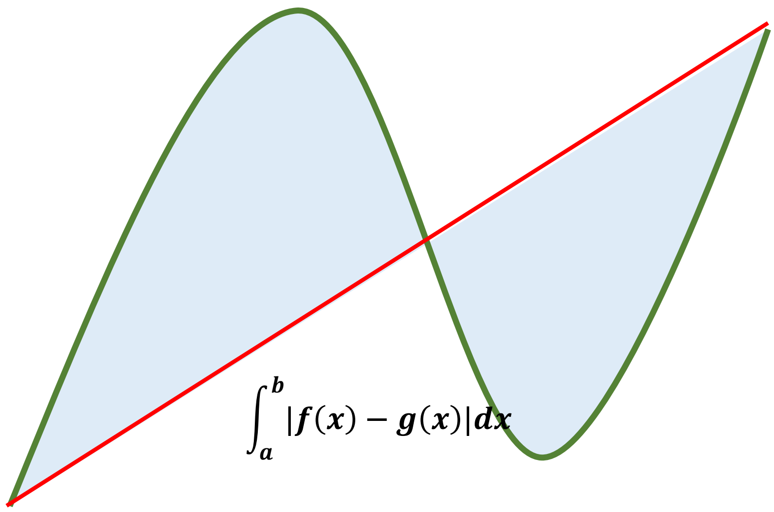
គណិតវិទ្យាគណនា២



រៀបរៀងដោយៈ គាំទ្រថវិកាលើការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អដោយៈ

“មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍”

២០២២

គណៈកម្មានិពន្ធដោយ៖ ជុំ វាសនា

គណៈកម្មការរចនាទំព័រ៖ លោកស្រី សំបាត់ អ៊ាត លោកស្រី ឈុំ ពៅ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យ៖

១. លោក ជា សុទ្ធ

២. លោក ឯក លីម

៣. លោក ស៊ួស សុភាព

បុព្វកថា

ដំណើរអភិវឌ្ឍនៃព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជានៅក្នុងយុគសម័យទំនើបនេះ ជាមេរៀនដ៏ជោគជ័យបំផុតមួយដែលចាប់ឬសគល់ចេញពីការបញ្ចប់របបប្រល័យពូជសាសន៍ ការបញ្ចប់សង្គ្រាម ការផ្សះផ្សារជាតិ ការកសាងមូលដ្ឋានរឹងមាំនៃសន្តិភាពនិងស្ថេរភាព និងការអភិវឌ្ឍសេដ្ឋកិច្ច។ នៅក្រោយពេលដែលសន្តិភាពត្រូវបានកើតឡើងដោយបរិបូរណ៍នៅឆ្នាំ១៩៩៨ កម្ពុជាទទួលកំណើនសេដ្ឋកិច្ចខ្ពស់ គឺប្រមាណ ៨%ក្នុងមួយឆ្នាំ។ លើសពីនេះទៀតអត្រានៃភាពក្រីក្រត្រូវបានកាត់បន្ថយពីប្រមាណ៥៣%នៅឆ្នាំ ២០០៤ មកនៅទាបជាង១០% នៅឆ្នាំ២០១៩។ ដំណើរនៃការអភិវឌ្ឍជាតិជាសកម្មភាពដែលបន្តទៅមុខជាប់ជានិច្ច ហើយគោលនយោបាយថ្មីៗដែលមានលក្ខណៈអន្តរវិស័យគ្រប់ដណ្តប់ ក៏កំពុងលេចរូបរាងឡើងដើម្បីតម្រង់ទិសកម្ពុជាឆ្ពោះទៅកាន់ប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលមធ្យមកម្រិតខ្ពស់នៅឆ្នាំ២០៣០ និងឈានឡើងជាប្រទេសមានប្រាក់ចំណូលខ្ពស់ នៅឆ្នាំ២០៥០។ ការប្រែប្រួលឆាប់រហ័សនៃនិម្មាបនកម្មពិភពលោក និងតំបន់រួមទាំងទំនាក់ទំនងភូមិសាស្ត្រនយោបាយ បានផ្តល់កាលានុវត្តភាពសម្រាប់ការអភិវឌ្ឍឧស្សាហកម្មនៅកម្ពុជា ដែលត្រូវបានរាជរដ្ឋាភិបាលចាត់ទុកជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃកំណើនសេដ្ឋកិច្ចកម្ពុជា។ រាជរដ្ឋាភិបាលកម្ពុជាបានកំពុងបន្តពង្រឹង និងអភិវឌ្ឍវិស័យអប់រំឆ្ពោះទៅរកការស្រាវជ្រាវ និងនវានុវត្តន៍ដើម្បីពង្រឹងសមត្ថភាពនិងជំនាញរបស់ធនធានមនុស្សនៅកម្ពុជាឱ្យស្របទៅនឹងបរិបទថ្មីនៃការអភិវឌ្ឍ ជាពិសេសការពង្រឹងសហគ្រិនភាពក្នុងការរៀបចំម៉ូដែលធុរកិច្ចថ្មីៗ។ ដើម្បីចាប់យកកាលានុវត្តភាពពីបដិវត្តន៍ឧស្សាហកម្មទី៤ និងសេដ្ឋកិច្ចឌីជីថលដែលកំពុងផុសផុលឡើង ប្រព័ន្ធអេកូឡូហ្ស៊ីដែលបង្កលក្ខណៈអំណោយផលដល់ការបង្កើតថ្មី នវានុវត្តន៍ ការស្រាវជ្រាវ និងអភិវឌ្ឍន៍ ត្រូវតែមានការកែលម្អ។

