើចំនួននៃសំណុំរងដែលមាន $3m + 1$ ធាតុគឺស្មើទៅនឹងចំនួននៃសំណុំរងជាមួយ $m + 3$ នៃសំណុំ A មួយជាមួយ 8 ធាតុ ចូររកតម្លៃ m ។

29. រកចំនួននៃសំណុំរងផ្ទាល់នៃសំណុំ A មួយបើចំនួននៃសំណុំរងគឺ 2^{2n-6} ។

30. តើមានសំណុំរងនៃ $A = \{4,5,6,7,8,9\}$ ប៉ុន្មានដែលផ្ទុកធាតុ $4, 5$ និង 6 ព្រមគ្នា?

31. គេឱ្យ $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ។ តើមានសំណុំរងប៉ុន្មាននៃ A ដែលមានយ៉ាងហោចណាស់ចំនួនសេសមួយ?

32. អក្សរនៃពាក្យ "MEDITERRANEAN" គឺជាធាតុនៃសំណុំ A មួយ។ រកគ្រប់សំណុំរងដែលរាប់បញ្ចូលយ៉ាងតិច ៤ ធាតុនៃសំណុំ A ។

33. គេឱ្យ $A = \{m, n, 0,1,10, \{1,0\}\}$ ។ រកចំនួននៃសំណុំរងដែលគ្មានធាតុ, 3 និង 5 ធាតុ រៀងគ្នា។

34. តើមានសំណុំរងនៃ $A = \{1,2,3,4,5\}$

ក. មិនមានធាតុ 1 ?

ខ. មិនមានធាតុ 1 និង 2 ព្រមគ្នា?

គ. មានធាតុ 1 និង 2 ព្រមគ្នា?

35. តើមានសំណុំរងនៃ $\{a, b, c, d, e, f\}$ មាន e និង f ព្រមគ្នា?

36. តើមានប៉ុន្មានសំណុំរងដែលមាន ៤ធាតុនៃ $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

ក. ផ្ទុក a និង c ព្រមគ្នា?

ខ. មិនមាន a និង c ព្រមគ្នា?

37. រកចំនួននៃសំណុំរងតិចជាង ៣ធាតុ ចំពោះសំណុំមួយដែលមាន ៦ ធាតុ។

38. សម្រាប់សំណុំ A ជាមួយ n ធាតុ

ក. បើចំនួននៃធាតុនៃ A ត្រូវបានបង្កើនដោយ 2 តើនឹងទៅជាយ៉ាងណាចំនួននៃសំណុំរង?

ខ. បើចំនួននៃធាតុនៃ A ត្រូវបានបន្ថយដោយ 2 តើនឹងទៅជាយ៉ាងណាចំនួននៃសំណុំរង?

39. គេឱ្យ $A = \{0\}$; $B = \{0, A\}$ និង $C = \{0, \{0\}, \{A\}\}$ ។ ចូរកំណត់៖

ក. $A \cap B$

ខ. $A \cup B$

គ. $B - A$

ឃ. $A \cap (B \cup C)$

ង. $(B \cup C) - A$

ច. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ឆ. $(C - B) - A$

ជ. $A \cap (C - A)$ ។

40. បើ $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{0,1\}$ ។ ចូរសរសេរបញ្ជីធាតុនៃ $A \times B$ និង $B \times A$ ។

41. បើ $C = \{a, b\}$; $D = \{a, b, g, q\}$ និង $E = \{a, c, d\}$ ។ តើសំណុំនីមួយៗដូចខាងក្រោមមានប៉ុន្មានធាតុ ?

ក. $C \times D \times E$ ខ. $C \times (D \cap E)$ គ. $D \times (C \cap E)$

ឃ. $D \cap (C \times E)$ ង. $(C \cup D) \times (C \times E)$ ច. $(C \times E) \cap (E \times C)$ ។

42. បង្ហាញថា $(A \cap B) \subseteq A$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

43. បង្ហាញថា $A \subseteq (A \cup B)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

44. បង្ហាញថា $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

45. បង្ហាញថា $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

46. បង្ហាញថា បើ $A \cup B = A - B$ នោះ $B = \emptyset$ ។ (ណែនាំ៖ ស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម) ។

47. បង្ហាញថា បើ $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$ នោះ $A \cap B = \emptyset$ ។ (ណែនាំ៖ ស្រាយតាមសំណើផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម) ។

48. បង្ហាញថា បើ $C \subseteq B - A$ នោះ $A \cap C = \emptyset$ ។

49. បង្ហាញថា បើ $(A - B) \cup B = A$ នោះ $B \subseteq A$ ។

50. បង្ហាញថា $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cap B' = \emptyset$ ។

51. បង្ហាញថា $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ លុះត្រាតែ $C \subseteq A$ ។

52. ក. គូសដ្យាក្រាមវិនតាងឱ្យ $A\Delta B$ ។

ខ. កំណត់សំណុំ $A\Delta B$ បើ $A = \{3,5,7,9\}$ និង $B = \{2,3,4,5,6\}$ ។

គ. បង្ហាញថា $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

53. ក. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ចូរកំណត់សំណុំ $A\Delta A$ និង $\emptyset \Delta A$ ។

ខ. បង្ហាញថា $A\Delta B = B\Delta A$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។

គ. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A , B និង C បង្ហាញថា $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ ។

54. គេមាន A និង B ជាពីរសំណុំរងនៃសំណុំសកល S ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ឯកលក្ខណៈភាពនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ខ. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

គ. $A \cup (B \cap A) = A$ ឃ. $(A \cap B')' \cup B = A' \cup B$

ង. $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ ច. $[A \cap (B \cup C)]' = A' \cup (B' \cap C')$ ។

55. គេមាន A ; B និង C ជាបីសំណុំរងនៃសំណុំសកល S ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ឯកលក្ខណៈភាពនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

ខ.$\{[(A \cap C) \cap B] \cup [(A \cap C) \cap B']\} \cup (A \cap C)' = S$

គ. $(A \cup C) \cap [(A \cap B) \cup (C' \cap B)] = A \cap B$ ។

56. A គឺជាសំណុំរងមួយនៃសំណុំសកល S ។ បង្ហាញឯកលក្ខណៈភាពខាងក្រោម៖

ក. $A \cup A = A$ ខ. $A \cap A = A$ គ. $A \cap \emptyset = \emptyset$

ឃ. $A \cup S = S$ ង. $(A')' = A$ ។

57. គេមាន A ; B និង C ជាបីសំណុំរងនៃសំណុំសកល S ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ឯកលក្ខណៈភាពនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $A \cap (B \cup A') = B \cap A$

ខ.$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

គ. $(A - B) - C = (A - C) - B$ ។

58. គេមាន A ; B និង C ជាបីសំណុំរងនៃសំណុំសកល S ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ឯកលក្ខណៈភាពនៃសំណុំខាងក្រោម៖

ក. $[(A' \cup B') \cap A']' = A$

ខ.$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

គ. $A - (A - B) = A \cap B$

ឃ. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ។

59. បង្ហាញថាចំពោះសំណុំរង $A_1, A_2, \ldots, A_n$ និង B នៃសំណុំ S ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈបំបែកទូទៅដែល $n \geq 2$ ។

ក.$B \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = (B \cup A_1) \cap (B \cup A_2) \cap \cdots \cap (B \cup A_n)$

ខ. $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$ ។

60. បង្ហាញថាចំពោះសំណុំរង $A_1, A_2, \ldots, A_n$ និង B នៃសំណុំ S ផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខណៈ De Morgan ដែល $n \geq 2$ ។

ក.$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)' = A'_1 \cup A'_2 \cup \cdots \cup A'_n$

ខ. $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A'_1 \cap A'_2 \cap \cdots \cap A'_n$ ។

61. បើ $I = \{1,2,3,4,\ldots\}$ គេតាង $\cup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ ជាគ្រួសារប្រជុំ និង $\cap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$ ជាគ្រួសារប្រសព្វ ។

ក. គេឱ្យ $A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$ ជាចន្លោះរងបើកនៃ ¡ ហើយ $i \in I = \{1,2,3,4,\dots\}$ ។
ចូរកំណត់ $\bigcup_{i\in I} A_i$ និង $\bigcap_{i\in I} A_i$។

ខ. គេឱ្យ $A_i = \left[-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right]$ ជាចន្លោះរងបិទនៃ ¡ ហើយ $i \in I = \{1,2,3,4,\dots\}$ ។
ចូរកំណត់ $\bigcup_{i\in I} A_i$ និង $\bigcap_{i\in I} A_i$។

ហាងលក់តែមួយមានលក់តែបីប្រភេទ គឺ broccoli , carrots និង okra ។ ថ្ងៃមួយមានភ្ញៀវ 207 នាក់ បានទិញតែពីហាងនោះ ។ បើ 114 នាក់ទិញ broccoli , 152 នាក់ទិញ carrots , 25 នាក់ ទិញ okra , 64 នាក់ទិញ broccoli និង carrots , 12 នាក់ ទិញ carrots និង okra ហើយ 9 នាក់ ទិញទាំងបីប្រភេទ ។ តើមានអតិថិជនប៉ុន្មាននាក់ដែលទិញ broccoli និង okra ?

មេរៀនទី៣៖ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ

៣.១.ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំមួយទៅសំណុំមួយ

៣.១.១.និយមន័យ

គេមានពីរសំណុំ A និង B ។ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ជាសំណុំរងនៃ $A \times B$ ។

- បើ $(x, y) \in \rho$ នោះគេថា x ទាក់ទង y តាមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ និងកំណត់សរសេរដោយ $x\rho y$ ។ គេបាន $\rho = \{(x, y) \in A \times B | x\rho y\}$ ។

A ហៅថាសំណុំ ដើមនៃទំនាក់ទំនង

B ហៅថាសំណុំចុង ឬសំណុំរូបភាពនៃទំនាក់ទំនង

- បើ $(x, y) \notin \rho$ នោះគេថា x មិនទាក់ទង y តាមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ r និងកំណត់សរសេរដោយ $x\not\rho y$ ។

- បើ r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពី A ទៅ A នោះគេថា ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ A ។

៣.១.២.ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាព(Domain and Range)

- ដែនកំណត់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ r គឺជាសំណុំ D នៃធាតុ x ទាំងឡាយរបស់ A ដែលមានធាតុ $y \in B$ ហើយ $x\rho y$ ។ បានន័យថាជាសំណុំនៃធាតុទី១ ក្នុងគូ (x, y) ដែល $x\rho y$ ។

គេសរសេរ $D = \{x \in A | \exists y \in B, x\rho y\}$ ។

- សំណុំរូបភាពនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ គឺជាសំណុំ I នៃធាតុ y ទាំងឡាយរបស់ B ដែលមានធាតុ $x \in A$ ហើយ $x\rho y$ ។ បាននន័យថាជាសំណុំនៃធាតុទី២ ក្នុងគូ (x, y) ដែល $x\rho y$ ។

គេសរសេរ $I = \{y \in B | \exists x \in A, x\rho y\}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow x + y < 4$ ។ គេបាន $\rho = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ ។

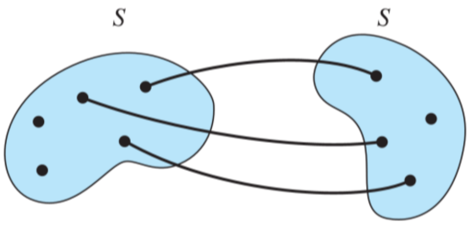
ដែនកំណត់គឺ $D = \{1,2\}$ និងសំណុំរូបភាពគឺ $I = \{1,2\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow 2x + 3y = 10$ ។ គេបាន $\rho = \{(2,2)\}$ ។ ដែនកំណត់គឺ $D = \{2\}$ និងសំណុំរូបភាពគឺ $I = \{2\}$ ។

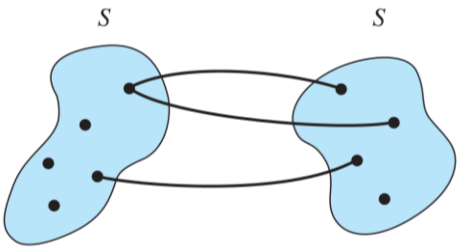
ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ កំណត់ដោយ $\rho = \{(1,2)(1,3), (2,3)\}$ ។ គេបាន $1r2$; $1r3$; $2r3$ ប៉ុន្តែ $1r1$; $2r2$; K ។ ដែនកំណត់គឺ $D = \{1,2\}$ និងសំណុំរូបភាពគឺ $I = \{2,3\}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំចំនួនពិត $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$។
ដែនកំណត់គឺ $D = [-1,1]$ និងសំណុំរូបភាពគឺ $I = [-1,1]$ ។

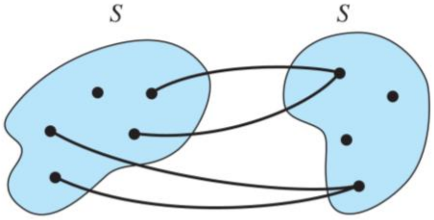
ប្រភេទនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ S មាន៖



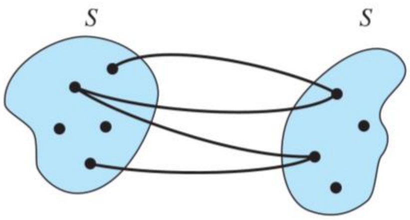
មួយទៅមួយ



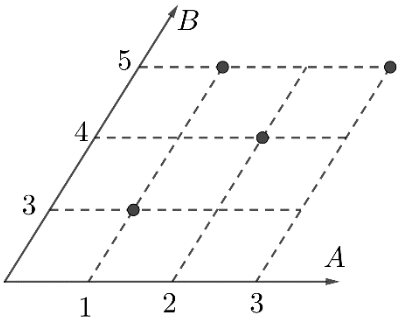
មួយទៅច្រើន



ច្រើនទៅមួយ



ច្រើនទៅច្រើន



ការតាងរូបភាពនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុជាទូទៅគេតាងរូបភាព (ក្រាប) ដោយសរសេរគូទាំងឡាយដែលមាននៅក្នុង ρ តាមបីរបៀប៖

ឧទាហរណ៍១៖ គូសក្រាបតាងឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ ទៅ $B = \{3,4,5\}$ ដែល $\rho = \{(1,3),(1,5),(2,4),(3,5)\}$ ។

របៀបទី១ (ដ្យាក្រាមកូអរដោនេ)តាងធាតុនៃសំណុំ A ជាចំណុចលើអ័ក្សដេក និងធាតុនៃសំណុំ B ជាចំណុចនៅលើអ័ក្សឈរ ហើយធាតុនៃសំណុំ $A \times B$ ជាចំណុចប្រសព្វនៃចំណោល

ស្រប និងអ័ក្សទាំងពីរដែល កាត់តាមចំណុចតាងឱ្យធាតុនៃ A និង B ។ ការតាងនេះហៅថា ដ្យាក្រាមកូអរដោនេនៃ $A\times B$ ។ ចំណែកក្រាប ρ តាងដោយចំណុចនៃ $A\times B$ ដែលជាធាតុរបស់ ρ ។

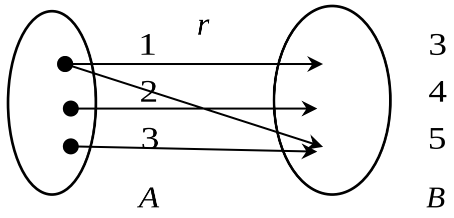
របៀបទី២ (ម៉ាទ្រីសនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ)តាងដោយចតុកោណកែង ដែលក្នុងនោះជួរដេកត្រូវបានតម្រៀបដោយធាតុនៃសំណុំ A និងជួរឈរត្រូវបានតម្រៀបដោយធាតុនៃសំណុំ B ។ ដាក់លេខ 1 ឬ 0 ក្នុងទីតាំងដែលធាតុ $x\in A$ ទាក់ទង ឬមិនទាក់ទងទៅនឹងធាតុ $y\in B$ ។ ការតាងរបៀបនេះហៅថា ម៉ាទ្រីសនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ។

	3	4	5
1	1	0	1
2	0	1	0
3	0	0	1

ឬ

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

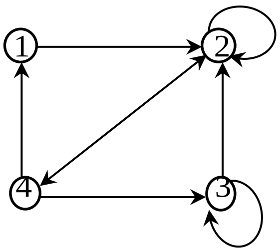
របៀបទី៣ (ដ្យាក្រាមព្រួញ)តាងដោយចុះធាតុនៃសំណុំ A និងធាតុនៃសំណុំ B ក្នុងថាសពីរដាច់ពីគ្នា រួចគូសព្រួញពីធាតុ$x\in A$ ទៅធាតុ $y\in B$ ដែលទាក់ទងគ្នាតាមទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ។ ការតាងនេះហៅថាដ្យាក្រាមព្រួញនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ។



គេមានមួយរបៀបទៀតដើម្បីតាងក្រាបឱ្យទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ បើវាជាទំនាក់ទំនងលើ

សំណុំរាប់អស់ A ។ គេសរសេរធាតុទាំងអស់នៃសំណុំ រួចគូសព្រួញពីធាតុ x ទៅធាតុ y ដែល$x\rho y$ ការតាងនេះហៅថា ក្រាបមានទិសដៅនៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ លើសំណុំ $A=\{1,2,3,4\}$ ដែល $\rho=\{(1,2),(2,2),(2,4),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ ។



៣.២.ទំនាក់ទំនងច្រាស (Inverse Relations)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ។ គេហៅថាទំនាក់ទំនងច្រាសនៃ ρ តាងដោយ ρ^{-1} គឺជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ B ទៅសំណុំ A ដែលជាសំណុំនៃគូ (y,x) ដែល $(x,y)\in\rho$ ។

គេសរសេរ $\rho^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in\rho\}$ ឬ $"x \hat{I} A,"y \hat{I} B : xry$ លុះត្រាតែ $y\rho^{-1}x$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើសំណុំ $A=\{1,2,3\}$ ដោយ $\rho=\{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1)\}$ គេបាន $\rho^{-1}=\{(2,1),(2,2),(3,2),(1,3)\}$ ។

ម៉ាទ្រីសនៃ ρ និង ρ^{-1} គឺ $M_\rho=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ និង $M_{\rho^{-1}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើសំណុំ $A=\{1,2,3,4,5\}$ ដោយ $x\rho y\Leftrightarrow x^2+y=6$ គេបាន $\rho=\{(1,5),(2,2)\}$ ព្រោះ

- បើ $x = 1 \Rightarrow y = 6 - 1 = 5$

- បើ $x = 2 \Rightarrow y = 6 - 4 = 2$

- បើ $x \geq 3$ នោះ $x^2 + y \geq 9 + y \geq 10$

គេបាន $\rho^{-1} = \{(5,1), (2,2)\}$ និង ម៉ាទ្រីសនៃ ρ និង ρ^{-1} គឺ៖

$$M_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ និង } M_{\rho^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ។}$$

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមាន $\mathbb{N}$ ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + 2y = 40$ គេបាន $\rho = \{(2,18), (4,12), (6,2)\}$ និង $\rho^{-1} = \{(18,2), (12,4), (2,6)\}$ ។

- ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃ ρ គឺ $D_\rho = \{2,4,6\}$ និង $I_\rho = \{18,12,2\}$ រៀងគ្នា ។

- ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃ ρ^{-1} គឺ $D_{\rho^{-1}} = \{18,12,2\}$ និង $I_{\rho^{-1}} = \{2,4,6\}$ រៀងគ្នា ។

បណ្ដាក់នៃទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ (Composition of relations)

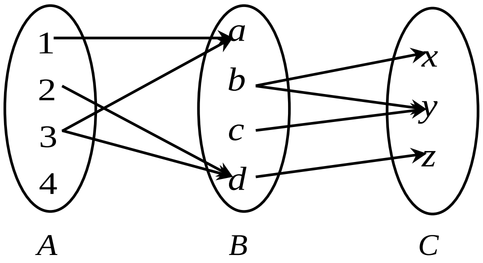
និយមន័យ៖ គេឱ្យបីសំណុំ A, B, C និងទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ពីសំណុំ A ទៅសំណុំ B ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ σ ពីសំណុំ B ទៅសំណុំ C ។ ពីទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ និង σ គេបង្កើតបានទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ A ទៅសំណុំ C កំណត់សរសេរដោយ $\rho \circ \sigma$ និងកំណត់ដោយ $(x,z) \in \rho \circ \sigma$ បើមាន $y \in B$ ដែល $(x,y) \in \rho$ និង $(y,z) \in \sigma$ ។ គេបាន $\rho \circ \sigma = \{(x,z) | \exists y \in B, (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \sigma\}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យសំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{a,b,c,d\}$ និង $C = \{x,y,z\}$ ។ មានទំនាក់ទំនង ρ និង σ កំណត់ពីសំណុំ A ទៅ B និងពីសំណុំ B ទៅ C រៀងគ្នា កំណត់ដោយ $\rho = \{(1,a), (2,d), (3,a), (3,d)\}$ និង $\sigma = \{(b,x), (b,y), (c,y), (d,z)\}$ ។

នោះគេបាន $(2,z) \in \rho \circ \sigma$ ព្រោះ $\exists d \in B$ ដែល $(2,d) \in \rho \wedge (d,z) \in \sigma$

ហើយ $(3,z) \in \rho \circ \sigma$ ព្រោះ $\exists d \in B$ ដែល $(3,d) \in \rho \wedge (d,z) \in \sigma$

ដូច្នេះ $\boxed{\rho \circ \sigma = \{(2,z),(3,z)\}}$ ។



បកស្រាយតាមដ្យាក្រាមព្រួញ

$$M_\rho = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \& \quad M_\sigma = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow M_{\rho\circ\sigma} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

បកស្រាយតាមម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យពីរទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ $\rho = \{(1,u),(1,v),(2,w),(3,w)\}$ និង

$\sigma = \{(u,1),(v,2),(v,3),(x,4),(y,1),(y,4)\}$ ។

- ចំពោះទំនាក់ទំនង ρ គេបាន $D_\rho = \{1,2,3\}$ និង $I_\rho = \{u,v,w\}$
- ចំពោះទំនាក់ទំនង σ គេបាន $D_\sigma = \{u,v,w,x,y\}$ និង $I_\sigma = \{1,2,3,4\}$

គេបាន៖

ក. ទំនាក់ទំនង $\rho \circ \sigma$ មាន $D_{\rho\circ\sigma} = \{1,2,3\}$ និង $I_{\rho\circ\sigma} = \{1,2,3,4\}$

ហើយ $\rho \circ \sigma = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,3)\}$ ។

ខ. ទំនាក់ទំនង $\sigma \circ \rho$ មាន $D_{\sigma\circ\rho} = \{u,v,w,x,y\}$ និង $I_{\sigma\circ\rho} = \{u,v,w\}$

ហើយ $\sigma \circ \rho = \{(u,u),(u,v),(v,w),(w,w),(y,u),(y,v)\}$ ។

ចំណាំ៖ ដែនកំណត់នៃ $D_{\rho\circ\sigma} \subseteq D_\sigma$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេមាន $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,5),(3,4)\}$ និង $\sigma = \{(1,6),(2,1),(4,0)\}$ ។

គេបាន $r \text{ o } s = \{(1,6),(1,1),(3,0)\}$; $s \text{ o } r = \{(2,1),(2,2)\}$

$\rho \circ \rho = \{(1,1),(1,2),(1,5)\}$ និង $\sigma \circ \sigma = \{(2,6)\}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេមាន r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ កំណត់ដោយ

គូមានលំដាប់ $(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)$ ។

គេបាន $\rho^2 = \rho \circ \rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\rho^3 = \rho^2 \circ \rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

និង $\rho^4 = \rho \circ \rho \circ \rho \circ \rho = \rho^3$ ព្រោះ ρ^3 មានគ្រប់ធាតុនៃសំណុំ $A \times A$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ គេមាន r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ កំណត់ដោយ

គូមានលំដាប់ $(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2)$ ។

គេបាន $\rho^{-1} = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(2,3)\}$

នោះ $\rho \circ \rho^{-1} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\rho^{-1} \circ \rho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ ។

ឧទាហរណ៍៦៖ គេមាន ρ និង s ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ កំណត់

ដោយ $\rho = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ និង $\sigma = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

គេបាន $r^{-1} = \{(1,1),(1,2),(3,2),(2,3)\}$; $s^{-1} = \{(2,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$

$\sigma^{-1} \circ \rho^{-1} = \{(2,1),(2,2),(1,3),(3,2),(2,3)\}$

$\rho \circ \sigma = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

ហើយ $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \{(2,1),(2,2),(3,2),(1,3),(2,3)\}$ ។

សង្កេត៖ $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ១៖ គេឱ្យបួនសំណុំ A, B, C, D និង ρ, σ, τ ជាបីទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពី A ទៅ B , ពី B ទៅ C , ពី C ទៅ D រៀងគ្នា ។

គេបាន $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$ ។

សម្រាយ៖

- ចំពោះ $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \{(x,t) \in A \times D | \exists z \in C, (x,z) \in \rho \circ \sigma \wedge (z,t) \in \tau\}$

$= \{(x,t) \in A \times D | \exists z \in C, (\exists y \in B, (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \sigma) \wedge (z,t) \in \tau\}$

$= \{(x,t) \in A \times D | \exists y \in B, \exists z \in C, (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \sigma \wedge (z,t) \in \tau\}$

- ចំពោះ $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = \{(x,t) \in A \times D | \exists y \in B, (x,y) \in \rho \wedge (y,t) \in \sigma \circ \tau\}$

$= \{(x,t) \in A \times D | \exists y \in B, (x,y) \in \rho \wedge (\exists z \in C, (y,z) \in \sigma \wedge (z,t) \in \tau)\}$

$$= \{(x,t) \in A \times D | \exists y \in B, \exists z \in C, (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \sigma \wedge (z,t) \in \tau\}$$

ដូចនេះ $\boxed{(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)}$ ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ ។

ទ្រឹស្តីបទ២៖ គេឱ្យបីសំណុំ A, B, C និង ρ, σ ជាពីរទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុពី A ទៅ B , ពី B ទៅ C រៀងគ្នា ។ គេបាន $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$ ។

សម្រាយ៖ (ទុកជាលំហាត់)

លក្ខណៈទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ (Properties of relations) គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុលើសំណុំ A ។ គេបានលក្ខណៈមួយចំនួននៃ ρ មាន៖

ក. លក្ខណៈខ្លួនឯង (Reflexive)

ρ មានលក្ខណៈខ្លួនឯងលើសំណុំ A លុះត្រាតែ "x Î $A : (x,x)$ Î r ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ គេបាន៖

ក.ទំនាក់ទំនង $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង

ខ.ទំនាក់ទំនង $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង

គ.ទំនាក់ទំនង $\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(3,3)\}$មិនមានលក្ខណៈខ្លួនឯងទេ ។

ខ. លក្ខណៈឆ្លុះ (Symmetric)

ρ មានលក្ខណៈឆ្លុះលើសំណុំ A លុះត្រាតែ $\forall x, y \in A$ បើ $(x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ គេបានទំនាក់ទំនង៖

ក. $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះ

ខ. $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$ មិនមានលក្ខណៈឆ្លុះទេ

គ. $\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(3,3)\}$ មិនមានលក្ខណៈឆ្លុះទេ

ឃ. $\rho_4 = \{\}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះ ព្រោះ បើ $(x,y) \in \rho_4$ នោះ $(y,x) \in \rho_4$ ពិតតាមតក្កវិទ្យា (ពេលសំណើ p មិនពិត គេបាន $p \Rightarrow q$ ជាសំណើពិត) ។

គ. លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ (Anti Symmetric)

ρ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើលើសំណុំ A លុះត្រាតែ $\forall x, y \in A$ បើ $(x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho \Rightarrow x = y$ ។

ឧទាហរណ៍៖ គេមានសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ គេបានទំនាក់ទំនង៖

ក. $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ

ខ. $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ មិនមានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើទេ

ព្រោះ $(1,2) \in \rho_2 \wedge (2,1) \in \rho_2$ តែ $1 \neq 2$ ។

គ. $r_3 = \{(1,1),(1,2),(3,3)\}$ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ

ឃ. លក្ខណៈឆ្លង (Transitive)

ρ មានលក្ខណៈឆ្លងលើសំណុំ A លុះត្រាតែ $\forall x, y, z \in A$ បើ $(x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមានសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ គេបានទំនាក់ទំនង៖

ក. $\rho_1 = \{(1,1),(2,2),(3,1)\}$ មានលក្ខណៈឆ្លង

ខ. $\rho_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ មានលក្ខណៈឆ្លង

គ. $\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,3)\}$ មិនមានលក្ខណៈឆ្លងទេ ព្រោះ

$(1,2) \in \rho_3 \wedge (2,3) \in \rho_3$ តែ $(1,3) \notin \rho_3$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $P(U)$ (គ្រួសារសំណុំរងទាំងអស់នៃ U) "A,B Î 𝒫(U) : ArB Û A Í B ។

- ទំនាក់ទំនង r មានលក្ខណៈខ្លួនឯង ព្រោះ $\forall A \in P(U)$ គេបាន $A \subseteq A$ មានន័យថា "A Î 𝒫(A) : (A,A) Î r ។

- ទំនាក់ទំនង r គ្មានលក្ខណៈឆ្លុះទេ ព្រោះ $\forall A, B \in P(U)$ បើ $A \subseteq B$ ជាទូទៅគេមិនសុទ្ធតែបាន $B \subseteq A$ ទេ មានន័យថា $(A, B) \in \rho \nRightarrow (B, A) \in \rho$ ។

- ទំនាក់ទំនង ρ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ ព្រោះ $\forall A, B \in P(U)$ បើ $A \subseteq B$ និង $B \subseteq A$ នោះគេបាន $A = B$ មានន័យថា $(A, B) \in \rho \wedge (B, A) \in \rho \Rightarrow A = B$ ។

- ទំនាក់ទំនង ρ មានលក្ខណៈឆ្លង ព្រោះ $\forall A, B, C \in P(U)$ បើ $A \subseteq B$ និង $B \subseteq C$ នោះគេបាន $A \subseteq C$ មានន័យថា $(A, B) \in \rho \wedge (B, C) \in \rho \Rightarrow (A, C) \in \rho$ ។

៣.៣.ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ និងទំនាក់ទំនង n ធាតុ(Ternary and n-ary relations)

ក. និយមន័យ

ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ ជាសំណុំនៃត្រីធាតុមានលំដាប់ ។ ជាពិសេសបើ S ជាសំណុំមួយនោះគេបានសំណុំរងនៃ S^3 ជាទំនាក់ទំនងត្រីធាតុលើ S ។

ឧទាហរណ៍១៖ លើសំណុំ $\mathbb{R}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ σ មួយដែលមានធាតុ (x, y, z) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ។ គេបាន ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ σ ជាសំណុំនៃត្រីធាតុ (x, y, z) ដែលជាកូអរដោនេនៃចំណុចនៅលើស្វ៊ែរកាំ $r = 1$ និង មានផ្ចិតជាគល់នៃតំរុយ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ លើសំណុំ $A = \{1,2,3,4, \dots ,14,15\}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងត្រីធាតុ ρ មួយ

ដែលមានធាតុ (x, y, z) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $x^2 + 5z = y$ ។ គេបានទំនាក់ទំនង $\rho = \{(1,6,1), (1,11,2), (2,9,1), (2,14,2), (3,14,1)\}$ ។

ខ. និយមន័យ

ទំនាក់ទំនង n ធាតុ ជាសំណុំនៃ n ធាតុមានលំដាប់ ។ ជាពិសេសបើ S ជាសំណុំមួយនោះ គេបានសំណុំរងនៃ S^n ជាទំនាក់ទំនង n ធាតុលើ S ។

ឧទាហរណ៍៖ លើសំណុំ $A = \{1,2,3,4, \dots ,14,15\}$ គេកំណត់ទំនាក់ទំនងចតុធាតុ ρ មួយដែលមានធាតុ (x,y,z,t) ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $4x + 5y + z^2 = t$ ។ គេបានទំនាក់ទំនង $\rho = \{(1,1,1,10), (1,1,2,13), (1,2,1,15), (2,1,1,14)\}$ ។

ទំនាក់ទំនងសមមូល (Equivalence relations)

និយមន័យ៖ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ កំណត់លើសំណុំ A ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលុះត្រាតែ ρ មាន៖

i- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in A : x\rho x$

ii- លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x,y \in A : x\rho y \Rightarrow y\rho x$

iii- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x,y,z \in A : (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$

ក្នុងករណី ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំ A គេជំនួសការសរសេរ $x\rho y$ ដោយ $x \equiv y (\bmod \rho)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ $A = \{1,2,3,4,5\}$ និង $\rho = \{(a,b) \in A^2 | a + b$ ជាចំនួនគត់គូ $\}$ ជាទំនាក់ទ្វេធាតុមួយលើ A ។ បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

គេបាន $\rho = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,4), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

i- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in A$ គេមាន $x + x = 2x$ ជាចំនួនគត់គូ មានន័យថា $\forall x \in A : x\rho x$ ។

ii- លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in A$ បើ $x\rho y$ នោះ $x + y$ ជាចំនួនគត់គូ

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + y = 2k \Rightarrow y + x = 2k$

$\Rightarrow y + x$ ជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow y\rho x$ ។

iii- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in A$ បើ $\begin{cases} x\rho y \\ y\rho z \end{cases}$ នោះ $x + y$ និង $y + z$ ជាចំនួនគត់គូ

$$\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x + y = 2k \\ y + z = 2k' \end{cases}$$

$\Rightarrow (x + y) - (y + z) = 2k - 2k'$

$\Rightarrow x + z = 2(k + k'), k + k' \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x + z$ ជាចំនួនគត់គូ $\Rightarrow x\rho z$

គេបាន ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ A និងកំណត់សរសេរដោយ $x \equiv y (\mathrm{mod}\, r)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{Z}$ ដែល $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\rho y$ លុះត្រាតែ $p | x - y, p \in \mathbb{N}$ ។

គេបាន ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលព្រោះ៖

i- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{Z}$ គេមាន $x - x = 0 \cdot p$ គេបាន $p | x - x$ មានន័យថា $\forall x \in \mathbb{Z} : x\rho x$ ។

ii- លក្ខណៈឆ្លុះ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ បើ $x\rho y$ នោះ $p | x - y$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = p \cdot k$

$\Rightarrow y - x = p(-k), -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p | y - x \Rightarrow y\rho x$

iii- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ បើ $\begin{cases} x\rho y \\ y\rho z \end{cases}$ នោះ $\begin{cases} p|x-y \\ p|y-z \end{cases}$

$$\Rightarrow \exists k,k' \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x - y = p \cdot k \\ y - z = p \cdot k' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - y) + (y - z) = p \cdot k + p \cdot k'$$

$$\Rightarrow x - z = p(k + k'), k + k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow p \mid x - z \Rightarrow x \rho z$$

គេបាន ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{Z}$ និងកំណត់សរសេរដោយ $x \equiv y (\bmod \rho)$ ឬ $x \equiv y (\bmod p)$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យ : ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathbb{R}$ ដែល $\forall x,y \in \mathbb{R} : x : y$ លុះត្រាតែ $x < y$ ។ តើ : ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ឬទេ ?

i- លក្ខណៈខ្លួនឯង៖ $\forall x \in \mathbb{R}$ គេបាន $x < x$ មិនពិត មានន័យថា $x \not< x$
ទំនាក់ទំនង : គ្មានលក្ខណៈខ្លួនឯងទេ ។
ដូចនេះ : មិនមែនជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ $\mathbb{R}$ ទេ ។

៣.៤.ទំនាក់ទំនងសមមូល និងបំណែក (Equivalence relation and partitions)

ក. ថ្នាក់សមមូល (Equivalence Classes)

និយមន័យ៖ ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើសំណុំមិនទទេ A ។ $a \in A$ គេបានថ្នាក់ a តាមទំនាក់ទំនងសមមូល ρ គឺជាសំណុំនៃធាតុ $x \in A$ ដែលសមមូលនឹង a តាម ρ ។

គេកំណត់សរសេរដោយ a° ឬ $\mathrm{Cl}(a)$ ឬ $[a]$ ឬ $\bar{a}$ ។

ដូចនេះ គេបាន $\bar{a} = \{x \in A | a\rho x\}$ ឬ $x \in [a] \Leftrightarrow x\rho a$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ នៅលើ $A = \{1,2,3,4,5\}$ យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ ρ ដោយ $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(4,5),(5,4)\}$ ។

គេបាន ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ A (ស្រាយខ្លួនឯង) ។

- ថ្នាក់សមមូលនៃ 1 គឺ $[1] = \{1,2\}$ ព្រោះ $(1,1) \in \rho$ និង $(1,2) \in \rho$

- ថ្នាក់សមមូលនៃ 2 គឺ $[2] = \{1,2\}$ ព្រោះ $(2,1) \in \rho$ និង $(2,2) \in \rho$

- ថ្នាក់សមមូលនៃ 3 គឺ $[3] = \{3\}$ ព្រោះ $(3,3) \in \rho$

- ថ្នាក់សមមូលនៃ 4 គឺ $[4] = \{4,5\}$ ព្រោះ $(4,4) \in \rho$ និង $(4,5) \in \rho$

- ថ្នាក់សមមូលនៃ 5 គឺ $[5] = \{4,5\}$ ព្រោះ $(5,4) \in \rho$ និង $(5,5) \in \rho$

ឧទាហរណ៍២៖ នៅលើ $\mathbb{Z}$ យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុ ρ ដោយ "x,y Î ¢ $: xry \Leftrightarrow 5|x-y$ ។

គេបាន r ជាទំនាក់ទំនងសមមូល (ស្រាយខ្លួនឯង) ។

គ្រប់ $a \in \mathbb{Z}$ គេបាន $[a] = \{x \in \mathbb{Z} | x\rho a] = \{x \in \mathbb{Z} | 5|x-a\}$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x - a = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{Z} | x = 5k + a, k \in \mathbb{Z}\}$$

-បើ$a = 0 \Rightarrow [0] = \{x \in \mathbb{Z} | x = 5k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$

-បើ$a = 1 \Rightarrow [1] = \{x \in \mathbb{Z} | x = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$

-បើ$a=2\Rightarrow[2]=\{x\in\mathbb{Z}|x=5k+2,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-8,-3,2,7,12,\dots\}$

-បើ$a=3\Rightarrow[3]=\{x\in\mathbb{Z}|x=5k+3,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-7,-2,3,8,13,\dots\}$

-បើ$a=4\Rightarrow[4]=\{x\in\mathbb{Z}|x=5k+4,k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-6,-1,4,9,14,\dots\}$

សំណើ១៖ បើ $x\in[a]$ នោះគេបាន $[x]$ និង $[a]$ ជាថ្នាក់តែមួយ និងផ្ទុយមកវិញ ។[1]
សម្រាយ

-បើ$x\in[a]$ ស្រាយថា $[x]=[a]$

$$\left.\begin{matrix}\forall y\in[x]\Leftrightarrow y\rho x\\ Et x\in[a]\Leftrightarrow x\rho a\end{matrix}\right\}\Rightarrow y\rho a\Rightarrow y\in[a]\Rightarrow[x]\subseteq[a](1)$$

ម្យ៉ាងទៀត $\left.\begin{matrix}\forall y\in[a]\Leftrightarrow y\rho a\\ Et x\in[a]\Leftrightarrow a\rho x\end{matrix}\right\}\Rightarrow y\rho x\Rightarrow y\in[x]\Rightarrow[a]\subseteq[x](2)$

តាម (1) និង (2) គេបាន $\boxed{[x]=[a]}$ ។

-បើ$[x]=[a]$ ស្រាយថា $x\in[a]$

គេមាន $x\in[x]$ (ព្រោះ ρ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង) តែ $[x]=[a]\Rightarrow x\in[a]$ ។

សំណើ២៖ ចំពោះ $\forall x,y\in A$ បើ $x\rho y\Leftrightarrow[x]=[y]$ ។
សម្រាយ (ទុកជាលំហាត់)

[1] https://www.youtube.com/watch?v=vI8PGThwopM

៣.៥.សំណុំផលចែក (Quotient sets)

និយមន័យ៖ សំណុំនៃថ្នាក់សមមូលទាំងអស់នៃ A តាមទំនាក់ទំនងសមមូល ρ ហៅថា សំណុំផលចែកនៃ A ដោយ ρ ។ កំណត់សរសេរដោយ A/ρ (អានថា A លើ ρ) ។

គេបាន $A/\rho = \{[x] | x \in A\}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ នៅលើ $A = \{1,2,3,4,5\}$ យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ដោយ $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (4,5), (5,4)\}$ ។

តាមសម្រាយខាងលើ គេបាន $[1] = \{1,2\}$; $[2] = \{1,2\}$; $[3] = \{3\}$; $[4] = \{4,5\}$ និង $[5] = \{4,5\}$ នោះ $\boxed{A/\rho = \{[1], [3], [4]\}}$ ឬ $\boxed{A/\rho = \{[2], [3], [4]\}}$ ... ។

ឧទាហរណ៍២៖ នៅលើ $\mathbb{Z}$ យើងកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ដោយ "x,y Î ¢ $: xry \Leftrightarrow 5 | x - y$ ។

គេបាន $\boxed{\mathbb{Z}/\rho = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}}$ ឬ $\boxed{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}}$ ។

ទ្រឹស្តីបទ៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលកំណត់លើ A ។ គេបានសំណុំផលចែក A/ρ ជាបំណែកនៃ A ។ មានន័យថា៖

i- $a \in [a]$ ចំពោះ $\forall a \in A$ (សំណើ ១)

ii- $[a] = [b]$ លុះត្រាតែ $a\rho b$ (សំណើ ២)

ii- បើ $[a] \neq [b]$ នោះ $[a]$ និង $[b]$ ជាសំណុំដាច់គ្នា ($[a] \cap [b] = \emptyset$) ។

សម្រាយ

គេមាន $\forall a \in A : [a] \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{[a] \in A/\rho} [a] \subseteq A$ (1)

- តាម (i) ចំពោះ $\forall a \in A : a \in [a] \Rightarrow a \in \bigcup_{[a] \in A/\rho} [a] \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{[a] \in A/\rho} [a]$ (2)

តាម (1) និង (2) គេបាន $\bigcup_{[a] \in A/\rho} [a] = A$

- បើ $[a] \neq [b]$ នោះគេបាន $[a] \cap [b] = \emptyset$

ព្រោះ បើ $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists x : x \in [a] \cap [b] \Leftrightarrow \exists x : x \in [a] \wedge x \in [b]$

$\Leftrightarrow \exists x : [x] = [a] \wedge [x] = [b] \Rightarrow [a] = [b]$ (ផ្ទុយពីសម្មតិកម្ម)

ដូចនេះ សំណុំផលចែក A/ρ ជាបំណែកនៃ A ។
ឧទាហរណ៍៣៖ តាមឧទាហរណ៍២ ខាងលើ គេបាន $\mathbb{Z}/\rho = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ ជាបំណែកនៃ $\mathbb{Z}$ ព្រោះ $[i] \cap [j] = \{5k + i\} \cap \{5k + j\} = \emptyset$ គ្រប់ $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\} : i \neq j$ ។ និង $[0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] = \{5k\} \cup \{5k + 1\} \cup \{5k + 2\} \cup \{5k + 3\} \cup \{5k + 4\} = \mathbb{Z}$ ។