បណ្តាប្រទេសនៅទ្វីបអាស៊ីកំពុងនាំមុខក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ ដោយ មានភាគហ៊ុនប្រមាណ៤៤%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោក។ ប្រទេសចិនកំពង់បន្តកសាងហេដ្ឋារចនាសម្ព័ន្ធនៃការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍសមត្ថភាពមនុស្ស។ផ្ទុយទៅវិញប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូងនិងអាព្រិកកំពង់ស្ថិតនៅឆ្ងាយពីការវិនិយោគនេះហើយជាលទ្ធផល ប្រទេសទាំងនោះក៏ពុំមានកំណើនសេដ្ឋកិច្ចគួរឱ្យកត់សម្គាល់ដែរ។ ទុនវិនិយោគសរុបលើការស្រាវ ជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍរបស់ប្រទេសនៅទ្វីបអាមេរិកខាងត្បូនិងអាហ្វ្រិក មានប្រមាណ ៥%នៃការវិនិយោគទាំងមូលរបស់ពិភពលោកក្នុងពេលដែលតំបន់ទាំងពីរនេះមានមានប្រជាជនប្រមាណ២០%នៃប្រជាជនពិភពលោក។។ ប្រទេសចំនួន៦ដែលមានលំដាប់ខ្ពស់ជាងគេនៅក្នុងការវិនិយោគលើការស្រាវជ្រាវនិងអភិវឌ្ឍ រួមមានសហរដ្ឋអាមេរិក ចិន ជប៉ុន អាល្លឺម៉ង់ ឥណ្ឌា និងកូរ៉េខាងត្បូង ដែលស្មើនឹងប្រមាណ ៧០%នៃវិនិយោគទុនសរុបរបស់ពិភពលោក។