៣.៦.ទំនាក់ទំនងលំដាប់ (Ordering Relations)

និយមន័យ៖ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ កំណត់លើសំណុំ E ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លុះត្រាតែ ρ មាន៖

i- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in E : (x, x) \in \rho$

ii- លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in E$ បើ $(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho$ នោះ $x = y$

iii- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in E$ បើ $(x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho$ នោះ $(x, z) \in \rho$

- ក្នុងករណីដែល ρ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ E គេជំនួសការសរសេរ $(x,y)\in\rho$ ឬ $x\rho y$ ឬ $\rho(x,y)$ ដោយ $x\preccurlyeq y$ ។

- សំណុំដែលប្រដាប់ដោយទំនាក់ទំនងលំដាប់មួយ ហៅថាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនងលំដាប់ នោះគេថាវាមានទម្រង់លំដាប់ ។

- សំណុំ E ជាសំណុំរៀបរយដោយទំនាក់ទំនងលំដាប់ ′ ហើយ A ជាផ្នែកមួយនៃ E ។ ទំនាក់ទំនង ′ ផ្ទៀងផ្ទាត់បានជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ A ។ គេថាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ A បានមកពីទំនាក់ទំនងលំដាប់ $\preccurlyeq$ លើ E ឬ ទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ E ជាបន្លាយនៃទំនាក់ទំនងលំដាប់លើផ្នែក A នៃ E ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុកំណត់លើ $\mathscr{P}(U)$: "A,B Î $\mathscr{P}(U)$ $A\rho B$ លុះត្រាតែ $A\subseteq B$ ។

- ទំនាក់ទំនង ρ មានលក្ខណៈខ្លួនឯង ព្រោះ $\forall A\in P(U)$ គេបាន $A\subseteq A$ មានន័យថា "A Î $\mathscr{P}(U):ArA$ ។

- ទំនាក់ទំនង ρ មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ ព្រោះ $\forall A,B\in P(U)$ បើ $A\subseteq B$ និង $B\subseteq A$ នោះគេបាន $A=B$ មានន័យថា "A,B Î $\mathscr{P}(U):ArB$ ÙBrA Þ $A=B$ ។

- ទំនាក់ទំនង ρ មានលក្ខណៈឆ្លង ព្រោះ $\forall A,B,C\in P(U)$ បើ $A\subseteq B$ និង $B\subseteq C$ នោះគេបាន $A\subseteq C$ មានន័យថា "A,B,C Î $\mathscr{P}(U):ArB$ ÙBrC Þ A Í C ។

ដូចនេះ គេបាន ρ (ឬ $\subseteq$)ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើ $P(U)$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ទំនាក់ទំនង $\leq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ ¥ ; ¢ ; ¤ ; ¡ ។

+ ទំនាក់ទំនង $\leq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$

- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{N}$ គេបាន $x \leq x$

- លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in \mathbb{N}$ បើ $x \leq y$ និង $y \leq x$ នោះ $x = y$

- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ បើ $x \leq y$ និង $y \leq z$ នោះ $x \leq z$

ដូចនេះ $\leq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។

+ ធ្វើដូចគ្នាដែរលើសំណុំ ¢ ; ¤ ; ¡ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ទំនាក់ទំនង | ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។

- លក្ខណៈខ្លួនឯង $\forall x \in \mathbb{N}$ គេបាន $x = x \cdot 1$ មានន័យថា $x|x$

- លក្ខណៈឆ្លុះស្មើ $\forall x, y \in \mathbb{N}$ បើ $\begin{cases} x|y \\ y|x \end{cases}$ នោះមាន $k, k' \in \mathbb{N}$ ដែល $\begin{cases} y = kx \\ x = k'y \end{cases}$
$\Rightarrow y = k(k'y) \Rightarrow kk' = 1$ នោះ $k = k' = 1 \Rightarrow x = y$

- លក្ខណៈឆ្លង $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ បើ $\begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases}$ នោះមាន $k, k' \in \mathbb{N}$ ដែល $\begin{cases} y = kx \\ z = k'y \end{cases}$
$\Rightarrow z = k'(kx) = (kk')x$ ដែល $kk' \in \mathbb{N}$ នោះ $x|z$
ដូចនេះ | ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។

៣.៧.ទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់ និងលំដាប់ដោយផ្នែក

ក. និយមន័យ

គេថាទំនាក់ទំនងលំដាប់ ρ កំណត់លើសំណុំ E ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់លុះត្រាតែ $\forall x, y \in E$ គេបាន $x\rho y$ ឬ $y\rho x$ ។

បានន័យថាគ្រប់ធាតុរបស់ E ពីរៗសុទ្ធតែអាចធៀបគ្នាបានចំពោះទំនាក់ទំនងលំដាប់នេះ ។

- ក្នុងករណីដែល r ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់លើ E នោះគេថា E ជាសំណុំរៀបរយគ្រប់ដោយទំនាក់ទំនងនេះ ។

- ក្នុងករណីដែល $\exists (x,y) \in E^2$ ដែលមិនអាចប្រៀបធៀបគ្នាបានដោយទំនាក់ទំនងលំដាប់ ρ នោះគេថា ρ ជាទំនាក់ទំនងដោយផ្នែកលើ E ហើយគេថា E ជាសំណុំរៀបរយដោយផ្នែកដោយទំនាក់ទំនងនេះ ។

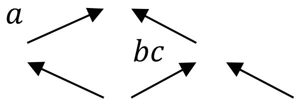
ឧទាហរណ៍១៖ ទំនាក់ទំនង$\leq$ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់កំណត់លើសំណុំ¥ ; ¢ ; ¤ ; ¡ ។

ព្រោះ $\forall x,y \in \mathbb{N}$ គេបាន $x \leq y$ ឬ $y \leq x$ ។ (ស្រដៀងគ្នាដែរចំពោះ ¢ ; ¤ ; ¡)

ឧទាហរណ៍២៖ ទំនាក់ទំនង $|$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ដោយផ្នែកកំណត់លើសំណុំ $\mathbb{N}$ ។ ព្រោះ $\exists 2,3 \in \mathbb{N}$ ដែល $2\nmid 3$ និង $3\nmid 2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ ទំនាក់ទំនង $\subseteq$ ជាទំនាក់ទំនងលំដាប់ដោយផ្នែកកំណត់លើសំណុំ $P(U)$ ។ ព្រោះ $\exists A,B \in P(U)$ ដែល $A \nsubseteq B$ និង $B \nsubseteq A$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យសំណុំ $E = \{a,b,c,d,e\}$ ត្រូវបានរៀបរយដូចខាងក្រោម៖



$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x = y$ ឬ $x \to y$

គេបាន សំណុំ E ជាសំណុំរៀបរយដោយផ្នែក ព្រោះ $\exists d,e \in E$ ដែលមិនអាចធៀបគ្នាបាន ។

ខ. ចន្លោះបិទ-ចន្លោះបើក

លើសំណុំរៀបរយគ្រប់ E ដែលរៀបរយដោយទំនាក់ទំនងលំដាប់គ្រប់ $\preccurlyeq$ និង a,b Î $E : a$ ′ b ។

គេបាន៖

$[a,b] = \{x \in E : a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$ ហៅថាចន្លោះបិទ a,b

$(a,b) = \{x \in E : a \prec x \prec b\}$ ហៅថាចន្លោះបើក a,b

$[a,b) = \{x \in E : a \preccurlyeq x \prec b\}$ ហៅថាចន្លោះបិទឆ្វេង a បើកស្តាំ b

$(a,b] = \{x \in E : a \prec x \preccurlyeq b\}$ ហៅថាចន្លោះបើកឆ្វេង a បិទស្តាំ b ។

ចំណាំ៖ ក្នុងសំណុំចំនួន $\mathbb{N}\ ;\ \mathbb{Z}\ ;\ \mathbb{Q}\ ;\ \mathbb{R}$ គេជំនួសសញ្ញា $\preccurlyeq$ ដោយ $\le$ និង $\prec$ ដោយ $<$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ក្នុងសំណុំ $\mathbb{N}, \le$ គេបាន $[1,5] = \{1,2,3,4,5\}$ និង $(1,5) = \{2,3,4\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ ក្នុងសំណុំ $E = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}, |$ គេបាន $[2,16] = \{2,4,8,16\}$ និង $(2,16) = \{4,8\}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យសំណុំ $E = \{a, b, c, d, e\}$ ត្រូវបានរៀបរយដូចខាងក្រោម៖

a

$b \qquad c$

$d \qquad e$

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x = y$ ឬ $x \to y$

គេបាន $e \preccurlyeq c\ ;\ c \preccurlyeq a\ ;\ d \preccurlyeq c\ ;\ \ldots$ ។

ចំណាំ៖ ក្នុង E សំណុំរៀបរយគ្រប់ គេថា b ជាធាតុបន្ទាប់នៃ a កាលណា $(a,b) = \emptyset$ ។

លំហាត់

62. ក. កំណត់តម្លៃ x និង y បើ $(2x, y+x) = (6,2)$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ x និង y បើ $(2x+x^2, y) = (y, 5x+10)$ ។

63. សរសេរទំនាក់ទំនងខាងក្រោមជាតារាងមួយ៖

ក. $\rho = \{(a,6),(b,2),(a,1),(c,1)\}$

ខ. r = {(Roger, Music), (Pat, History), (Ben, Math), (Pat, CP)}

គ. ទំនាក់ទំនង ρ លើសំណុំ $\{1,2,3,4\}$ កំណត់ដោយ $(x,y) \in \rho$ លុះត្រាតែ $x^2 \geq y$ ។

64. គេមាន $A = \{1,2,3,4\}$ និង $B = \{t,x,y,z\}$ ។ តាង ρ ជាទំនាក់ទំនងមួយពីសំណុំ A ទៅ B កំណត់ដោយ $\rho = \{(1,y),(1,z),(3,y),(4,x),(4,z)\}$ ។

ក. ចូរដៅ ρ នៅលើដ្យាក្រាមកូអ័រដោណេនៃ $A \times B$ ។

ខ. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃទំនាក់ទំនង ρ ។

គ. សង់ដ្យាក្រាមព្រួញនៃ ρ ។

ឃ. កំណត់ទំនាក់ទំនងច្រាស r^{-1} នៃ r ។

ង. កំណត់សំណុំដែន និងសំណុំតម្លៃនៃ r ។

65. តាង ρ ជាទំនាក់ទំនងមួយលើសំណុំ $Y = \{1,2,3,4\}$ កំណត់ដោយ៖

$(x,y) \in \rho$ លុះត្រាតែ $x + y \leq 5, (x, y \in Y)$ ។

ក. កំណត់ធាតុនៃទំនាក់ទំនង ρ ។

ខ. សង់ការតាងជារូបភាពនៃ ρ ។

គ. កំណត់ម៉ាទ្រីសនៃទំនាក់ទំនង ρ ។

ឃ. សង់ដ្យាក្រាមព្រួញនៃ ρ ។

ង. សង់ក្រាហ្វទិសដៅនៃ ρ ។

ច. កំណត់ទំនាក់ទំនងច្រាស ρ^{-1} នៃ ρ ។

ឆ. កំណត់សំណុំដែន និងសំណុំតម្លៃនៃ ρ ។

ជ. ចូរកំណត់ថាតើទំនាក់ទំនង ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលដែរ ឬទេលើសំណុំ Y ។

66. បង្ហាញថាទំនាក់ទំនង " $=$ " នៅលើសំណុំ $\mathbb{Z}$ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

67. តាង $X = \{2,3,4\}$ និង $Y = \{3,4,5,6,7\}$ ។ តាង ρ ជាទំនាក់ទំនងមួយពី X ទៅ Y កំណត់ដោយ $(x,y) \in \rho$ បើ y ចែកដាច់នឹង x ។

   ក. កំណត់ធាតុនៃ ρ ។

   ខ. កំណត់សំណុំដែន និងសំណុំតម្លៃនៃ ρ ។

   គ. កំណត់ធាតុនៃ ρ^{-1} ។

68. តាង ρ និង ρ' ជាទំនាក់ទំនងខាងក្រោមលើសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ ដោយ $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}$ និង $\rho' = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,3)\}$ ។ កំណត់សំណុំ $\rho \cap \rho', \rho \cup \rho', \bar{\rho}$ និង $\rho^{\bar{\prime}}$ ។

69. តាង $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ និងតាង r ជាទំនាក់ទំនងមួយលើសំណុំ A កំណត់ដោយ $r = \{(x,y) : x < y$ ឬ x ជាចំនួនបឋម $\}$ ។ ចូរឱ្យការតាងម៉ាទ្រីសនៃ ρ ។

70. តាង ρ ជាទំនាក់ទំនងមួយលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានកំណត់ដោយ arb សមមូល $a + 2b = 10$ ។ ចូរឱ្យឧទាហរណ៍ផ្ទុញដើម្បីបង្ហាញថា៖

   ក. r មិនមានលក្ខណៈខ្លួនឯង។

   ខ. r មិនមានលក្ខណៈឆ្លុះ។

   គ. r មិនមានលក្ខណៈឆ្លង។

71. តាង ρ និង ρ' ជាទំនាក់ទំនងខាងក្រោមលើសំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$ ដោយ $\rho = \{(1,1),(1,3),(3,2),(3,4),(4,2)\}$ និង $\rho' = \{(2,1),(3,3),(3,4),(4,1)\}$ ។ កំណត់សំណុំទំនាក់ទំនងនីមួយៗខាងក្រោមលើសំណុំ A ៖

   ក. $\rho \circ \rho'$ ខ. $\rho' \circ \rho$ គ. $\rho \circ \rho$ ឃ. $\rho' \circ \rho'$ ។

72. តាង $A = \{1,3,5,9\}$ និង $B = \{u,v,w\}$ ។ ចូរតាងទំនាក់ទំនងខាងក្រោមជាទម្រង់ក្រាហ្វ៖

   ក. $\rho_1 = \{(1,v),(1,w),(5,u),(9,v),(9,u)\}$

   ខ. $\rho_2 = \{(1,v),(3,v),(5,v),(9,v)\}$

   គ. $\rho_3 = \{(5,u),(5,v),(5,w)\}$ ។

73. គេឱ្យទំនាក់ទំនង $\rho = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$ លើសំណុំ $A = \{a,b,c\}$ ។ បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ A ។

74. តាង ρ ជាទំនាក់ទំនងមួយលើសំណុំចំនួនគត់វិជ្ជមានកំណត់ដោយ $a\rho b$ សមមូល $a \times b$ ជាចំនួនសេស។ ចូរឱ្យឧទាហរណ៍ផ្ទុញដើម្បីបង្ហាញថា៖

ក. ρ មិនមានលក្ខណៈខ្លួនឯង។

ខ. ρ មិនមានលក្ខណៈឆ្លុះ។

គ. ρ មិនមានលក្ខណៈឆ្លង។

75. ចំពោះទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ លើ $\mathbb{N} \cup \{0\}$, គូមានលំដាប់ដែលគេឱ្យណាខ្លះជារបស់ ρ ?

ក. xry Û $x + y < 7$; $(1,3)$, $(2,5)$, $(3,3)$, $(4,4)$

ខ. xry Û $x = y + 2$; $(0,2)$, $(4,2)$, $(6,3)$, $(5,3)$

គ. xry Û $2x + 3y = 10$; $(5,0)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(1,3)$

ឃ. xry U y ជាការេប្រាកដ ; $(1,1)$, $(4,2)$, $(3,9)$, $(25,5)$

76. ចំពោះទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ លើ $\mathbb{Z}$, គូមានលំដាប់ដែលគេឱ្យណាខ្លះជារបស់ ρ ?

ក. xry Û $x \mid y$; $(2,-6)$, $(3,5)$, $(8,4)$, $(4,8)$

ខ. xry U x និង y ជាចំនួនបឋមរវាងគ្នា ; $(5,8)$, $(9,16)$, $(6,8)$, $(8,21)$

គ. xry Û $\gcd(x,y) = 7$; $(28,14)$, $(7,7)$, $(10,5)$, $(21,14)$

ឃ. xry Û $x^2 + y^2 = z^2$ ដែល z ជាចំនួនគត់ ; $(1,0)$, $(3,9)$, $(2,2)$, $(-3,4)$

ង. $x\rho y \Leftrightarrow x$ ជាចំនួនមួយយកចេញពីស្វ៊ីត Fibonacci ; $(4,3)$, $(7,6)$, $(7,12)$, $(20,20)$

77. គូមានលំដាប់ដែលគេឱ្យណាខ្លះជារបស់ r ?

ក. r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¢, xry Û $x = -y$; $(1,-1)$, $(2,2)$, $(-3,3)$, $(-4,-4)$

ខ. r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¥, xry Û x គឺជាចំនួនបឋម ;$(19,7)$,$(21,4)$,$(33,13)$ $(41,16)$ ។

គ. r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¤, xry Û x £ $\frac{1}{y}$; $(1,2)$, $(-3,-5)$, $\left(-4,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

ឃ. r ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¥ ´ ¥, $(x,y)r(u,v)$ Û $x + u = y + v$; $((1,2),(3,2))$, $((4,5),(0,1))$ ។

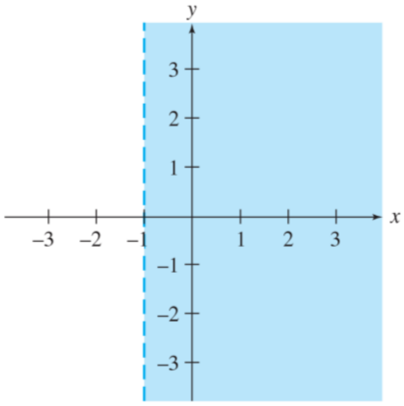
78. ចំពោះទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¡ ដូចខាងក្រោម ចូរគូសរូបផ្នែកនៃប្លង់ដើម្បីបកស្រាយទំនាក់ទំនងទាំងនេះ៖

ក. xry Û y £ 2 ខ. xry Û $x = y$ - 1

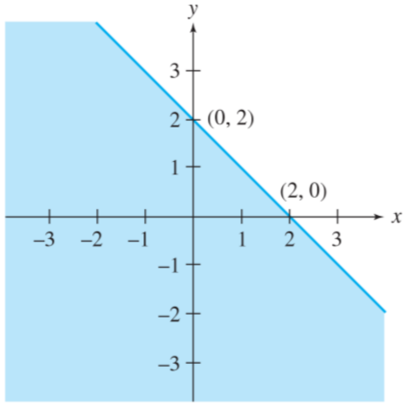
គ. xry Û $x^2 + y^2$ £ 25 ឃ. xry Û x^3 y ។

79. ចំពោះរូបនីមួយៗខាងក្រោម ចូរកំណត់ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ ¡ ដែលត្រូវនឹងវា៖

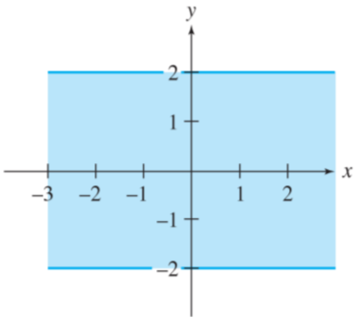
ក.



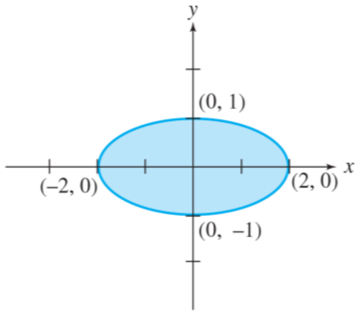
ខ.



គ.



ឃ.



80. ខាងក្រោមជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើ $\mathbb{N}$ តើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមណា មួយទៅមួយ, មួយទៅច្រើន , ច្រើនទៅមួយ ឬ ច្រើនទៅច្រើន ?

ក. $\rho = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(4,3)\}$

ខ. $\rho = \{(9,7),(6,5),(3,6),(8,5)\}$

គ. $\rho = \{(12,5),(8,4),(6,3),(7,12)\}$

ឃ. $\rho = \{(2,7),(8,4),(2,5),(7,6),(10,1)\}$ ។

81. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនងលើ $\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ កំណត់ដោយ

$$\rho = \{((m,n),(p,q)) | m + q = n + p\}$$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

ខ. កំណត់ថ្នាក់សមមូល $[(0,0)]$; $[(1,0)]$ និង $[(0,1)]$ ។

82. គេឱ្យ $A=\{0,1,2,3\}$ និង ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុមួយកំណត់លើ A ដោយ $\rho=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,2),(2,3),(3,1),(1,3)\}$ ។

ក. បង្ហាញថា r ជាទំនាក់ទំនងសមមូលលើ A ។

ខ. រកថ្នាក់សមមូលនៃ a ចំពោះគ្រប់ធាតុ $a\in A$ ។

គ. បង្ហាញថា $\{[a]: a \hat{I}\ A\}$ គឺជាបំណែកនៃ A ។

83. ចំពោះសំណុំ A ដែលឱ្យ កំណត់ថាតើ p ជាបំណែកនៃ A ឬទេ ?

ក. $A=\{1,2,3,4\},\pi=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$

ខ. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\},\pi=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$

គ. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\},\pi=\{\{1,3\},\{5,6\},\{2,4\},\{7\}\}$

ឃ. $A=\mathbb{N},\pi=\{1,2,3,4,5\}\cup\{n\in\mathbb{N}|n>5\}$

ង. $A=\mathbb{R},\pi=(-\infty,1)\cup[-1,1]\cup(1,+\infty)$ ។

មេរៀនទី៤៖ អនុគមន៍ និងអនុវត្តន៍

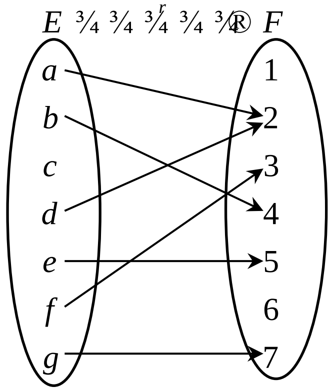
១.អនុគមន៍ (Functions)

ក. និយមន័យ

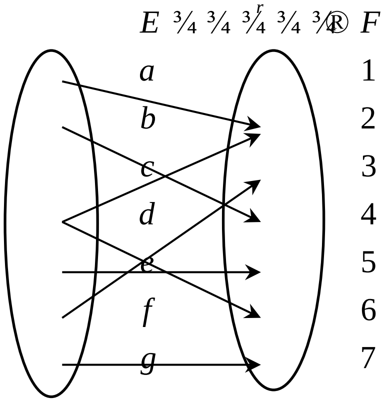
គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F ។ ρ ហៅថាអនុគមន៍ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F លុះត្រាតែគ្រប់ធាតុ x របស់ E ទាក់ទងទៅនឹងធាតុ y មួយយ៉ាងច្រើនរបស់ F ។

គេបាន r ជាអនុគមន៍ពី E ទៅ $F \Leftrightarrow [\forall x \in E, \forall y_1, y_2 \in F : (x r y_1 \wedge x r y_2) \Rightarrow y_1 = y_2]$

ឧទាហរណ៍១៖ ទំនាក់ទំនង r ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F ខាងក្រោម គឺជាអនុគមន៍ ។



ឧទាហរណ៍២៖ ទំនាក់ទំនង σ ពីសំណុំ E ទៅសំណុំ F ខាងក្រោម មិនមែនជាអនុគមន៍ទេព្រោះ $d\sigma 2$ ផង និង $d\sigma 6$ ផង ។



ជាទូទៅ៖នៅក្នុងការសិក្សាយើងតែងតែជំនួសទំនាក់ទំនងទ្វេជាតុពី E ទៅ F ដែលជាអនុគមន៍

ដោយ $f : E \to F$ (f ជាអនុគមន៍ពី E ទៅ F)

$x \mapsto y = f(x)$ (x ឱ្យរូបភាព y តាម f)

* y ហៅថារូបភាពនៃ x តាម f
* សំណុំ E ហៅថាសំណុំដើមនៃអនុគមន៍
* សំណុំ F ហៅថាសំណុំចុងនៃអនុគមន៍
* សំណុំរូបភាពទាំងអស់នៃ x តាមអនុគមន៍ f ហៅថារូបភាពនៃ f និងកំណត់

សរសេរដោយ $f(E)$ ឬ $\mathrm{Im}(f)$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ជាអនុគមន៍ ។

$x \mapsto f(x) = x^2 - e^x$

ខ. ដែនកំណត់

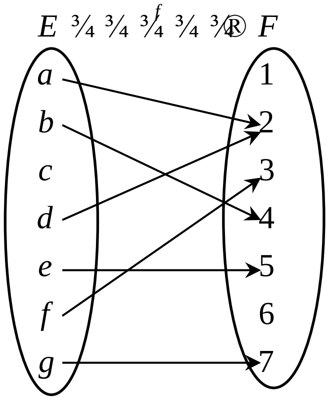
គេឱ្យអនុគមន៍ $f : E \to F$

$$x \mapsto y = f(x)$$

ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺជាសំណុំD នៃធាតុ $x \in E$ ដែលទាក់ទងទៅនឹងធាតុ $y \in F$ ។

គេសរសេរ $D = \{x \in E : \exists ! y \in F, y = f(x)\}$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់ដូចខាងក្រោម ។ គេបាន $D = \{a,b,d,f,g\}$ ។



ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{|x| - 1} + \frac{4}{\sqrt{2 - |x|}}$$

អនុគមន៍ f កំណត់បានកាលណា $\begin{cases} |x| - 1 \geq 0 \\ 2 - |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$

នោះ $x \in (-2, -1] \cup [1,2)$ ដូចនេះ $D = (-2, -1] \cup [1,2)$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)=\log_3|x|$$ គេបាន $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=e^{\frac{1}{x}}$$ គេបាន $D=\mathbb{R}-\{0\}$ ។

គ. សមភាពរវាងពីរអនុគមន៍

និយមន័យ៖ គេឱ្យពីរសំណុំ $E\,;F$ និងពីរអនុគមន៍ $f:E\to F$ និង $g:E\to F$ ។

គេបាន $f=g \Leftrightarrow \forall x\in E: f(x)=g(x)$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យ $f:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$ និង $g:\{-1,0,1\}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=x^5 \qquad x\mapsto g(x)=x^{2023}$$

គេបាន $f(-1)=g(-1)\,;f(0)=g(0)\,;f(1)=g(1)$ ដូចនេះ $f=g$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យពីរអនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto f(x)=|x| \qquad x\mapsto g(x)=\sqrt{x^2}$$

-បើ $x\geq 0$ នោះ $\begin{cases}|x|=x\\ \sqrt{x^2}=x\end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$

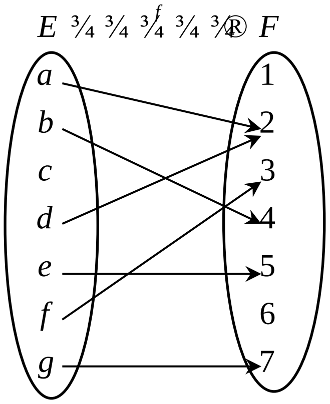
-បើ $x<0$ នោះ $\begin{cases}|x|=-x\\ \sqrt{x^2}=-x\end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$

ដូចនេះ $f=g$ ។

ឃ. ក្រាបនៃអនុគមន៍ (Graph of a function)

គេឱ្យអនុគមន៍ $f : E \to F$ ។ គេបានក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺសំណុំ G ជាសំណុំរងនៃ $E \times F$ ដែលកំណត់ដោយ $G = \{(x,y) \in E \times F : y = f(x)\}$ ។

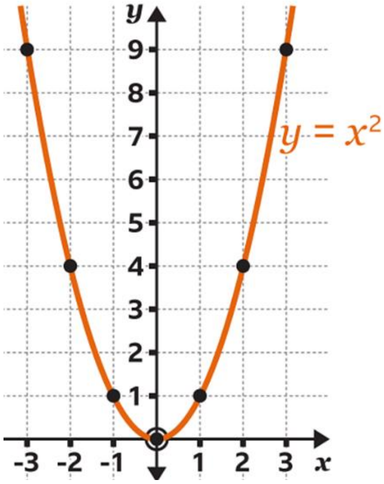
ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : E \to F$ ដូចខាងក្រោម ។



ក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺ $G = \{(a,2),(b,4),(d,2),(e,5),(f,3),(g,7)\}$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$



ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុលើសំណុំ $A = \{1,2,3,4\}$ ដែលមានក្រាបបីដូចតទៅ $G_1 = \{(1,3),(2,3),(3,1)\}$; $G_2 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,4)\}$ និង $G_3 = \{(1,3),(2,1),(1,2),(3,1)\}$ ។

- ចំពោះក្រាប G_1 និង G_2 តាងឱ្យអនុគមន៍ ព្រោះគ្រប់ធាតុរបស់ A មានរូបភាពមួយយ៉ាងច្រើនជារបស់ A ។

- ចំពោះក្រាប G_3 មិនតាងឱ្យអនុគមន៍ទេ ព្រោះមានធាតុរបស់ A មានរូបភាពច្រើនជារបស់ A គឺ 1 មានរូបភាព 2 ផង និង 3 ផង ។

ខ. អនុគមន៍បង្រួម និងអនុគមន៍បន្លាយ

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $f : E \to F$ ជាអនុគមន៍ និង A ជាផ្នែកមួយនៃ E ។ អនុគមន៍ $g : A \to F$ ដែលចំពោះ $\forall x \in A : g(x) = f(x)$ ហៅថាអនុគមន៍បង្រួមនៃ f លើ A ហើយ f ហៅថាអនុគមន៍បន្លាយនៃ g លើ E ។ គេកំណត់សរសេរ $g = f/A$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេមាន $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|\sin x|$ និង $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $g(x)=\sin x$ ។

ចំពោះ $\forall x\in[0,\pi]$ គេបាន $\sin x\geq 0 \Rightarrow |\sin x|=\sin x$ នោះ $f(x)=g(x)$ ។

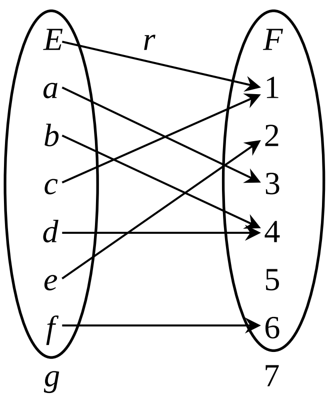
ដូចនេះ $g=f/[0,\pi]$ ។

អនុវត្តន៍ (Mapping)

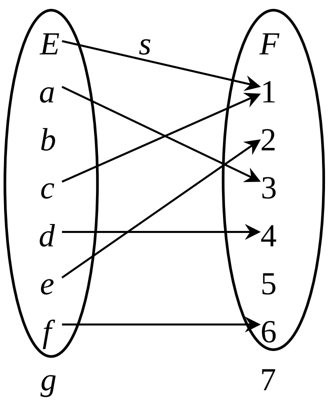
និយមន័យ៖ ទំនាក់ទំនងទ្វេធាតុ ρ ពី E ទៅ F ដែលចំពោះ $\forall x\in E$ សុទ្ធតែទាក់ទងទៅនឹងធាតុ y មួយ ហើយតែមួយគត់របស់ F ហៅថាអនុវត្តន៍ពី E ទៅ F ។

ដូចនេះ ρ ជាអនុវត្តន៍ $\Leftrightarrow \forall x\in E, \exists! y\in F : xry$ ។ (∃!អានថា មានតែមួយគត់)

ឧទាហរណ៍១៖



r ជាអនុវត្តន៍ពី E ទៅ F



s មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពី E ទៅ F

ទិបាតះ អនុវត្តន៍ គឺជាអនុគមន៍ដែលមានដែនកំណត់ស្មើសំណុំដើម ។

ឧទាហរណ៍២៖ អនុគមន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ។

អនុគមន៍ f កំណត់បានកាលណា $x^2+1\geq 0$ ផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ $x\in\mathbb{R}$

នោះ $D=\mathbb{R}$ (ដែនកំណត់ស្មើនឹងសំណុំដើម) ដូច្នេះ f ជាអនុវត្តន៍ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ អនុគមន៍ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\ln x$ ។
អនុគមន៍ f កំណត់បានកាលណា $x>0$ នោះ $D=(0,+\infty)\neq[0,+\infty)$
(ដែនកំណត់មិនស្មើនឹងសំណុំដើម) ដូច្នេះ f មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ ។

រូបភាព និងរូបភាពច្រាសនៃផ្នែកមួយ

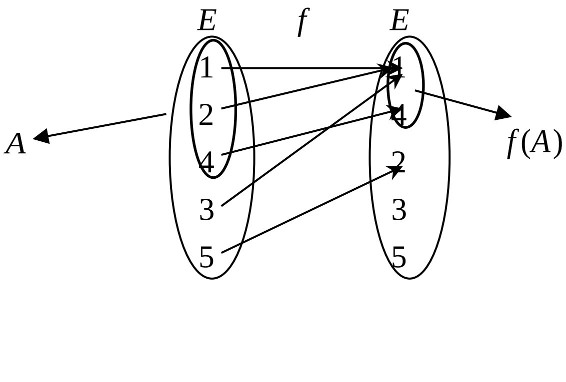
ក. រូបភាពនៃផ្នែកមួយ

គេឱ្យ $f:E\to F$ ជាអនុវត្តន៍ ឬជាអនុគមន៍ ។ A ជាផ្នែកមួយនៃ E ។ គេបានរូបភាពនៃផ្នែក A របស់ E តាម f កំណត់សរសេរដោយ $f(A)$ គឺជាសំណុំ៖

$f(A)=\{y\in F:\exists x\in A, y=f(x)\}=\{f(x):x\in A\}$
ឬ $y\in f(A)\Leftrightarrow \exists x\in A:y=f(x)$ ។

សម្គាល់៖ បើ $x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)$ ប៉ុន្តែផ្ទុយមកវិញមិនពិតជាទូទៅទេ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំ $E=\{1,2,3,4,5\}$ ដោយ $f=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,4),(5,2)\}$ ។ ចំពោះ $A=\{1,2,4\}\subset E$ គេបាន $f(A)=\{1,4\}$ ។



យើងឃើញថា $f(3) = 1 \in f(A)$ តែ $3 \notin A$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \sin x$ ។

គេបាន $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]\,;\, f([0,\pi]) = [0,1]$ និង $f([0,2\pi]) = [-1,1]$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $f(n) = \sqrt{n}$ ។

គេបាន $f(\{1,4,9,16,25\}) = \{1,2,3,4,5\}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ។

បើ $f(A) = \{-1, 0\}$ នោះយើងអាចកំណត់សំណុំ A ដូចតទៅ៖

- ចំពោះ $f(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = -x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

- ចំពោះ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

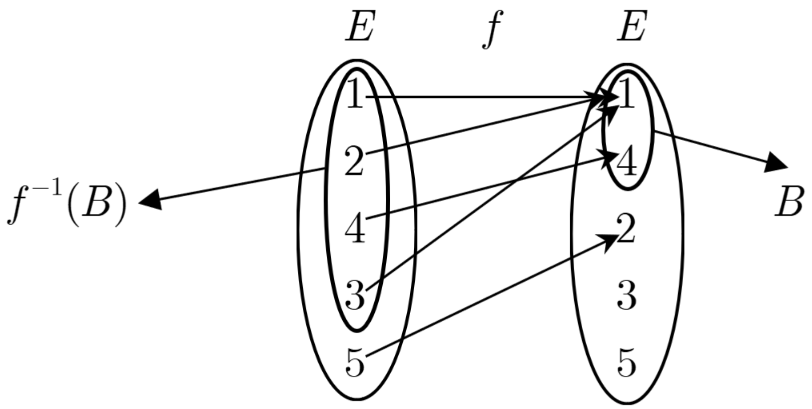
ដូច្នេះ $\boxed{A = \{-1, 0, 1\}}$ ។

ខ. រូបភាពច្រាសនៃផ្នែកមួយ

គេឱ្យ $f : E \to F$ ជាអនុវត្តន៍ ឬអនុគមន៍ ។ B ជាផ្នែកមួយនៃ F ។ គេបានរូបភាពច្រាសនៃផ្នែក B របស់ F កំណត់សរសេរដោយ $f^{-1}(B)$ គឺ៖ $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ ។

សម្គាល់៖ $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់លើសំណុំ $E = \{1,2,3,4,5\}$ ដោយ $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,4),(5,2)\}$ ។ ចំពោះ $B = \{1,4\} \subset E$ គេបាន $f^{-1}(B) = \{1,2,3,4\}$ ។



ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : E \to F$ ដែល $E = \{a,b,c,d,e\}$ និង $F = \{1,2,3,4,5\}$ កំណត់ដូចដ្យាក្រាមព្រួញខាងក្រោម៖

ចំពោះ $A = \{a,b,d\}$ និង $B = \{3,4,5\}$ គេបាន៖ $f(A) = \{f(a), f(b), f(d)\} = \{3,1,4\}$ និង $f^{-1}(B) = \{a,c,d,e\}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = 1$ ។

គេបាន $f(\mathbb{R}) = \{1\}$; $f([2,3]) = 1$; $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$

$f^{-1}([-2,0]) = \emptyset$; $f^{-1}((0,2]) = \mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ គេឱ្យអនុគមន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = 0$ បើ $x < 0$ និង $f(x) = 2$ បើ $x \geq 0$ ។

គេបាន $f(\mathbb{R}) = \{0,1\}$; $f([2,3]) = 2$; $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$

$f^{-1}([-2,0]) = (-\infty,0)$; $f^{-1}([0,2]) = \mathbb{R}$ ។

គ. លក្ខណៈ

គេឱ្យ $f : E \to F$ ជាអនុវត្តន៍ ។

គេបាន៖

i). $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$

ii). $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

iii). $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

iv). $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$

v). $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

vi). $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

vii). $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

viii). $f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y$

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

លក្ខណៈនៃអនុវត្តន៍ (Property of mapping)

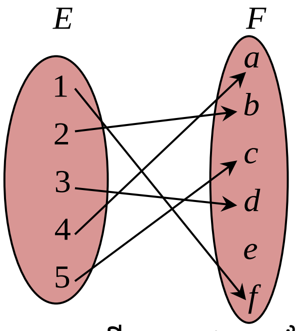
f ក. អនុវត្តន៍ប្រកាន់ (One to one or Injective mapping)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $f : E \to F$ ជាអនុវត្តន៍ ។ f ហៅថាអនុវត្តន៍ប្រកាន់លុះត្រាតែ

$\forall x_1, x_2 \in E$ បើ $x_1 \neq x_2$ នោះ $f(x_1) \neq f(x_2)$

ឬ $\forall x_1, x_2 \in E$ បើ $f(x_1) = f(x_2)$ នោះ $x_1 = x_2$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ អនុវត្តន៍



f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ព្រោះគ្មានធាតុពីរណាក្នុង E ដែលយករូបភាពតែមួយក្នុង F ។

ឧទាហរណ៍២៖ អនុវត្តន៍ $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\ln x$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ព្រោះ គ្រប់ $x_1,x_2>0$ បើ $x_1\neq x_2 \Rightarrow \ln x_1 \neq \ln x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ ឬ គ្រប់ $x_1,x_2>0$ បើ $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \ln x_1=\ln x_2 \Rightarrow x_1=x_2$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ទេ ព្រោះ មាន $-1,1\in\mathbb{R}$ ដែល $-1\neq 1$ តែ $|-1|=|1|\Rightarrow f(-1)=f(-1)$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ អនុវត្តន៍ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ព្រោះ គ្រប់ $x_1,x_2\geq 0$ បើ $x_1\neq x_2\Rightarrow |x_1|\neq|x_2|\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ ។

ឬ គ្រប់ $x_1,x_2\geq 0$ បើ $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow x_1=x_2$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ពេញ (Onto or Surjective mapping)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $f:E\to F$ ជាអនុវត្តន៍ ។ f ហៅថាអនុវត្តន៍ពេញលុះត្រាតែ $\forall y\in E,\exists x\in E: y=f(x)$ ឬ $f(E)=F$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ អនុវត្តន៍

f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ព្រោះគ្រប់ធាតុក្នុង F សុទ្ធតែជារូបភាពរបស់ធាតុក្នុង E ។

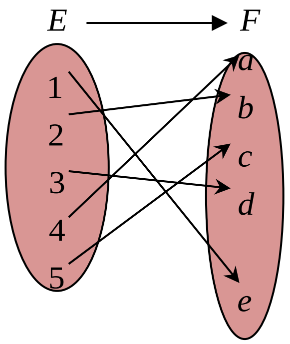
ឧទាហរណ៍២៖ អនុវត្តន៍ $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\ln x$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ ព្រោះ គ្រប់ $y\in\mathbb{R}, \exists x=e^{y}\in(0,+\infty): f(x)=\ln e^{y}=y\ln e=y$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញទេ ព្រោះ $f(\mathbb{R})=\{|\mathbb{R}|\}=[0,+\infty)\neq\mathbb{R}$ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ជាអនុវត្តន៍ពេញ ព្រោះ $f(\mathbb{R})=\{|\mathbb{R}|\}=[0,+\infty)$ ។

គ. អនុវត្តន៍មួយទល់មួយ (One to one correspondence or Bijective mapping)
និយមន័យ៖ គេឱ្យ $f:E\to F$ ជាអនុវត្តន៍ ។ f ហៅថាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយលុះត្រាតែ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និងជាអនុវត្តន៍ពេញ ។

ឧទាហរណ៍១៖ អនុវត្តន៍



f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ព្រោះវាជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និងជាអនុវត្តន៍ពេញ។

ឧទាហរណ៍២៖ អនុវត្តន៍ $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\ln x$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ព្រោះ វាជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និងជាអនុវត្តន៍ពេញ។ (សម្រាយខាងលើ)

ឧទាហរណ៍៣៖ អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយទេព្រោះវាមិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។ (សម្រាយខាងលើ)

ឧទាហរណ៍៤៖ អនុវត្តន៍ $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយទេ ព្រោះវាមិនមែនជាអនុវត្តន៍ពេញ ។ (សម្រាយខាងលើ)

ឧទាហរណ៍៥៖ អនុវត្តន៍ $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$ កំណត់ដោយ $f(x)=|x|$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ព្រោះវាជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ផង និងជាអនុវត្តន៍ពេញផង ។ (សម្រាយខ្លួនឯង)

ឃ. អនុវត្តន៍ខ្លួនឯង (Identity mapping)

អនុវត្តន៍ $f:E\to E$ កំណត់ដោយ $f(x)=x$ ហៅថាអនុវត្តន៍ខ្លួនឯងលើសំណុំ E និងកំណត់សរសេរដោយ $i_E:E\to E$

$$x\mapsto i_E(x)=x$$

អនុវត្តន៍ខ្លួនឯងគឺជាអនុវត្តន៍ មួយទល់មួយ (សម្រាយបញ្ជាក់ទុកជាលំហាត់) ។

អនុវត្តន៍ច្រាស (Invertible mapping)

ជាទូទៅទំនាក់ទំនងច្រាសនៃអនុវត្តន៍ មិនសុទ្ធតែជាអនុវត្តន៍ទេ ។

ឧទាហរណ៍១៖ ក្នុងសំណុំ $E=\{1,2,3\}$ គេមាន $f=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$ ជាអនុវត្តន៍ តែ $f^{-1}=\{(2,1),(2,2),(1,3)\}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ ។