តើចំណេះដឹង ផលិតផល និងសេវាកម្មថ្មីទាំងនេះកើតឡើងពីអ្វី? ហើយកើតឡើងដោយរបៀបណា? ព្រះរាជាណាចក្រកម្ពុជាកំពុងតែកសាងមូលដ្ឋានសម្រាប់ការត្រៀមខ្លួនទទួល និងប្រកួតប្រជែងក្នុងយុគសម័យបដិវត្តឧស្សាហកម្មទី៤ នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ចដែលផ្អែកលើពុទ្ធិ ហើយដែលប្រការនេះចាំបាច់តម្រូវឱ្យពលរដ្ឋកម្ពុជា ត្រូវក្លាយខ្លួនជាពលរដ្ឋឌីជីថល ពលរដ្ឋសកល និងពលរដ្ឋដែលប្រកបដោយការទទួលខុសត្រូវ ដែលមានសមត្ថភាពក្នុងការផលិត ចែកចាយ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិដើម្បីទទួលមនុញ្ញផល និងរួមចំណែកក្នុងកំណើន។ ធនាគារពិភពលោកបានធ្វើការកត់សម្គាល់តាំងពីឆ្នាំ២០០២នូវបម្លាស់ប្តូរនៃមូលដ្ឋានសេដ្ឋកិច្ច ពីសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើកម្លាំងពលកម្ម និងធនធានអតិកម្ម (Labour and Resource Based Economy) ទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិ (Knowledge Based-Economy) ដែលក្នុងន័យនេះ ពុទ្ធិគឺជាគន្លឹះនៃការអភិវឌ្ឍ។ អាស្រ័យហេតុនេះ នៅលើគន្លងដែលកម្ពុជាកំពុងធ្វើដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សេដ្ឋកិច្ចឌីជីថល សង្គមកម្ពុជាត្រូវតែមានសមត្ថភាពក្នុងការ ផលិត ជ្រើសរើស បន្សាំ បង្កើតមុខរបរ និងប្រើប្រាស់ពុទ្ធិ ដើម្បីរក្សានិរន្តរភាពនៃកំណើន និងកែលម្អជីវភាពរស់នៅ។ សមត្ថភាពទាំងនេះ អាចកើតឡើងនៅពេលពលរដ្ឋកម្ពុជាមានឱកាសក្នុងការទទួលបានបទពិសោធន៍ពីការស្រាវជ្រាវ ការបណ្តុះគំនិតច្នៃប្រឌិត និងការស្វែងរកនវានុវត្តន៍។

កំណែទម្រង់វិស័យអប់រំ គឺជាការត្រួសត្រាយមាគ៌ាសម្រាប់ដំណើរឆ្ពោះទៅកាន់សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ និងប្រជាពលរដ្ឋប្រកបដោយភាពរស់រវើក។ តាមរយៈមូលដ្ឋានអប់រំ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិនឹងប្រមូលផ្តុំ បង្កើត និងចែករំលែក ទៅកាន់សមាជិកក្នុងសង្គមនូវសម្បទាអប់រំ ពិសេសគឺពុទ្ធិសម្បទា ក្នុងបុព្វហេតុនៃមនុស្សជាតិនិងឧត្តមប្រយោជន៍នៃប្រទេស។ សង្គមប្រកបដោយពុទ្ធិ គឺពុំគ្រាន់តែជាសង្គមដែលសម្បូរព័ត៌មានប៉ុណ្ណោះទេ តែជាសង្គមដែលប្រជាពលរដ្ឋអាចធ្វើបរិវត្តកម្មពីព័ត៌មានទៅជា មូលធនប្រកបដោយប្រសិទ្ធភាព។ ការរីកចម្រើនទៅមុខជាលំដាប់នៃបច្ចេកវិទ្យានិងតំណភ្ជាប់ បានពង្រីកព្រំដែននៃការចូលទៅកាន់ និងការទទួលបានព័ត៌មានជាសកល ហើយដែលក្នុងន័យនេះ ការអប់រំនឹងបន្តវិវត្តទៅមុខនិងមានការផ្លាស់ប្តូរ។ សង្គមមួយដែលមានអំណាន និងរបាប់ជាបុរេលក្ខខណ្ឌនៃជីវភាពប្រចាំថ្ងៃនៃប្រជាពលរដ្ឋ ពេលនោះបំណិននៃអំណាន និពន្ធ និងការគណនាលេខនព្វន្ត គឺជាចលករនៃការរៀនរបស់សិស្ស។ ធាតុដ៏ចម្បងមួយដែលស្ថិតនៅក្នុងការកសាងសង្គមដែលប្រកបដោយ ពុទ្ធិគឺសៀវភៅសិក្សា ហើយការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សាជាប្រចាំ គឺជានវានុវត្តន៍ នៃវិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។មូលដ្ឋានអប់រំ ជាពិសេសគឺគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាត្រូវមានតួនាទីដែលប្រកបដោយការឆ្លើយតប ចំពោះតម្រូវការខាងលើនេះ។ សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និង