ឧទាហរណ៍២៖ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ជាអនុវត្តន៍ ។

$$x\mapsto f(x)=\cos x$$

តែ $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ទេ

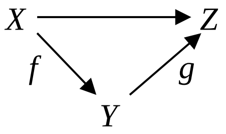
$$x\mapsto f^{-1}(x)=\cos^{-1}x$$

ព្រោះ $D_{f^{-1}} = [-1,1] \neq \mathbb{R}$ ។

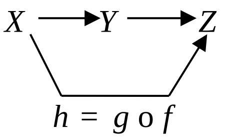
ទ្រឹស្តីបទ១៖ បើ $f : E \to F$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយគេបានទំនាក់ទំនងច្រាស $f^{-1} : F \to E$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ហើយ $(f^{-1})^{-1} = f$ ។ សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)។

បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍ (Composition of mapping)

ក. និយមន័យ គេឱ្យ $X\,;Y$ និង Z ជាបីសំណុំ ។ $f : X \to Y$ ជាអនុវត្តន៍ដែលមានក្រាប G និង $g : Y \to Z$ ជាអនុវត្តន៍ដែលមានក្រាប H ។ យើងកំណត់អនុវត្តន៍ទីបី $h : X \to Z$ ដែលមានក្រាប K និង $h(x) = g[f(x)]$ ចំពោះ $\forall x \in X$ ។ ដូចនេះ គេបាន $K = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y \in Y, (x,y) \in G \wedge (y,z) \in H\}$ គេហៅអនុវត្តន៍ h ជាអនុវត្តន៍បណ្តាក់នៃ f និង g ហើយកំណត់សរសេរដោយ $h = g \circ f$ ។



ឬ



ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និង $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \sin 4x$ និង $g(x) = e^x - 2$ ។

គេបាន $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sin 4x) = e^{\sin 4x} - 2$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(e^x - 2) = \sin[4(e^x - 2)] = \sin(4e^x - 8)$$

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(\sin 4x) = \sin[4(\sin 4x)]$$

និង $(g \circ g)(x) = g[g(x)] = g(e^x - 2) = e^{e^x - 2} - 2$ ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុវត្តន៍ f និង g កំណត់ដោយ $g(x) = 3x + 1$ និង $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2$ ។ គេចង់រក $f(x)$ ។

គេមាន $(f\circ g)(x)=4x^2-2 \Leftrightarrow f[g(x)]=4x^2-2 \Leftrightarrow f(3x+1)=4x^2-2$

តាង $t=3x+1 \Rightarrow x=\frac{t-1}{3}$ គេបាន $f(t)=4\left(\frac{t-1}{3}\right)^2-2=4\left(\frac{t^2-2t+1}{9}\right)-2$

ដូច្នេះ $\boxed{f(x)=\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{9}x-\frac{14}{9}}$ ។

ឧទាហរណ៍៣៖ គេឱ្យអនុវត្តន៍ f និង g កំណត់ដោយ $f(x)=3x+1$ និង $(f\circ g)(x)=4x^2-2$ ។ គេចង់រក $g(x)$ ។

គេមាន $(f\circ g)(x)=4x^2-2 \Leftrightarrow f[g(x)]=4x^2-2 \Leftrightarrow 3g(x)+1=4x^2-2$

នោះ $g(x)=\frac{1}{3}(4x^2-2-1)=\boxed{\frac{4}{3}x^2-1}$ ។

សម្គាល់៖

i- អនុវត្តន៍បណ្តាក់ $g\circ f$ កំណត់បានលុះត្រាតែសំណុំចុងនៃ f និងសំណុំដើមនៃ g ជាសំណុំតែមួយ ។

ឧទាហរណ៍៤៖ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ និង $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ នោះ $f\circ g$ មិនអាចកំណត់បានទេ ព្រោះសំណុំចុងនៃ F ខុសពីសំណុំដើមនៃ g ។

បើមាន $g\circ f$ និង $f\circ g$ នោះវាមិនស្មើគ្នាជាទូទៅទេ(មានន័យថា $f\circ g\neq g\circ f$) ។

ii- បើ $f:E\to F$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយនោះគេបាន $f^{-1}\circ f=i_E$ និង $f\circ f^{-1}=i_F$

iii- បើ $f=f^{-1}$ ឬ $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=i_E$ នោះគេថា $f:E\to E$ ជាអនុវត្តន៍ Involutive

ទ្រឹស្តីបទ២៖ គេឱ្យបួនសំណុំ $X\ ;Y\ ;Z\ ;T$ និងបីអនុវត្តន៍ $f:X\to Y\ ;g:Y\to Z$ និង $h:Z\to T$ គេបាន $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

គេមាន $\forall x \in X : [(h \circ g)\circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h\{g[f(x)]\}$

$$= h[(g \circ f)(x)] = [h \circ (g \circ f)](x) \text{ ។}$$

ដូចនេះ គេបាន $\boxed{h \circ g \circ f = (h \circ g)\circ f = h \circ (g \circ f)}$ ។

ឧទាហរណ៍៥៖ គេមានអនុវត្តន៍បីកំណត់ដោយ $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x + 1}$; $g(x) = 3x + 1$ និង $h(x) = \sqrt{x}$ ។

គេបាន $(f \circ g \circ h)(x) = [f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] = f\{g[h(x)]\}$

$$= f[3h(x) + 1] = f(3x^2 + 1) = \frac{(3x^2 + 1) - 2}{2(3x^2 + 1) + 1} = \boxed{\frac{3x^2 - 1}{6x^2 + 3}}$$

ឧទាហរណ៍៦៖ គេមានអនុវត្តន៍បីកំណត់ដោយ $f(x) = |x - 7|$; $g(x) = 7^x$ និង $h(x) = x^2$ ។

គេបាន $(g \circ f \circ h)(x) = [g \circ (f \circ h)](x) = g[(f \circ h)(x)]$

$$= g\{f[h(x)]\} = g[|h(x) - 7|] = g(|x^2 - 7|) = \boxed{7^{|x^2 - 7|}} \text{ ។}$$

ទ្រឹស្តីបទ៣៖ គេឱ្យបីសំណុំ X ; Y ; Z និងពីរអនុវត្តន៍ $f : X \to Y$; $h : X \to Z$ ។

គេបានលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោមសមមូល៖

i- មានអនុវត្តន៍ $g : Y \to Z$ ដែល $h = g \circ f$

ii- $\forall x_1, x_2 \in X$ បើ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow h(x_1) = h(x_2)$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

ទ្រឹស្តីបទ៤៖ គេឱ្យពីរសំណុំ $X\ ;Y$ និងអនុវត្តន៍ $f : X \rightarrow Y$ ។គេបានលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោមសមមូល៖

i- អនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

ii- មានអនុវត្តន៍ $g : Y \rightarrow X$ ដែល $g \circ f = i_X$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

ទ្រឹស្តីបទ៥៖ គេឱ្យពីរសំណុំ $X\ ;Y$ និងអនុវត្តន៍ $f : X \rightarrow Y$ ។ គេបានលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោមសមមូល៖

i- អនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ

ii-មានអនុវត្តន៍ $h : Y \rightarrow X$ ដែល $f \circ h = i_Y$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

ទ្រឹស្តីបទ៦៖ គេឱ្យពីរសំណុំ $X\ ;Y$ និងអនុវត្តន៍ $f : X \rightarrow Y$ ។ គេបានលក្ខខណ្ឌទាំងពីរខាងក្រោមសមមូល៖

i- អនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ

ii- មានអនុវត្តន៍ $g : Y \rightarrow X$ និង $h : Y \rightarrow X$ ដែល $g \circ f = i_X$ និង $f \circ h = i_Y$ ។ បើលក្ខខណ្ឌណាមួយខាងលើត្រូវបានបំពេញនោះ g និង h មានតែមួយគត់ ហើយ g និង h ជាអនុវត្តន៍តែមួយ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

ទ្រឹស្តីបទ៧៖ គេឱ្យបីសំណុំ $X\ ;Y\ ;Z$ និងពីរអនុវត្តន៍ $f:X\to Y\ ;g:Y\to Z$ ។ គេបាន៖

i- បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះ $g\circ f$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

ii- បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍ពេញ នោះ $g\circ f$ ជាអនុវត្តន៍ពេញ

iii- បើ f និង g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះ $g\circ f$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ហើយ $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់ (ទុកជាលំហាត់)

ផ្នែកឥតប្រែតាមអនុវត្តន៍ (Parties Invariant by mapping)

និយមន័យ៖ គេឱ្យ $f:E\to E$ ជាអនុវត្តន៍ និង A ជាផ្នែកមួយនៃ E ។ គេថា A ជាផ្នែកឥតប្រែតាមអនុវត្តន៍ f លុះត្រាតែ $f(A)=A$ ។

ឧទាហរណ៍១៖ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:E\to E$ ដែល $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ដោយ

$f=\{(1,3),(2,7),(3,1),(4,1),(5,4),(7,2)\}$ ។ យក $A=\{1,2,3,7\}$

គេបាន $f(A)=\{3,7,1,2\}=A$ ដូច្នេះ A ហៅថាផ្នែកឥតប្រែតាមអនុវត្តន៍ f ។

ឧទាហរណ៍២៖ គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=x^{2023}$ ។

យក $A=\{-1,0,1\}$ គេបាន $f(A)=\{-1,0,1\}=A$

ដូច្នេះ A ហៅថាផ្នែកឥតប្រែតាមអនុវត្តន៍ f ។

លំហាត់

84. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)=x^3$$

(a). គណនា $f(3)$, $f(-2)$, $f(x+1)$, $f(x+h)$ និង $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ។

(b). គូស f លើដ្យាក្រាមកូអ័រដោណេនៃ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ។

85. តាង $f(x)=2x^2-6x+2$ និង $g(x)=7x^2+5x$ ចូរកំណត់អនុគមន៍ $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $4g(x)$ និង $(f^2-g^2)(x)$ ។

86. គេឱ្យអនុគមន៍ $g(x)=2x^2-3x+1$ រកតម្លៃ k បើ $g(2-k)=g(k-2)$ ។

87. បើ $f(x)=x^3+1$ និង $g(x)=x^2+x$ កំណត់តម្លៃ x ដើម្បីឱ្យ $f=g$ ។

88. សង់ក្រាហ្វនៃទំនាក់ទំនង $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|=1\}$ ។

89. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=2x-5$ ។ បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ f^{-1} ។

90. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ កំណត់ដោយ $g(x)=5^x$ ។ បង្ហាញថា g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ g^{-1} ។

91. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $h(x)=\ln x$ ។ បង្ហាញថា h ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ h^{-1} ។

92. គេឱ្យសំណុំ $A=\{1,2,3\}$ និង $B=\{a,b,c,d\}$ ចូរកំណត់ថាតើណាខ្លះជាអនុគមន៍ពី A ទៅ B ។

ក. $f_1=\{(1,a),(2,b)\}$ ខ. $f_2=\{(1,b),(2,a),(2,c),(3,d)\}$

គ. $f_3=\{(1,a),(2,b),(3,d)\}$ ឃ. $f_4=\{(1,b),(2,c),(3,c)\}$ ។

93. សន្និដ្ឋានថាទំនាក់ទំនងនីមួយៗខាងក្រោមជាអនុគមន៍ ឬទេ?

$$b_1=\{(x,y):|x|+|y|<3\ ,\ (x,y)\in\mathbb{C}^2\}$$
$$b_2=\{(x,y):-2x+y=1\ ,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

94. គេឱ្យ $f(x)=2x-1$, $g(x)=|x|+2$, $h(x)=5$ និង $I(x)=x$ ។ រក៖

ក. $f(-3)$ ខ. $g(-5)$ គ. $h(0)$

ឃ. $I(2)$ ង. $\dfrac{f(2)-g(0)}{I(-1)}$ ច. $f(2a)$ ។

95. គេឱ្យ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ កំណត់ដោយ $f(x)=3^{x+2}$ ។ រក $\dfrac{f(x+1)}{f(x-2)}$ ។

96. គេឱ្យ $f:A\to B$, $f(x)=\dfrac{x}{3}+2$ ។ បើ $A=\{-6,-3,0\}$ រកសំណុំរូបភាព $f(A)$ រួចបង្ហាញទំនាក់ទំនងដោយប្រើដ្យាក្រាមព្រួញ។

97. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=3x-2$ ។ បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ច្រាស f^{-1} ។

98. គេឱ្យ $f:A\to B$, $f(x)=2x+1$ ។ បើ $B=f(A)=\{-5,-3,7\}$ នោះរក A រួចបង្ហាញទំនាក់ទំនងដោយប្រើដ្យាក្រាមវិន។

99. គេឱ្យអនុគមន៍ $f=\{(1,2),(2,2),(3,4),(5,6),(6,1)\}$ រក៖

ក. ដែនកំណត់។ ខ. សំណុំរូបភាព។

គ. តម្លៃនៃផលបូក $f(1)+f(3)+f(6)$ ។

100. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍៖

ក. $f(x)=x^2+x$ ខ. $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$ គ. $f(x)=\sqrt{x+2}$

ឃ. $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}$ ង. $f(x)=\sqrt[3]{1-x}$ ។

101. រកដែនកំណត់ នៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ ខ. $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

គ. $f(x)=\sqrt{x-1}$ ឃ. $f(x)=x^2+2x$ ។

102. រកដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $f_1=\{(0,a),(1,b),(2,c)\}$

ខ. $f_2=\{(-1,1),(1,1),(2,0),(3,5)\}$

គ. $f_3=\{(-1,1),(-2,2),(-3,3),(-4,4)\}$

ឃ. $f_4=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0)\}$ ។

103. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = 2x^2 + 3x$ និង $g(x) = 3x - 4$ ។ រក៖

ក. $2f(x) - g(x)$ ខ. $f(x) \cdot g(x)$ គ. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ។

104. លើសំណុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$ គេកំណត់អនុគមន៍ $f(x) = 3 - x^2$ និង $g(x) = \sqrt{3} + x$ ។ រក៖

ក. $(f + g)(x)$ ខ. $(f - g)(x)$ គ. $(f \cdot g)(x)$ ឃ. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ។

105. គេឱ្យ $f(x) = 2x + 5$ និង $g(x) = \begin{cases} 1 - xe & \text{បើ } x \geq 1 \\ 2 - x^2e & \text{បើ } x < 1 \end{cases}$ ។ រក $(f + g)(-2)$, $(2f - g)(1)$ និង $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$ ។

106. គេកំណត់អនុគមន៍ $f = \{(1,2),(2,5),(3,6)\}$ និង $g = \{(1,-1),(3,0),(2,4)\}$ ពីសំណុំ $A = \{1,2,3\}$ ទៅ $\mathbb{R}$ ។ ចូររកអនុគមន៍ $f + g$ ។

107. គេឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1$ ។ សរសេរ $f(3x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(x)$ ។

108. រក $f(-1) + f(0) + f(2)$ បើ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{បើ } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{បើ } x > 0 \end{cases}$ ។

109. គេឱ្យ $f(x) - f(x - 1) = 3$ និង $f(1) = 1$ ។ រក៖

ក. $f(4)$ ខ. $f(32)$ គ. $f(2023)$ ។

110. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : (-\infty, 0] \to B$ កំណត់ដោយ $f(x) = x^2 + 1$ ។

ក. កំណត់សំណុំ B ។

ខ. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ច្រាស f^{-1} ។

111. គេឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 5$ ។ រក $f(32)$ ។

112. គេមាន f និង g ជាពីរអនុគមន៍កំណត់ពី $A = \{0,1\}$ ទៅ $B = \{2,3\}$ ។ បើ $f(x) = x + 2$ និង $g(x) = x^2 + 2$ ។ បង្ហាញថា $f = g$ ។

113. រក $\frac{f(x + 1) - f(x - 1)}{b^2 - 1}$ បើ $f(x) = b^x$ ដែល $b > 1$ ។

114. គេឱ្យ $f : A \to B$ និង $f(x) = 2x^2 - 1$ ។

ក. រក B បើ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ខ. រក A បើ $B = \{-1, 1, 7, 17, 31\}$ ។

115. រកដែនកំណត់នៃអនុគមន៍៖

ក. $f(x) = \frac{x+5}{x^2-16}$ ខ. $f(x) = \sqrt{4-2x}$ គ. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ។

116. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f:[0,+\infty)\to B$ កំណត់ដោយ $f(x) = x^2+1$ ។

ក. កំណត់សំណុំ B ។

ខ. បង្ហាញថាអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ រួចរកអនុវត្តន៍ច្រាស f^{-1} ។

117. អនុគមន៍ f កំណត់ពី $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 2^x + 3^x$ និងអនុគមន៍ $g(x) = \frac{f(x)}{f(x-1)}$ ។

ក. រក $g(0)$ ។ ខ. រក $g(2)$ ។

118. លើសំណុំនៃចំនួនពិត $\mathbb{R}$ គេកំណត់អនុគមន៍ $f(x) = x-1$ និង $g(x) = 2x+3$ រក៖

ក. $(f+g)(x)$ ខ. $(f-g)(x)$ គ. $(f\cdot g)(x)$ ឃ. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ។

119. អនុគមន៍ f កំណត់ពី $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = 3x-1$ ។

ក. រក $f(x+1)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(x)$ ។

ខ. រក $f(2x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(x)$ ។

គ. រក $f(x+1)$ ជាអនុគមន៍នៃ $f(2x)$ ។

លំហាត់សារឡើងវិញ

120. តើអំណះអំណាងខាងក្រោមណាខ្លះពិត? ណាខ្លះមិនពិត?

ក. សំណុំពីរស្មើគ្នាលុះត្រាតែពួកវាមានបញ្ជីធាតុដូចគ្នា ។

ខ. បើ A ជាសំណរងនៃ B ហើយ B ជាសំណុំរងនៃ A នោះ A និង B ស្មើគ្នា។

គ. សំណុំទទេគឺជាសំណុំរងនៃគ្រប់សំណុំទាំងអស់លើកលែងតែខ្លួនឯង ។

ឃ. $A - A = \emptyset$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ។

ង. $A \cup A = A \cap A$ ចំពោះគ្រប់សំណ A ។

ច. $A \subseteq A$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ។

ឆ. $\{a, b\} = \{b, a\}$

ជ. $\{a, b\} = \{b, a, b\}$

ឈ.បើ $A - B = C - B$ នោះ $A = C$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ។

ញ.បើ $A - B = A - C$ នោះ $B = C$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ។

121. ចំពោះសំណុំ A ខាងក្រោម ចូរសរសេរវាទៅជាសំណុំដែលកំណត់ដោយលក្ខណៈរួមនៃធាតុ៖

ក. $A = \{0,2,4,6,8,10\}$

ខ. $A = \{1, -1\}$

គ. $A = \{-1, -2, -3, \ldots\}$

ឃ. $A = \{1,4,9,16,25, \ldots\}$ ។

122. គេឱ្យ $A = \{2,7,11\}$ និង $B = \{1,2,9,10,11\}$ ។ តើសំណើខាងក្រោមពិត ឬមិនពិត?

ក. $2 \subseteq A$

ខ. $\{11,2,7\} \subseteq A$

គ. $2 = A \cap B$

ឃ. $\{7,11\} \in A$

ង. $A \subseteq B$

ច. $\{7,11,2\} = A$ ។

123. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។ តើសំណើខាងក្រោមពិត ឬមិនពិត?

ក. $B \cup A \subseteq A$ ខ. $B \cap A \subseteq A \cup B$ គ. $\emptyset \subseteq A$

ឃ. $0 \in \emptyset$ ង. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ច. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

ឆ. $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$ ជ. $\{\emptyset\} = \emptyset$ ឈ. $\emptyset \in \emptyset$

ញ. $\emptyset \subseteq \emptyset$ ។

124. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A និង B ។ តើសំណើខាងក្រោមពិត ឬមិនពិត?

ក. $A \cap A' = \emptyset$ ខ. $A \cap \emptyset = A \cup \emptyset$

គ. $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$ ឃ. $A \cup (B' \cap C') = A \cup (B \cup C)'$

ង. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ ច.$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

ឆ. $A \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ជ.$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

125. កំណត់សំណុំនីមួយៗខាងក្រោមចំពោះ

$$U = \{0,1,2,3,\dots,10\}$$
$$A = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$B = \{0,2,4,6,8,10\}$$
$$C = \{2,3,5,7\}$$

ក. $A \cup B$ ខ. $A \cap C$ គ. $A' \cup B$

ឃ. $A \cap B \cap C$ ង. $A' \cap B \cap C$ ច. $A \cup (B \cap C)$

ឆ. $A \cap (B \cup C)$ ជ. $(A \cup B')'$ ឈ. $A - B$

ញ. $B - A$ ដ. $A - (B - C)$ ឋ. $C - (B - A)$

ឌ. $(A - B) \cap (C - B)$ ឍ. $(A - B) \cap (A - C)$ ។

126. គេឱ្យ A ជាសំណុំមួយក្នុងសំណុំសកល U ។ តើសំណុំខាងក្រោមណាខ្លះស្មើនឹង A ; $A¢$; U ឬ $\emptyset$?

ក. $A \cap A$ ខ. $A \cup A$ គ. $A \cap A'$

ឃ. $A \cup A'$ ង. $A \cup \emptyset$ ច. $A \cap \emptyset$

ឆ. $A \cap U$ ជ. $A \cup U$ ឈ. $U \cup A'$

ញ. $A - \emptyset$ ដ. $\emptyset'$ ឋ. U'

ឌ. $(A')'$ ឍ. $\emptyset - A$ ។

127. សរសេរសំណុំស្វ័យគុណ $\mathrm{P}(A)$ ចំពោះសំណុំ A នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $A = \{a\}$ ខ. $A = \{0,1\}$ គ. $A = \{a, b, c\}$

ឃ. $A = \{1,2,3,4\}$ ង. $A = \{1, \{1\}\}$ ច. $A = \{\{1\}\}$

ឆ. $A = \{\emptyset\}$ ជ. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ។

128. ពិពណ៌នាបំណែកពីរនៃសំណុំនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $\{x|x$ ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប $\}$ ខ. $\{a, b, c, d\}$

គ. $\{1,5,9,11,15\}$ ឃ. $\{x|x$ ជាចំនួនកុំផ្លិច $\}$ ។

129. សរសេរគ្រប់បំណែកផ្សេងៗគ្នានៃសំណុំ A ដូចខាងក្រោម៖

ក. $A = \{1,2,3\}$ ខ. $A = \{1,2,3,4\}$ ។

130. គេឱ្យសំណុំ A មាន n ធាតុ ដែល n ជាចំនួនគត់មិនអវិជ្ជមាន ។

ក. តើមានប៉ុន្មានធាតុនៅក្នុងសំណុំស្វ័យគុណ $\mathrm{P}(A)$?

ខ. បើ $0 \leq k \leq n$ តើមានប៉ុន្មានធាតុនៃសំណុំស្វ័យគុណ $\mathrm{P}(A)$ ដែលមាន k ធាតុ?

131. ចូរកំណត់លក្ខខណ្ឌទូទៅដែល A និង B ជាសំណុំរងនៃ U ដើម្បីឱ្យសមភាពខាងក្រោមផ្ទៀងផ្ទាត់ជានិច្ច ។

ក. $A \cap B = A$ ខ. $A \cup B' = A$ គ. $A \cup B = A$ ឃ. $A \cap B' = A$

ង. $A \cap B = U$ ច. $A' \cap B' = \emptyset$ ឆ. $A \cup \emptyset = U$ ជ. $A' \cap U = \emptyset$ ។

132. គេឱ្យ $\mathbb{Z}$ គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ហើយ $A = \{x|x = 3p - 2$ ចំពោះគ្រប់ $p \in \mathbb{Z}\}$ និង $B = \{x|x = 3q + 1$ ចំពោះគ្រប់ $q \in \mathbb{Z}\}$ ។ បង្ហាញថា $A = B$ ។

133. គេឱ្យ $\mathbb{Z}$ គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ហើយ $C = \{x|x = 3r - 1$ ចំពោះគ្រប់ $r \in \mathbb{Z}\}$ និង $D = \{x|x = 3s + 2$ ចំពោះគ្រប់ $s \in \mathbb{Z}\}$ ។ បង្ហាញថា $C = D$ ។

134. ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ; B និង C ចូរបង្ហាញថា៖

ក. $A \cap B \subseteq A \cup B$ | ខ. $(A')' = A$
គ. បើ $A \subseteq B$ និង $B \subseteq C$ នោះ $A \subseteq C$ | ឃ. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $B' \subseteq A'$
ង. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | ច. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
ឆ. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ | ជ. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
ឈ. $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$ | ញ. $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
ដ. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$ | ឋ. បើ $A \subseteq B$ នោះ $A \cup C \subseteq B \cup C$
ឌ. បើ $A \subseteq B$ នោះ $A \cap C \subseteq B \cap C$ | ឍ. $B - A = B \cap A'$
ណ. $A \cap (B - A) = \emptyset$ | ត. $A \cup (B - A) = A \cup B$
ថ. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ | ទ. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
ធ. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cup B = B$ | ន. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cap B = A$ ។

135. បញ្ជាក់ ឬបដិសេធថា $A \cup B = A \cup C$ នាំឱ្យ $B = C$ ។
136. បញ្ជាក់ ឬបដិសេធថា $A \cap B = A \cap C$ នាំឱ្យ $B = C$ ។
137. បញ្ជាក់ ឬបដិសេធថា $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B)$ ។
138. បញ្ជាក់ ឬបដិសេធថា $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cap \mathrm{P}(B)$ ។
139. បញ្ជាក់ ឬបដិសេធថា $\mathrm{P}(A - B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$ ។
140. សរសេរកន្សោម $(A \cup B) - (A \cap B)$ ទៅជាអនុគមន៍នៃសំណុំសកល និងប្រសព្វដែលមាន A ; $A\not c$; B និង $B\not c$ ។
141. គេតាងប្រមាណវិធីបូកនៃសំណុំដែលកំណត់ដោយ $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃសំណុំសកល U ។ ដោយប្រើដ្យាក្រាមវិនចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា៖

ក. $A + B = (A - B) \cup (B - A)$

ខ. $A + (B + C) = (A + B) + C$

គ. $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ ។

142. ចំពោះប្រមាណវិធីបូកសំណុំដែលកំណត់នៅលំហាត់ 22 ។ ចូរបង្ហាញថា៖

ក. $A + A = \emptyset$ | ខ. $A + \emptyset = A$ ។

143. ដាក់ស្លាកឱ្យអំណះអំណាងខាងក្រោមដែលពិត ឬមិនពិត ។

ក. $A \times A = A$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ។

ខ. $A \times \emptyset = \emptyset$ ចំពោះគ្រប់សំណុំ A ។

គ. គេឱ្យ $f: A \to B$ ដែល A និង B មិនទទេ នោះ $f^{-1}(f(S)) = S$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង S នៃ A ។

ឃ. គេឱ្យ $f: A \to B$ ដែល A និង B មិនទទេ នោះ $f(f^{-1}(T)) = T$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង T នៃ B ។

ង. គេឱ្យ $f: A \to B$ នោះ $f(A) = B$ ចំពោះគ្រប់សំណុំមិនទទេ A និង B ។

ច. គ្រប់អនុវត្តន៍មួយទល់មួយគឺវាជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ និងពេញ ។

ឆ. អនុវត្តន៍មួយជាអនុវត្តន៍ពេញលុះត្រាតែដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពរបស់វាស្មើគ្នា ។

ជ. គេឱ្យ $g: A \to A$ និង $f: A \to A$ នោះ $(f \circ g)(a) = (g \circ f)(a)$ ចំពោះគ្រប់ a ក្នុង A

ឈ. បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍មានលក្ខណៈផ្តុំ ។

144. គេឱ្យ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ដែល $\mathbb{Z}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប ។ បើ f កំណត់ដោយ $f = \{(a, 2-a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ចូរបង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ។

145. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $h(x) = \dfrac{x-2}{2}$ បើ x ជាចំនួនគូ និង $h(x) = \frac{x-3}{2}$ បើ x ជាចំនួនសេស ។ ចូរបង្ហាញថា h ជាអនុវត្តន៍ពេញ តែមិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់

146. សរសេរផលគុណដេកាតខាងក្រោមចំពោះសំណុំដែលគេឱ្យនីមួយៗ៖

ក. $A \times B$; $A = \{a, b\}$ & $B = \{0, 1\}$

ខ. $B \times A$; $A = \{a, b\}$ & $B = \{0, 1\}$

គ. $A \times B$; $A = \{2, 4, 6, 8\}$ & $B = \{2\}$

ឃ. $B \times A$; $A = \{1, 5, 9\}$ & $B = \{-1, 1\}$

ង. $B \times A$; $A = B = \{1, 2, 3\}$ ។

147. ចំពោះអនុវត្តន៍នីមួយៗខាងក្រោម ចូរបញ្ជាក់ដែនកំណត់ និងសំណុំរូបភាពដែល $f: E \to \mathbb{Z}$ ។

ក. $f(x) = \dfrac{x}{2}$; $x \in E$

ខ. $f(x) = x$; $x \in E$

គ. $f(x) = |x|$; $x \in E$

ឃ. $f(x) = x + 1$; $x \in E$ ។

148. ចំពោះអនុវត្តន៍នីមួយៗខាងក្រោម ចូរកំណត់ $f(S)$ និង $f^{-1}(T)$ ចំពោះសំណុំ S និង T ដែល

ឱ្យ ហើយ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ។

ក. $f(x) = |x|$; $S = \mathbb{Z} - E$ & $T = \{1, 3, 4\}$

ខ. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$; $S = \{0,1,5,9\}$ & $T = ¢ - E$

គ. $f(x) = x^2$; $S = \{-2,-1,0,1,2\}$ & $T = \{2,7,11\}$

ឃ. $f(x) = |x| - x$; $S = T = \{-7,-1,0,2,4\}$ ។

149. គេឱ្យអនុវត្តន៍ $f : ¢ ® ¢$ ។ សិក្សាក្នុងករណីខាងក្រោមថាតើជាអនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់
ឬទេ?

ក. $f(x) = 2x$ ខ. $f(x) = 3x$ គ. $f(x) = x + 3$

ឃ. $f(x) = x^3$ ង. $f(x) = |x|$ ច. $f(x) = x - |x|$

ឆ. $f(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x-1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ជ.

$f(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ x-1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ឈ. $f(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ញ. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ។

150. ចំពោះអនុវត្តន៍ $f : ¡ ® ¡$ ខាងក្រោម ចូរកំណត់ថាតើវាជាអនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ឬទេ?
(ប្រៀបធៀបលទ្ធផលនេះជាមួយផ្នែកត្រូវរៀងគ្នានៃលំហាត់ 30)

ក. $f(x) = 2x$ ខ. $f(x) = 3x$ គ. $f(x) = x + 3$

ឃ. $f(x) = x^3$ ង. $f(x) = |x|$ ច. $f(x) = x - |x|$ ។

151. ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃ $\mathbb{R}$ គេឱ្យ $f(x) = 2x$ ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ $f : A \to B$ ជា
អនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ ឬទេ? ($\mathbb{N}$ គឺជាសំណុំនៃចំនួនគត់គូ)

ក. $A = \mathbb{R}\ ; B = \mathbb{N}$ ខ. $A = B = \mathbb{N}$ ។

152. ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃ $\mathbb{R}$ គេឱ្យ $f(x) = |x|$ ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ $f : A \to B$ ជា
អនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ ឬទេ?

ក. $A = \mathbb{R}\ ; B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ខ. $A = \mathbb{R}^+\ ; B = \mathbb{R}$

គ. $A = \mathbb{R}^+\ ; B = \mathbb{R}^+$ ឃ. $A = \mathbb{R} - \{0\}\ ; B = \mathbb{R}^+$ ។

153. ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃ $\mathbb{R}$ គេឱ្យ $f(x) = |x + 4|$ ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ $f : A \to B$
ជាអនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ ឬទេ?

ក. $A = \mathbb{R}\ ; B = \mathbb{R}$ ខ. $A = \mathbb{R}^+\ ; B = \mathbb{R}^+$ ។

154. ចំពោះសំណុំរង A និង B នៃ $\mathbb{R}$ គេឱ្យ $f(x) = 2^x$ ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ $f : A \to B$
ជាអនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ ឬទេ?

ក. $A = \mathbb{R}^+\ ; B = \mathbb{R}$ ខ. $A = \mathbb{R}^+\ ; B = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{N}$ ។

155. ចំពោះគេឱ្យ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ចូរកំណត់ថាតើអនុវត្តន៍ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ឬទេ? បង្ហាញថាការ
សន្និដ្ឋានរបស់អ្នកគឺត្រឹមត្រូវ ។

ក. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 0 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ខ. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

គ. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ \dfrac{x + 1}{2} & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ឃ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ \dfrac{x - 3}{2} & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ង. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ច. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ។

156. គេឱ្យ $A = \mathbb{R} - \{0\}$ និង $B = \mathbb{R}$ ។ ចំពោះ $f : A \to B$ ចូរកំណត់ថាតើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ
និងប្រកាន់ ឬទេ? បង្ហាញថាការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកគឺត្រឹមត្រូវ ។

ក. $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ខ. $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ គ. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ឃ. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$

157. គេឱ្យ $f : A \to B$ ។ កំណត់ថាតើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ និងប្រកាន់ឬទេ ? បង្ហាញថាការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នកគឺត្រឹមត្រូវ ។

ក. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ & $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $f(x,y) = (y,x)$

ខ. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ & $B = \mathbb{Z}$; $f(x,y) = x + y$

គ. $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ & $B = \mathbb{Z}$; $f(x,y) = x$

ឃ. $A = \mathbb{Z}$ & $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $f(x) = (x,1)$

ង. $A = \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ & $B = \mathbb{Q}$; $f(x,y) = \frac{x}{y}$

ច. $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ & $B = \mathbb{R}$; $f(x,y) = 2^{x+y}$ ។

158. គេឱ្យ $f : \mathbb{Z} \to \{-1,1\}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ -1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

គ. បង្ហាញថា $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ ។

ឃ. បង្ហាញថា $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2)$ ។

159. គេឱ្យ $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ កំណត់ដោយ $g(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ \frac{x+1}{2} & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ។

ក. ចំពោះ $S = \{3,4\}$ រក $g(S)$ និង $g^{-1}(g(S))$ ។

ខ. ចំពោះ $T = \{5,6\}$ រក $g^{-1}(T)$ និង $g(g^{-1}(T))$ ។

160. គេឱ្យ f : ¢ ® ¢ កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ បើ} x \text{ គូ} \\ 2x \text{ បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ។

ក. ចំពោះ $S = \{0,1,2\}$ រក $f(S)$ និង $f^{-1}(f(S))$ ។

ខ. ចំពោះ $T = \{-1,1,4\}$ រក $f^{-1}(T)$ និង $f(f^{-1}(T))$ ។

161. គេឱ្យ f : ¢ ® ¢ និង g : ¢ ® ¢ កំណត់ដូចខាងក្រោម។ ក្នុងករណីនីមួយៗ ចូរកំណត់

$(f \circ g)(x)$ ចំពោះ x Î ¢ ។

ក. $f(x) = 2x \ ; \ g(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x - 1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$ ខ. $f(x) = 2x \ ; \ g(x) = x^3$

គ. $f(x) = x + |x| \ ; \ g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ -x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ឃ. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ x + 1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases} \ ; \ g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ង. $f(x) = x^2 \ ; \ g(x) = x - |x|$ ។

162. គេឱ្យ f និង g កំណត់ដូចក្នុងលំហាត់ 42 ។ ក្នុងផ្នែកនីមួយៗខាងលើ ចូរកំណត់ $(g \circ f)(x)$ ចំពោះ x Î ¢ ។

163. គេឱ្យ m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន ។ A គឺជាសំណុំដែលមាន m ជាតុ ហើយ B គឺជាសំណុំដែលមាន n ជាតុ ។

ក. តើមានអនុវត្តន៍ប៉ុន្មានពី A ទៅ B ?

ខ. បើ $m = n$ តើមាន one-to-one correspondences ប៉ុន្មានពី A ទៅ B ?

គ. បើ $m \leq n$ តើមានអនុវត្តន៍ប្រកាន់ប៉ុន្មានពី A ទៅ B ?

164. គេឱ្យ a និង b ជាចំនួនគត់ថេរដែល $a \neq 0$ ហើយមានអនុវត្តន៍ f : ¢ ® ¢ កំណត់ដោយ $f(x) = ax + b$ ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

ខ. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ពេញលុះត្រាតែ $a = 1$ ឬ $a = -1$ ។

165. គេឱ្យ $f : A$ ® B ដែល A និង B ជាសំណុំមិនទទេ ។

ក. បង្ហាញថា $f(S_1 \cup S_2) = f(S_1) \cup f(S_2)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង S_1 និង S_2 នៃ A ។

ខ. បង្ហាញថា $f(S_1 \cap S_2) \subseteq f(S_1) \cap f(S_2)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង S_1 និង S_2 នៃ A ។

គ. ឱ្យឧទាហរណ៍មួយដែលមានសំណុំរង S_1 និង S_2 នៃ A ផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(S_1 \cap S_2) \neq f(S_1) \cap f(S_2)$ ។

ឃ.បង្ហាញថា $f(S_1) - f(S_2) \subseteq f(S_1 - S_2)$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង S_1 និង S_2 នៃ A ។

ង. ឱ្យឧទាហរណ៍មួយដែលមានសំណុំរង S_1 និង S_2 នៃ A ផ្ទៀងផ្ទាត់

$f(S_1) - f(S_2) \neq f(S_1 - S_2)$ ។

166. គេឱ្យ $f : A$ ® B ដែល A និង B ជាសំណុំមិនទទេ ហើយ T_1 និង T_2 ជាសំណុំរងនៃ B ។

ក. បង្ហាញថា $f^{-1}(T_1 \cup T_2) = f^{-1}(T_1) \cup f^{-1}(T_2)$ ។

ខ. បង្ហាញថា $f^{-1}(T_1 \cap T_2) = f^{-1}(T_1) \cap f^{-1}(T_2)$ ។

គ. បង្ហាញថា $f^{-1}(T_1) - f^{-1}(T_2) = f^{-1}(T_1 - T_2)$ ។

ឃ. បង្ហាញថា បើ T_1 Í T_2 នោះ $f^{-1}(T_1)$ Í $f^{-1}(T_2)$ ។

167. គេឱ្យ $g : A$ ® B និង $f : B$ ® C ។ បង្ហាញថា $(f \circ g)^{-1}(T) = g^{-1}(f^{-1}(T))$ ចំពោះគ្រប់សំណុំរង T នៃ C ។

168. តើអំណះអំណាងខាងក្រោមណាពិត? ណាមិនពិត?

ក. បណ្តាក់នៃអនុវត្តន៍មានលក្ខណ៍ត្រឡប់ ។

ខ. បណ្តាក់នៃពីរអនុវត្តន៍មួយទល់មួយគឺជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ។

គ. គេមាន $f\,;g$ និង h ជាបីអនុវត្តន៍ពី A ទៅ A ។ បើ $f \circ g = h \circ g$ នោះ $f = h$ ។

ឃ.គេមាន $f\,;g$ និង h ជាបីអនុវត្តន៍ពី A ទៅ A ។ បើ $f \circ g = f \circ h$ នោះ $g = h$ ។

ង. គេឱ្យ $g : A$ ® B និង $f : B$ ® C ។ បើ $f\, o\, g$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ នោះទាំងពីរ f និង g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

ច. គេឱ្យ $g : A$ ® B និង $f : B$ ® C ។ បើ $f \circ g$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ នោះទាំងពីរ f និង g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

169. ចំពោះគូអនុវត្តន៍ $f :$ ¢ ® ¢ និង $g :$ ¢ ® ¢ តើអនុវត្តន៍ $f\, o\, g$ មួយទល់មួយ ឬប្រកាន់ ឬទេ?

ក. $f(x) = 2x$; $g(x) = \begin{cases} x & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x - 1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ខ. $f(x) = 2x$; $g(x) = x^3$

គ. $f(x) = x + |x|$; $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ -x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ឃ. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ x + 1 & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{បើ } x \text{ គូ} \\ 2x & \text{បើ } x \text{ សេស} \end{cases}$

ង. $f(x) = x^2$; $g(x) = x - |x|$ ។

170. ចំពោះគូ $f ; g$ ក្នុងលំហាត់ 50 តើអនុវត្តន៍ $g \circ f$ មួយទល់មួយ ឬប្រកាន់ ឬទេ?

171. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែលមានមួយនៃ f ឬ g មិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ប៉ុន្តែ $f \circ g$ ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

172. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែលមានមួយនៃ f ឬ g មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ប៉ុន្តែ $f \circ g$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

173. ក. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែល f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ហើយ g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយប៉ុន្តែ $f \circ g$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

ខ. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែល f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ហើយ g ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយប៉ុន្តែ $f \circ g$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

174. ក. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ហើយ g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ប៉ុន្តែ $f \circ g$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

ខ. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍នៃអនុវត្តន៍ f និង g ដែល f ជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ហើយ g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ប៉ុន្តែ $f \circ g$ មិនមែនជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ ។

175. គេឱ្យ $f ; g$ និង h ជាអនុវត្តន៍ក្នុងសំណុំ A ។

ក. បង្ហាញថា បើ g មួយទល់មួយ ហើយ $f \circ g = h \circ g$ នោះ $f = h$ ។

ខ. បង្ហាញថា បើ f ប្រកាន់ ហើយ $f \circ g = f \circ h$ នោះ $g = h$ ។

176. ក. រកអនុវត្តន៍ $f ; g$ និង h ក្នុងសំណុំ A ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f \circ g = h \circ g$ ហើយ $f \neq h$ ។

ខ. រកអនុវត្តន៍ f ; g និង h ក្នុងសំណុំ A ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f \circ g = f \circ h$ ហើយ $g \neq h$ ។

177. គេឱ្យ $g : A \to B$ និង $f : B \to C$ ។ បង្ហាញថា បើ $f \circ g$ មួយទល់មួយ នោះ f មួយទល់មួយ ។

178. គេឱ្យ $g : A \to B$ និង $f : B \to C$ ។ បង្ហាញថា បើ g ប្រកាន់ លុះត្រាតែ $f \circ g$ ប្រកាន់។

179. តើអំណះអំណាងខាងក្រោមណាពិត? ណាមិនពិត?

ក. គ្រប់អនុវត្តន៍ក្នុងសំណុំមិនទទេ A គឺជាទំនាក់ទំនង ។

ខ. គ្រប់ទំនាក់ទំនងក្នុងសំណុំមិនទទេ A គឺជាអនុវត្តន៍ ។

គ. បើ r គឺជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុងសំណុំមិនទទេ A នោះថ្នាក់សមមូលផ្សេងគ្នានៃ r គឺជាបំណែកនៃ A ។

ឃ. បើ r ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុងសំណុំមិនទទេ A នោះគ្រប់ពីរថ្នាក់សមមូលនៃ r មានចំនួនធាតុស្មើគ្នា ។

ង. គេមាន r ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុងសំណុំមិនទទេ A ហើយ a និង b ជាធាតុក្នុង A ។ បើ $b \in [a]$ នោះ $[b] = [a]$ ។

180. ចំពោះ $A = \{1, 3, 5\}$ កំណត់ថាតើទំនាក់ទំនងខាងក្រោមក្នុង A ជាអនុវត្តន៍ពី A ទៅ A ឬទេ?

ក. $\{(1,3), (3,5), (5,1)\}$	ខ. $\{(1,1), (3,1), (5,1)\}$	គ. $\{(1,1), (1,3), (1,5)\}$
ឃ. $\{(1,3), (3,1), (5,5)\}$	ង. $\{(1,5), (3,3), (5,3)\}$	ច. $\{(5,1), (5,3), (5,5)\}$

181. ក្នុងករណីនីមួយៗក្នុងផ្នែកខាងក្រោម។ ទំនាក់ទំនង r កំណត់ក្នុងសំណុំ $\mathbb{Z}$ នៃគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប។ កំណត់ថាក្នុងករណីនីមួយៗ r មាន ឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង?

ក. $x\rho y$ លុះត្រាតែ $x = 2y$	ខ. xry លុះត្រាតែ $x = -y$
គ. $x\rho y$ លុះត្រាតែ $y = kx$ ចំពោះ $k \in \mathbb{Z}$	ឃ. xry លុះត្រាតែ $x < y$
ង. xry លុះត្រាតែ $x \geq y$	ច. $x\rho y$ លុះត្រាតែ $x = \|y\|$
ឆ. xry លុះត្រាតែ $\|x\| \leq \|y + 1\|$	ជ. xry លុះត្រាតែ $xy \geq 0$
ឈ. $x\rho y$ លុះត្រាតែ $xy \leq 0$	ញ. xry លុះត្រាតែ $\|x - y\| = 1$
ដ. xry លុះត្រាតែ $\|x - y\| < 1$ ។	

182. គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងកំណត់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow |x| = |y|$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

ខ. ចូរសរសេរធាតុនៃថ្នាក់សមមូល $[3]$ ។

183. គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនង "កុងគ្រុយអង់ម៉ូឌុយឡូ 4" កំណត់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដោយ $x\rho y \Leftrightarrow x - y = 4k$ ឬសរសេរ $x \equiv y(\mod 4) \Leftrightarrow x - y = 4k$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

ក. បង្ហាញថាទំនាក់ទំនង ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

ខ. ចូរសរសេរ 5 ធាតុនៃថ្នាក់សមមូល $[7]$ ។

184. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនង "កុងគ្រុយអង់ម៉ូឌុយឡូ 5" កំណត់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដោយ x កុងគ្រុយអង់ y ម៉ូឌុយឡូ 5 លុះត្រាតែ $x - y$ ជាពហុគុណនៃ 5 ហើយគេកំណត់សរសេរ $x \equiv y(\mod 5)$ ។

ក. បង្ហាញថា "កុងគ្រុយអង់ម៉ូឌុយឡូ 5" ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

ខ. ចូរសរសេរ 5 ធាតុនៃថ្នាក់សមមូលនីមួយៗ $[0]; [1]; [2]; [8]$ និង $[-4]$ ។

185. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនង "កុងគ្រុយអង់ម៉ូឌុយឡូ 7" កំណត់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដោយ x កុងគ្រុយអង់ y ម៉ូឌុយឡូ 7 លុះត្រាតែ $x - y$ ជាពហុគុណនៃ 7 ហើយគេកំណត់សរសេរ $x \equiv y(\mod 7)$ ។

ក. បង្ហាញថា "កុងគ្រុយអង់ម៉ូឌុយឡូ 7" ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។

ខ. ចូរសរសេរ 5 ធាតុនៃថ្នាក់សមមូលនីមួយៗ $[0]; [1]; [3]; [9]$ និង $[-2]$ ។

186. ទំនាក់ទំនង r កំណត់ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដូចខាងក្រោម។ ក្នុងករណីនីមួយៗចូរបង្ហាញថា r ជាទំនាក់ទំនងសមមូល ។ រកថ្នាក់សមមូលផ្សេងៗគ្នានៃ r ហើយសរសេរបញ្ជីធាតុរបស់វានីមួយៗឱ្យបានយ៉ាងតិច 4 ធាតុ ។

ក. xry លុះត្រាតែ $x^2 + y^2$ ជាពហុគុណនៃ 2 ។

ខ. xry លុះត្រាតែ $x^2 - y^2$ ជាពហុគុណនៃ 5 ។

គ. xry លុះត្រាតែ $x + 3y$ ជាពហុគុណនៃ 4 ។

ឃ. $x\rho y$ លុះត្រាតែ $3x - 10y$ ជាពហុគុណនៃ 7 ។

ង. xry លុះត្រាតែ $(-1)^x = (-1)^y$ ។

187. គេឱ្យសំណុំ $P(A)-\{\emptyset\}$ នៃគ្រប់សំណុំរងមិនទទេនៃ $A=\{1,2,3,4,5\}$ ។ កំណត់ថាទំនាក់ទំនង r ដែលឱ្យក្នុង $P(A)-\{\emptyset\}$ មានឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង ?

ក. ArB លុះត្រាតែ A ជាសំណុំរងនៃ B ។

ខ. ArB លុះត្រាតែ A ជាសំណុំរងផ្ទាល់នៃ B ។

គ. ArB លុះត្រាតែ A និង B មានចំនួនធាតុស្មើគ្នា ។

188. ក្នុងផ្នែកនីមួយៗខាងក្រោម។ ទំនាក់ទំនងកំណត់ក្នុងសំណុំនៃគ្រប់មនុស្សទាំងអស់ ។ កំណត់ថាទំនាក់ទំនង r ដែលឱ្យមានឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង ?

ក. xry លុះត្រាតែ x រស់នៅចម្ងាយ 400 km ពី y ។

ខ. xry លុះត្រាតែ x គឺជាឪពុកនៃ y ។

គ. xry លុះត្រាតែ x គឺជាបងប្អូនជីដូនមួយដំបូងនៃ y ។

ឃ. xry លុះត្រាតែ x និង y កើតក្នុងឆ្នាំតែមួយ។

ង. xry លុះត្រាតែ x និង y មានម្ដាយតែមួយ។

ច. xry លុះត្រាតែ x និង y មានសក់ពណ៌ដូចគ្នា។

189. គេឱ្យ $A=\mathbb{R}-\{0\}$ គឺជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនពិតមិនសូន្យ ហើយ r គឺជាទំនាក់ទំនងក្នុង $A \times A$ ។ តើទំនាក់ទំនង r ក្នុងករណីនីមួយៗគឺជាទំនាក់ទំនងសមមូល ឬទេ ?

ក. $(a,b)r(c,d)$ លុះត្រាតែ $ad=bc$ ។

ខ. $(a,b)r(c,d)$ លុះត្រាតែ $ab=cd$ ។

គ. $(a,b)r(c,d)$ លុះត្រាតែ $a^2+b^2=c^2+d^2$ ។

ឃ. $(a,b)r(c,d)$ លុះត្រាតែ $a-b=c-d$ ។

190. គេឱ្យ $A=\{1,2,3,4\}$ ហើយកំណត់ r ក្នុង $P(A)-\{\emptyset\}$ ដោយ ArB លុះត្រាតែ $A\cap B\neq\emptyset$ ។ តើទំនាក់ទំនង r មាន ឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង ?

191. ក្នុងផ្នែកនីមួយៗខាងក្រោម ទំនាក់ទំនង r កំណត់ក្នុងសំណុំស្វ័យគុណ $P(A)$ នៃសំណុំមិនទទេ A ។ កំណត់ក្នុងករណីនីមួយៗថាតើ r មាន ឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង ?

ក. ArB លុះត្រាតែ $A\cap B\neq\emptyset$ ។

ខ. ArB លុះត្រាតែ $A\subseteq B$ ។

192. គេឱ្យ $\mathrm{P}(A)$ គឺជាសំណុំស្វ័យគុណនៃសំណុំមិនទទេ A ហើយ C តំណាងឱ្យសំណុំរងថេរមួយនៃ A ។ គេកំណត់ r ក្នុង $\mathrm{P}(A)$ ដោយ ArB លុះត្រាតែ $A \cap C = B \cap C$ ។ បង្ហាញថា r ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathrm{P}(A)$ ។

193. ចំពោះករណីនីមួយៗខាងក្រោម ទំនាក់ទំនង r កំណត់ក្នុងសំណុំ A នៃគ្រប់ត្រីកោណក្នុងប្លង់។ ចូរកំណត់ថាតើ r មាន ឬទេលក្ខណៈខ្លួនឯង, លក្ខណៈឆ្លុះ ឬលក្ខណៈឆ្លង?

ក. arb លុះត្រាតែ a ដូចទៅនឹង b ។

ខ. arb លុះត្រាតែ a កុងគ្រុយអង់ទៅនឹង b ។ (ត្រីកោណពីរក្នុងគ្រុយអង់គ្នាគឺជាត្រីកោណដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា)។

194. ចូរឱ្យឧទាហរណ៍មួយនៃទំនាក់ទំនង r ក្នុងសំណុំមិនទទេ A ដែលមានលក្ខណៈឆ្លុះ និងលក្ខណៈឆ្លង តែពុំមានលក្ខណៈខ្លួនឯង ។

195. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនងមួយក្នុងសំណុំមិនទទេ A ហៅថា irreflexive បើ $x\not\rho x$ គ្រប់ $x \in A$ ។ តើទំនាក់ទំនងក្នុងណាខ្លះក្នុងលំហាត់ 62 ដែល irreflexive?

196. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនងមួយក្នុងសំណុំមិនទទេ A ហៅថា asymmetric បើគ្រប់ x និង y ក្នុងA, xry នាំឱ្យ $y\not\rho x$ ។ តើទំនាក់ទំនងក្នុងណាខ្លះក្នុងលំហាត់ 62 ដែល asymmetric?

197. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនងមួយក្នុងសំណុំមិនទទេ A ហៅថា antisymmetric បើគ្រប់ x និងy ក្នុង$A, x\rho y$ និង yrx នាំឱ្យ $x = y$ ។(មានន័យថា r គឺ antisymmetric បើ $x \neq y$ នាំឱ្យ $x\not\rho y$ ឬ $y\not\rho x$) ។ តើទំនាក់ទំនងក្នុងណាខ្លះក្នុងលំហាត់ 62 ដែល antisymmetric?

198. ចំពោះទំនាក់ទំនង r ក្នុងសំណុំមិនទទេ A ។ ចម្រាសនៃ r គឺជាទំនាក់ទំនង ρ^{-1} កំណត់ដោយ $x\rho^{-1}y$ លុះត្រាតែ $y\rho x$ ។ ចូរបង្ហាញថាអំណះអំណាងខាងក្រោម៖

ក. r មានលក្ខណៈឆ្លុះ លុះត្រាតែ $\rho = \rho^{-1}$ ។

ខ. r មានលក្ខណៈឆ្លុះស្មើ លុះត្រាតែ $\rho \cap \rho^{-1}$ គឺជាសំណុំរងនៃ $\{(a,a) | a \in A\}$ ។

គ. r ជា asymmetric លុះត្រាតែ $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$ ។

199. គេឱ្យ $\mathscr{L} = \{1,2,3\}$; $A_1 = \{a,b,c,d\}$; $A_2 = \{c,d,e,f\}$ និង $A_3 = \{a,c,f,g\}$ ។ ចូរសរសេរ $\cup_{\lambda\in L} A_\lambda$ និង $\cap_{\lambda\in L} A_\lambda$ ។

200. គេឱ្យ $\mathscr{L} = \{a,b,g\}$; $A_a = \{1,2,3,\mathrm{K}\}$; $A_b = \{-1,-2,-3,\mathrm{K}\}$ និង $A_\gamma = \{0\}$ ។ ចូរសរសេរ $\cup_{\lambda\in L} A_\lambda$ និង $\cap_{\lambda\in L} A_\lambda$ ។

201. សម្រួលសំណើដូចខាងក្រោមតាមដែលអ្នកអាចធ្វើបាន៖

ក. $(\pi > 0) \wedge (\pi < 10)$ ខ.$(3 < 4) \wedge (3 < 6)$

គ. $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$ ឃ.$(\pi > 0) \vee (\pi > 1)$

ង. $(\pi < 0) \vee (\pi > 0)$ ។

202. តើសំណើខាងក្រោមណាខ្លះពិត? ណាខ្លះមិនពិត?

ក. $(\pi^2 > 2) \Rightarrow (\pi > 1.4)$ ខ.$(\pi^2 < 0) \Rightarrow (\pi = 3)$

គ. $(\pi^2 > 0) \Rightarrow (1 + 2 = 4)$ ឃ.$(\pi < \pi^2) \Rightarrow (\pi = 5)$

ង. $(e^2 \geq 0) \Rightarrow (e < 0)$ ច.¬[(5 គឺជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប) ⇒ $(5^2 \geq 1)$]

ឆ. (ផ្ទៃក្រឡានៃរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ 1 គឺ π) ⇒ (3 ជាចំនួនបឋម)

ជ. បើការេមានជ្រុងបី នោះត្រីកោណមានជ្រុងបួន ។

ឈ. បើដំរីអាចឡើងដើមឈើ នោះ 3 ជាចំនួនអសនិទាន ។

ញ. បើសេះដុះស្នែង នោះចតុកោណកែងមានជ្រុងបួន ។

203. ចូរសរសេរសំណើឈ្នាប់មិននៃសំណើនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. 34159 ជាចំនួនបឋម ។

ខ. ផ្កាកូឡាបទាំងអស់មានពណ៌ក្រហម និង ផ្កា violets ទាំងអស់មានពណ៌ខៀវ ។

គ. បើមិនមាន hamburgers នោះខ្ញុំនឹងមាន hot dog ។

ឃ. ចំនួន x គឺជាចំនួនអវិជ្ជមាន ឬធំជាង 10 ។

ង. យើងនឹងឈ្នះការប្រកួតនៅលើកទី១ ឬទី២ ។

204. តើលក្ខខណ្ឌណាខ្លះខាងក្រោមណាគឺជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់សម្រាប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n ចែកដាច់នឹង 6 ?

ក. n ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. n ចែកដាច់នឹង 9 ។

គ. n ចែកដាច់នឹង 12 ។

ឃ. $n = 24$ ។

ង. n^2 ចែកដាច់នឹង 3 ។

ច. n ជាចំនួនគត់គូ ហើយចែកដាច់នឹង 3 ។

205. ក្នុងលំហាត់ 85 តើលក្ខខណ្ឌណាខ្លះជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ n ចែកដាច់នឹង 6 ?

206. ក្នុងលំហាត់ 85 តើលក្ខខណ្ឌណាខ្លះជាលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ n ចែកដាច់នឹង 6 ?

207. គេឱ្យ $m\ ;n$ ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិពីរ ។ បង្ហាញថា mn ជាចំនួនគត់សេសលុះត្រាតែ m និង n ជាចំនួនគត់សេស ។

208. ដោយយោងលំហាត់ 88 តើវាពិតឬទេថា mn ជាចំនួនគត់គូលុះត្រាតែ m និង n ជាចំនួនគត់គូ ?

209. បង្ហាញថា p Ü q គឺសមមូលនឹង $\bar{p}$ Û $\bar{q}$ ។ តើវាទាក់ទងនឹងចម្លើយរបស់អ្នកចំពោះលំហាត់ 88 និង 89 ខាងលើយ៉ាងដូចម្តេច ?

210. សង់តារាងភាពពិតបង្ហាញពីសំណើខាងក្រោម៖

ក. p Ü q ខ. p Þ $(q$ Ú $p)$ ។

211. ដោយប្រើតារាងភាពពិតចូរបង្ហាញថាសំណើខាងក្រោមសមមូលគ្នា៖

ក. $\neg(p \Rightarrow q)$ និង $q \wedge (\neg p)$

ខ. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ និង $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

គ. $(p \vee q) \Rightarrow r$ និង $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ។

212. ផ្ទៀងផ្ទាត់ភាពសមមូលនៃលំហាត់ 92 ដោយប្រើវិចារ (argument)។

213. ប្រើតារាងភាពពិតបង្ហាញថាសំណើ $p \Rightarrow q$ និង $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ សមមូលគ្នា ។

214. ប្រើតារាងភាពពិតបង្ហាញថាសំណើ $p \Rightarrow q$ និង $q \Rightarrow p$ មិនសមមូលគ្នា ។ ឱ្យឧទាហរណ៍មួយនៃសំណោះ p និង q ដែល $p \Rightarrow q$ ជាសំណើពិត ប៉ុន្តែ $q \Rightarrow p$ មិនពិត ។

215. ចូរកំណត់សម្មតិកម្ម និងការសន្និដ្ឋានក្នុងលក្ខខណ្ឌនីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. បើផ្លែប៉ោមមានពណ៌ក្រហម នោះផ្លែក្រូចមានពណ៌បៃតង ។

ខ. ភាពមានដេរីវេនៃអនុគមន៍ f គឺជាលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ f ជាអនុគមន៍ជាប់ ។

គ. ស្វ៊ីត (u_n) ជាស្វ៊ីតទាល់ កាលណា (u_n) រួម ។

ឃ. វាគឺចាំបាច់ណាស់ថា n ជាចំនួនបឋម ដើម្បីឱ្យ $2^n - 1$ ជាចំនួនបឋម ។

216. តើគូនៃអនុគមន៍សំណើខាងក្រោមណាខ្លះដែលសមមូលគ្នា ?

ក. $\neg(p \vee q)$ និង $\neg p \wedge \neg q$ ខ. $\neg p \vee \neg q$ និង $\neg(p \vee \neg q)$

គ. $\neg(p \wedge q)$ និង $\neg p \vee \neg q$ ឃ. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ និង $(p \wedge q) \Rightarrow r$

ង. $\neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$ និង $\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Rightarrow r)$ ។

217. សរសេរអំណះអំណាងខាងក្រោមដោយប្រើបរិមាណករ "មាន"

ក. សមីការ $x^3 = 27$ មានចម្លើយជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ខ. 1000000 គឺមិនមែនជាចំនួនគត់ធម្មជាតិធំបំផុត ។

គ. ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n មិនមែនជាចំនួនបឋម។

218. សរសេរអំណោះអំណាងខាងក្រោមដោយប្រើបរិមាណករ "គ្រប់"

ក. សមីការ $x^3 = 28$ មិនមានចម្លើយជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ខ. 0 តូចជាងចំនួនគត់ធម្មជាតិទាំងអស់ ។

គ. ចំនួនគត់ធម្មជាតិ n គឺជាចំនួនបឋម។

219. សរសេរអំណះអំណាងខាងក្រោមដោយប្រើបរិមាណករ ។

ក. មនុស្សគ្រប់រូបស្រឡាញ់នរណាម្នាក់ ។

ខ. មនុស្សគ្រប់គ្នាខ្ពស់ ឬ គ្រប់គ្នាទាប ។

គ. មនុស្សគ្រប់គ្នាខ្ពស់ ឬទាប ។

ឃ. បើបុរសមក គ្រប់ស្ត្រីនឹងចាកចេញ ។

220. សរសេរអំណះអំណាងខាងក្រោមដោយប្រើបរិមាណករ ។

ក. សមីការ $x^2 + a = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតចំពោះចំនួនពិត a ណាមួយ ។

ខ. សមីការ $x^2 + a = 0$ មានឫសជាចំនួនពិតចំពោះចំនួនអវិជ្ជមាន a ណាមួយ ។

គ. រាល់ចំនួនពិតគឺជាចំនួនសនិទាន ។

ឃ. មានចំនួនអសនិទានមួយ ។

ង. មិនមានចំនួនអសនិទានធំបំផុតទេ ។

221. បកប្រែសំណើខាងក្រោមទៅជាទម្រង់និមិត្តសញ្ញាដោយប្រើបរិមាណករ ។ ក្នុងករណីនីមួយៗសន្មតដែនគេគេឱ្យក្នុងវង់ក្រចក ។

ក. គ្រប់សិស្សទាំងអស់ចូលចិត្ត pizza ។ (គ្រប់ប្រជាជន)

ខ. ម្នាក់នៃមិត្តរបស់ខ្ញុំមិនមានឡាន ។ (គ្រប់ប្រជាជន)

គ. ដំរីខ្លះមិនចូលចិត្តនំដុត ។ (គ្រប់សត្វ)

ឃ. រាល់ត្រីកោណគឺសមបាត ។ (គ្រប់រូបធរណីមាត្រ)

ង. សិស្សក្នុងថ្នាក់នេះខ្លះមិនមកទេថ្ងៃនេះ ។ (គ្រប់ប្រជាជន)

222. តើសំណើខាងក្រោមណាពិត? ដែនកំណត់សម្រាប់ផ្នែកនីមួយៗគឺឱ្យនៅក្នុងវង់ក្រចក ។

ក. $\forall x : x + 1 \geq x$ (ចំនួនពិត) ខ. $\exists x : 2x + 3 = 5x + 1$ (ចំនួនគត់ធម្មជាតិ)

គ. $\exists x : x^2 + 1 = 2^x$ (ចំនួនពិត) ឃ. $\exists x : x^2 = 2$ (ចំនួនសនិទាន)។

ង. $\exists x : x^2 = 2$ (ចំនួនពិត) ច. $\forall x : x^3 + 17x^2 + 6x + 100 \geq 0$ (ចំនួនពិត)

ឆ. $\exists x : x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0$ (ចំនួនពិត) ជ. $\forall x \exists y : x + y = 0$ (ចំនួនពិត)

ឈ. $\exists x \forall y : x + y = 0$ (ចំនួនពិត) ញ. $\forall x \exists! y : y = x^2$ (ចំនួនពិត)

ដ. $\forall x \exists! y : y = x^2$ (ចំនួនគត់ធម្មជាតិ) ឋ. $\forall x \exists y \forall z : xy = xz$ (ចំនួនពិត)

ឌ. $\forall x \exists y \forall z : xy = xz$ (ចំនួនបឋម) ឍ. $\forall x \exists y : x \geq 0 \Rightarrow y^2 = x$ (ចំនួនពិត)

ណ. $\forall x : x < 0 \Rightarrow \exists y : (y^2 = x)$ (ចំនួនពិត) ត. $\forall x : x < 0 \Rightarrow \exists y : (y^2 = x)$ (ចំនួនពិតវិជ្ជមាន) ។

223. បដិសេធសំណើខាងក្រោម ហើយដាក់ចម្លើយនីមួយៗទៅក្នុងទម្រង់វិជ្ជមាន។

ក. $(\forall x \in \text{¥})(\exists y \in \text{¥}) : x + y = 1$

ខ. $(\forall x > 0)(\exists y < 0) : x + y = 0$ (ដែល x,y ជាចំនួនពិត)

គ. $\exists x (\forall e > 0) : -e < x < e$ (ដែល x,y ជាចំនួនពិត)

ឃ. $(\forall x \in \text{¥})(\forall y \in \text{¥})(\exists z \in \text{¥}) : x + y = z^2$ ។

224. ស្រាយបញ្ជាក់ថា មានចំនួនអសនិទាន a និង b ដែល a^b ជាចំនួនសនិទាន ។

225. ស្រាយថា បើ $x > 0$ នោះគ្រប់ $n \in \text{¥}$; $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$ ។

226. ស្រាយថាគ្រប់ចំនួនគត់ធម្មជាតិធំជាង 1 អាចជាចំនួនបឋម ឬផលគុណនៃចំនួនបឋម ។

227. និយាយថារាល់ចំណុចខាងក្រោមពិត ឬមិនពិត ហើយធ្វើការស្រាយបញ្ជាក់ដើម្បីគាំទ្រការសន្និដ្ឋានរបស់អ្នក ។

ក. មានចំនួនពិត x និង y ដែល $x + y = y$ ។

ខ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n ; $n^2 + n + 41$ ជាចំនួនបឋម ។

គ. $\forall x \exists y : x + y = 0$ (ដែល $x ; y$ ជាចំនួនពិត)។

ឃ. $(\exists m \in \text{¥})(\exists n \in \text{¥}) : 3m + 5n = 12$ ។

ង. គ្រប់ចំនួនគត់ $a ; b ; c$ បើ a ជាតួចែកនៃ bc នោះ a ជាតួចែកនៃ b ឬ a ជាតួចែកនៃ c ។

ច. ផលបូកនៃប្រាំចំនួនគត់តគ្នាគឺជាពហុគុណនៃ 5 ។

ឆ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n ចំនួន $n^2 + n + 1$ គឺជាចំនួនគត់សេស ។

ជ. ចន្លោះពីរចំនួនសនិទានពីរផ្សេងគ្នា មានចំនួនសនិទានទីបី ។

ឈ.ចំពោះចំនួនពិត $x\,;y$ បើ x ជាចំនួនសនិទាន និង y ជាចំនួនអសនិទាន នោះ $x + y$ ជាចំនួនអសនិទាន។

ញ.ចំពោះចំនួនពិត $x\,;y$ បើ $x + y$ ជាចំនួនអសនិទាន នោះមួយយ៉ាងតិចនៃ $x\,;y$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

ដ. ចំពោះចំនួនពិត $x\,;y$ បើ $x + y$ ជាចំនួនសនិទាន នោះមួយយ៉ាងតិចនៃ $x\,;y$ ជាចំនួនសនិទាន ។

228. បង្ហាញថា $\sqrt{3}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

229. បង្ហាញថា បើ p ជាចំនួនបឋម នោះ $\sqrt{p}$ ជាចំនួនអសនិទាន ។

230. បង្ហាញថា $\sqrt{n}$ ជាចំនួនអសនិទានលុះត្រាតែ n មិនមែនជាការេប្រាកដ ។

231. គេឱ្យ m និង n ជាចំនួនគត់វ៉ឺឡាទីប ។ បង្ហាញថា៖

ក. បើ m និង n ជាចំនួនគូ នោះ $m + n$ ជាចំនួនគូ ។

ខ. បើ m និង n ជាចំនួនគូ នោះ mn ចែកដាច់នឹង 4 ។

គ. បើ m និង n ជាចំនួនសេស នោះ $m + n$ ជាចំនួនគូ ។

ឃ. បើមួយនៃ $m\,;n$ ជាចំនួនគូ និងមួយសេស នោះ $m + n$ ជាចំនួនសេស ។

ង. បើមួយនៃ $m\,;n$ ជាចំនួនគូ និងមួយសេស នោះ mn ជាចំនួនគូ ។

232. បង្ហាញថាគ្រប់ចំនួនគត់គូធម្មជាតិធំជាង 2 គឺជាផលបូកនៃពីរចំនួនបឋម ហើយគ្រប់ចំនួនគត់សេសធម្មជាតិធំជាង 5 គឺជាផលបូកនៃបីចំនួនបឋម ។ (Goldbach Conjecture)

233. ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា៖

ក. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$ ខ. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

គ. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{r=1}^{n} 2^r = 2^{n+1} - 2$ ឃ. $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{r=1}^{n} r \cdot r! = (n+1)! - 1$

234. ស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើវិចារអនុមានរួមគណិតវិទ្យា៖

ក. $\forall n \in \mathbb{N} : 4^n - 1$ ចែកដាច់នឹង 3 ។

ខ. ផលបូកនៃ n ចំនួនគត់សេសធម្មជាតិដំបូងគឺស្មើនឹង n^2 ។

គ. $(n+1)! > 2^{n+3}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ $n \geq 5$ ។

ឃ. បើសំណុំ A មាន n ធាតុ នោះសំណុំស្វ័យគុណ $\mathrm{P}(A)$ មាន 2^n ធាតុ ។

235. ចំពោះគូនៃសំណុំ A និង B ខាងក្រោម ចូររកសំណុំ $A \cup B$ និង $A \cap B$ ៖

ក. $A = \{a,b,c\}$; $B = \{c,d,e,f\}$ ខ. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

គ. $A = \{1,2,\{1,2,3\}\}$; $B = \{1,\{1,2\}\}$ ។

236. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថាគ្រប់សំណុំ $A \& B$; $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ តាមពីររបៀបគឺតាមដ្យាក្រាមវិន និងតាមវិចារតក្កវិទ្យា ។

237. បង្ហាញសំណើខាងក្រោម៖

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap A = A \cup A = A$$

238. បង្ហាញថា៖

ក. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cup B = B$ ។

ខ. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A \cap B = A$ ។

គ. បើ $A \subseteq B \cup C$ និង $A \cap B = \emptyset$ នោះ $A \subseteq C$ ។

ឃ. បើ $A \subseteq C$ និង $B \subseteq C$ នោះ $A \cup B \subseteq C$ ។

ង. បើ $A \cup B \subset C \cup D$; $C \subset A$ និង $A \cap B = \emptyset$ នោះ $B \subseteq D$ ។

239. គេឱ្យសំណុំពីរ A ; B និងសំណុំផលសង $A - B$ កំណត់ដោយ

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

បង្ហាញថា៖

ក. $A - \emptyset = A$ ខ. $\emptyset - A = \emptyset$ គ. $A - B = A \cap B'$

ឃ. $A \subseteq B$ លុះត្រាតែ $A - B = \emptyset$ ង. បើ $A \subseteq B$ នោះ $A - C \subseteq B - C$ ។

240. បង្ហាញថា $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cap (B)$ និង $\mathrm{P}(A) \cup \mathrm{P}(B) \subseteq \mathrm{P}(A \cup B)$ ។

241. គេឱ្យ $A = \{1,3,5\}$; $B = \{2,4\}$ ។ រក $A \times A$; $B \times B$; $A \times B$; $B \times A$ ។

242. គេឱ្យ A និង B ជាពីរសំណុំមិនទទេ ។ បង្ហាញថា $A \times B = B \times A$ លុះត្រាតែ $A = B$ ។

243. តើលទ្ធផលនៅលំហាត់ 123 ពិតឬទេ បើមួយនៃ A ; B គឺជាសំណុំទទេ ? ចូរពន្យល់ ។

244. បង្ហាញថា បើ A ; B និង C ជាបីសំណុំមិនទទេ នោះ $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$ ។

245. បង្ហាញថា បើ A មាន m ធាតុ និង B មាន n ធាតុ នោះ $A\times B$ មាន mn ធាតុ។

246. គេកំណត់អនុវត្តន៍ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ដោយ $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$ ។

ក. គណនា $f(0)\,;\,f(1)\,;\,f(2)$ ។

ខ. តើ f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ឬទេ? ពេញ ឬទេ?

គ. រកសំណុំរូបភាពនៃ f ក្នុង a). $\mathbb{R}$ b). $\mathbb{R}^+$?

247. តើអនុវត្តន៍ខាងក្រោមណាជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់?

ក. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,f(x)=5x+6$ ខ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,f(x)=x^3$

គ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,;\,f(x)=(x,x)$ ឃ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,f(x)=\sqrt{x}$

ង. $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,f(m,n)=m-n$ ។

តើក្នុងចំណោមពួកវាណាខ្លះជាអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ?

248. គេឱ្យ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{បើ } x\geq 0\\ x-1 & \text{បើ } x<0\end{cases}$ ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

ខ. តើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ឬទេ?

គ. រកសំណុំរូបភាពនៃ f ក្នុង a). $\mathbb{R}$ b). $\mathbb{R}^+$?

249. គេឱ្យ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $f(n)=\begin{cases}2n & \text{បើ } n \text{ គូ}\\ n & \text{បើ } n \text{ សេស}\end{cases}$ ។

ក. បង្ហាញថា f ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ។

ខ. តើ f ជាអនុវត្តន៍ពេញ ឬទេ?

250. គេឱ្យ $A=\{1,3,5,7,\ldots\}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់សេសធម្មជាតិ និង $B=\{2,4,6,\ldots\}$ ជាសំណុំនៃចំនួនគត់ធម្មជាតិគូ ។ ឱ្យឧទាហរណ៍សម្រាប់អនុវត្តន៍ពី A ទៅ B ដែលៈ ក. ប្រកាន់ តែមិនពេញ ខ. ពេញ តែមិនប្រកាន់ គ. ប្រកាន់ និងពេញ ។

251. គេឱ្យ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $f(n)=\begin{cases}2 & \text{បើ } n \text{ មិនមែនចំនួនបឋម}\\ n & \text{បើ } n \text{ ជាចំនួនបឋម}\end{cases}$ ។

តាង P ជាសំណុំនៃគ្រប់ចំនួនបឋម ហើយ K ជាសំណុំនៃចំនួនមិនបឋម (ក្នុង $\mathbb{N}$) ។ ចូរផ្តល់អត្តសញ្ញាណឱ្យសំណុំ $f[\mathbb{N}]; f[P]; f[K]$ ។

252. គេឱ្យ $f: A \to B$ ។ បង្ហាញថា f មិនមែនជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ លុះត្រាតែមានធាតុ $x, y \in A$ ដែល $x \neq y$ ហើយ $f[\{x,y\}]$ មានធាតុតែមួយ ។

253. គេកំណត់ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x^2 + x + 1$ ។ រក $f[\mathbb{R}]$ និង $f[\mathbb{R}^+]$ ។

254. គេកំណត់ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{បើ } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{បើ } x < 0 \end{cases}$ និង $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ កំណត់ដោយ $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{បើ } x \geq 1 \\ 2x & \text{បើ } x < 1 \end{cases}$ ។ រករូបមន្តសម្រាប់អនុវត្តន៍ $g \circ f$ និង $f \circ g$ ។ ដោយប្រើឧទាហរណ៍នេះ ចូរបង្ហាញថា $g \circ f = f \circ g$ គឺមិនពិតជាទូទៅទេ ។

255. គេកំណត់ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ និង $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = x^2$ និង

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{បើ } x > 0 \\ -10 & \text{បើ } x \leq 0 \end{cases}$$

ក. រក $g \circ f$; $f \circ g$ ។

ខ. ចូរកំណត់ថាអនុវត្តន៍ f ; g ; $f \circ g$; $g \circ f$ ណាខ្លះជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់? ពេញ? មួយទល់មួយ?

គ. រកសំណុំរូបភាពនៃ f ; g ; $f \circ g$; $g \circ f$ ។

256. គេកំណត់ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដោយ $f(x) = \sin x$ និង $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ដោយ $g(x) = 2x^2 + 1$ ។ រក $f \circ g$ និង $g \circ f$ រួចកំណត់សំណុំរូបភាពនៃ f ; g ; $f \circ g$; $g \circ f$ ។

257. គេឱ្យ $A = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2\}, \{2,5\}, \{3,4,5\}\}$ ។ គេកំណត់ $f: A \to \mathbb{N}$ ដោយ

$f(a) =$ ផលបូកនៃធាតុនៃ a $(\forall a \in A)$

ក. រក $f[A]$ ។

ខ. គេកំណត់ $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ដោយ $g(x)=\begin{cases}\text{ចំនួនបឋមធំបំផុត} \le n & \text{បើ } n>1\\ 1 & \text{បើ } n=1\end{cases}$ ។

a). រក $g\circ f$ និងកំណត់អត្តសញ្ញាណនៃសំណុំរូបភាពរបស់វា ។

b). តើ g ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ឬទេ? តើ $g\circ f$ ជាអនុវត្តន៍ប្រកាន់ ឬទេ?

258. គេឱ្យ r ជាទំនាក់ទំនងក្នុង $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ $m\rho n$ លុះត្រាតែ 3 ជាតួចែកនៃ $m-n$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{N}$ ។

ខ. រក $[1];[2];[3];[4];[5];[6]$ ។

គ. តើមានថ្នាក់សមមូលទាំងអស់ប៉ុន្មាន ? បញ្ជាក់ចម្លើយរបស់អ្នក ។

259. គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងក្នុង $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ mrn លុះត្រាតែ 3 ជាតួចែកនៃ $m+n$ ។ បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{N}$ ។

260. គេឱ្យ ρ ជាទំនាក់ទំនងក្នុង $\mathbb{R}$ កំណត់ដោយ xry លុះត្រាតែ $x^2=y^2$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{R}$ ។

ខ. រក $[0];[2];[49]$ ។

គ. បង្ហាញថាមានថ្នាក់សមមូលច្រើនរាប់មិនអស់ ។

261. គេឱ្យចំនួនគត់ $p\ge 1$ និងកំណត់ទំនាក់ទំនង ρ ក្នុង $\mathbb{Z}$ ដោយ mrn លុះត្រាតែ p ជាតួចែកនៃ $m-n$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{Z}$ ។

ខ. រក $[0];[1];[-1],[p],[-p];[p+1]$ ។

គ. បង្ហាញថា $[0];[1];[2];\ldots;[p-1]$ គឺជាថ្នាក់សមមូលផ្សេងៗគ្នា ។

ឃ. បង្ហាញថា $[0];[1];[2];\ldots;[p-1]$ គឺជាថ្នាក់សមមូលទាំងអស់ ។

262. កំណត់ ρ ក្នុង $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ដោយ $(m,n)\rho(p,q)$ លុះត្រាតែ $mq=np$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

ខ. ចូរឱ្យបីធាតុនៃថ្នាក់សមមូលថ្នាក់សមមូលនីមួយៗ $[(1,1)];[(1,2)];[(2,5)]$ ។

គ. ចូរឱ្យរកសំណុំបំពេញនៃ $[(p,q)]$ ចំពោះគូ (p,q) ក្នុង $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ។

263. គេកំណត់ទំនាក់ទំនង ρ ក្នុង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ដោយ $(x,y)\rho(u,v)$ លុះត្រាតែ $3x-y=3u-v$ ។

ក. បង្ហាញថា ρ ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ។

ខ. រក $[(4,5)]$; $[(0,0)]$ ។

គ. ចូរពណ៌នា $[(a,b)]$ ចំពោះតម្លៃថេរណាមួយនៃ a ; b ក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ និងតាមធរណីមាត្រ។

264. គេកំណត់ទំនាក់ទំនង ρ ក្នុង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ដោយ $(x,y)\rho(u,v)$ លុះត្រាតែ $x^2+y^2=u^2+v^2$ ។

ក. បង្ហាញថា r ជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ។

ខ. រក $[(0,0)]$; $[(1,1)]$; $[(3,4)]$ ។

គ. ចូរពណ៌នា $[(a,b)]$ ចំពោះតម្លៃថេរណាមួយនៃ a ; b ក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ និងតាមធរណីមាត្រ។

265. ចូរពិពណ៌នាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $\mathbb{Z}$ កំណត់ដោយបំណែក $\{A,B\}$ ដែល $A=\{x \mid x £ 0\}$; $B=\{x \mid x>0\}$ ។

266. ចូរពិពណ៌នាសំណុំនៃគូមានលំដាប់ ទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុង $A=\{1,2,3,4,5\}$ ពាក់ព័ន្ធជាមួយបំណែកខាងក្រោម៖

ក. $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ ខ. $\{\{1\},\{2\},\{3,4,5\}\}$ គ. $\{\{1,2,3,4\},\{5\}\}$ ។

267. ចូររកឧទាហរណ៍មកផ្ទុយសំណើខាងក្រោម៖

ក. គ្រប់រូបធរណីមាត្រដែលមានមុំកែងបួនគឺជាការេ ។

ខ. បើចំនួនពិតមួយមិនវិជ្ជមាន នោះវាត្រូវតែជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។

គ. គ្រប់មនុស្សដែលមានសក់ពណ៌ក្រហម គឺមានភ្នែកពណ៌បៃតង ឬ ខ្ពស់ ។

ឃ. គ្រប់មនុស្សដែលមានសក់ពណ៌ក្រហម គឺមានភ្នែកពណ៌បៃតង និង ខ្ពស់ ។

268. ចូររកឧទាហរណ៍មកផ្ទុយសំណើខាងក្រោម៖

ក. បើ a និង b ជាចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីបដែល $a\mid b$ និង $b\mid a$ នោះ $a=b$ ។

ខ. បើ $n^2>0$ នោះ $n>0$ ។

គ. បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ n^2+1 ជាចំនួនបឋម ។

ឃ. បើ n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន នោះ $n^3>n!$ ។

ង. ចំនួន n ជាចំនួនគត់សេស លុះត្រាតែ $3n+5$ ជាចំនួនគត់គូ ។

ច. ចំនួន n ជាចំនួនគត់គូ លុះត្រាតែ $3n+2$ ជាចំនួនគត់គូ ។

ឆ. ផលបូកនៃចំនួនគត់គូពីរគឺជាពហុគុណនៃ 4 ។

269. បង្ហាញថា៖

ក. បើ $n = 25$; 100 ឬ 169 នោះ n គឺជាការេប្រាកដ ហើយជាផលបូកនៃពីរការេប្រាកដ។

ខ. បើ n ជាចំនួនគត់គូ ហើយ $4 \le n \le 12$ នោះ n ជាផលបូកនៃពីរចំនួនបឋម ។

គ. គ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន n តូចជាង ឬស្មើ 3 ; $n! < 2^n$ ។

ឃ. ចំពោះ ចំនួនគត់ n ដែល $2 \le n \le 4$; $n^2 \ge 2^n$ ។

ង. ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់គូ គឺជាចំនួនគត់គូ ។ (ស្រាយតាមពីររបៀប)

ច. ផលបូកនៃពីរចំនួនគត់សេស គឺជាចំនួនគត់គូ ។ (ស្រាយតាមពីររបៀប)

ឆ. ផលបូកនៃចំនួនគត់គូ និងចំនួនគត់សេស គឺជាចំនួនគត់សេស ។

ជ. បើ n ជាចំនួនគត់គូ នោះ $n^2 - 1$ ជាចំនួនគត់សេស ។

ឈ. ផលគុណនៃចំនួនគត់ពីរតគ្នាគឺជាចំនួនគត់គូ ។

ញ. ផលបូកនៃចំនួនគត់មួយជាមួយការេរបស់វាគឺជាចំនួនគត់គូ ។

ដ. ការេនៃចំនួនគត់គូគឺចែកដាច់នឹង 4 ។

ឋ. ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រ៉ឺឡាទីប n ចំនួន $3(n^2 + 2n + 3) - 2n^2$ ជាការេប្រាកដ ។

ឌ. បើ x ជាចំនួនវិជ្ជមាន នោះ $x + 1$ ជាចំនួនវិជ្ជមាន ។

ឍ. បើ n ជាចំនួនគត់សេស នោះវាគឺជាផលសងនៃពីរការេប្រាកដ ។

ណ. ចំនួន n គឺជាចំនួនគត់សេសលុះត្រាតែ $3n + 5 = 6k + 8$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

ត. ចំនួន n គឺជាចំនួនគត់គូលុះត្រាតែ $3n + 2 = 6k + 2$ ដែល $k \in \mathbb{Z}$ ។

ឯកសារយោង

[1] ឈឹម ម៉េង ពិជគណិតទូទៅ បោះពុម្ពលើកទី១ ២០១១ កម្ពុជា

[2] យឹម អាយុវឌ្ឍនះវិជ្ជា ពីជគណិតអរូបី១ បោះពុម្ពលើកទី២ ២០១៤ កម្ពុជា

[3] ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា គណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ បោះពុម្ពលើកទី១ ២០២៣ កម្ពុជា

[4] W. Keith Nicholson Introduction to ABSTRACT ALGEBRA, 4th edition 2012.

[5] WILLEM CONRADIE&VALENTIN GORANKO Logic and Discrete Mathematics (A Concise Introduction), 1st edition 2015.

[6] JUDITH L. GERSTING Mathematical Structures for Computer Science, 7th edition 2014.

[7] Gilbert Elements of Modern Algebra, 7th edition 2009.

[8] Keith Devlin SETS, FUNCTIONS and LOGIC (an introduction to abstract mathematics) 3rd edition 2005.