បុគ្គលិកអប់រំត្រូវបន្តសិក្សាជាប់ជានិច្ច តាមរយៈការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ហើយដែលសៀវភៅសិក្សាទាំងនេះនឹងក្លាយជា ស្ពាននៃទំនាក់ទំនងរវាងនវានុវត្តន៍នៃបច្ចេកវិទ្យា និងការរៀននិងបង្រៀននៅក្នុងថ្នាក់រៀន។ វិស័យអប់រំដែលនាំទៅរកការសិក្សាពេញមួយជីវិត ការអភិវឌ្ឍសម្បទាអប់រំនិងការចែករំលែកចំណេះដឹង។

សង្គមដែលប្រកបពុទ្ធិ ក៏ជាសង្គមដែលបណ្តុះឱ្យមានរចនាសម្ព័ន្ធទន់នៃសេដ្ឋកិច្ចដែលពឹងផ្អែកលើពុទ្ធិដែរ។ ឧទាហរណ៍ជាក់ស្តែងនៃបែបផែននេះរួមមាន Silicon Valley នៃសហរដ្ឋអាមេរិក សួនឧស្សាហកម្មវិស្វកម្មអាកាសយានយន្តនិងយានយន្តនៅទីក្រុង Munich ប្រទេសអាល្លឺម៉ង់ តំបន់ជីវបច្ចេកវិទ្យានៅក្រុង Hyderabad ប្រទេសឥណ្ឌា តំបន់ផលិតគ្រឿងអេឡិចត្រូនិក និងសារ-គមនាគមន៍ ឌីជីថលនៅទីក្រុង Seoul ប្រទេសកូរេខាងត្បូង ក៏ដូចជាសួនឧស្សាហកម្មថាមពល និងឥន្ធនគីមីសាស្ត្រនៃប្រទេសប្រេស៊ីល ហើយក៏នៅមានទីក្រុងនៃប្រទេសជាច្រើនទៀតនៅលើពិភពលោក លក្ខណៈសម្បត្តិនៃទីក្រុងទាំងនេះគឺការប្រើប្រាស់និន្នាការនៃការអភិវឌ្ឍដែលជំរុញ និងតម្រង់ទិសដោយចំណេះដឹង ហើយដែលចំណេះដឹងទាំងនោះកើតចេញជាដំបូងពីការវិនិយោគទៅលើគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា ស្ថាប័នស្រាវជ្រាវ មជ្ឈមណ្ឌលឧត្តមភាពនៃជំនាញជាន់ខ្ពស់ ការប្រកួតប្រជែងដោយ គុណាធិបតេយ្យ និង ជាពិសេសគឺការបណ្តុះវប្បធម៌អំណាននិងនិពន្ធសៀវភៅ។ ល្បឿននៃការរីកចម្រើនផ្នែកពុទ្ធិ និងបច្ចេកវិទ្យាកំពុងមានសន្ទុះលឿនជាងអ្វីដែលសិស្ស និងនិស្សិតអាចទទួលបានពីគ្រូនៅគ្រឹះស្ថានសិក្សា ដែលធ្វើឱ្យគោលដៅនៃការអប់រំនៅពេលបច្ចុប្បន្ននេះ មានការប្រឈមខ្លាំងជាងពេលណាទាំងអស់។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងមួយឆ្នាំ មានសៀវភៅជាង ២,២លានចំណងជើង ត្រូវបានសរសេរ និងបោះពុម្ព ដែលក្នុងនោះប្រទេសចិនមាន៤៤០ពាន់ ចំណែកឯសហរដ្ឋអាមេរិកមាន ៣០៥ពាន់ និងប្រទេសរុស្ស៊ីមាន ១២០ពាន់ចំណងជើង។

ខណៈពេលដែលបច្ចេកវិទ្យាកំពុងរីកចម្រើនជារៀងរាល់ថ្ងៃ មធ្យោបាយសម្រាប់អំណានក៏មានច្រើនជម្រើសសម្រាប់សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនរួមមានការអានសៀវភៅ ការអានលើឧបករណ៍ អេឡិចត្រូនិក ការអានដោយប្រើទូរសព្ទវៃឆ្លាត និងការអានលើកុំព្យូទ័រ ដែលសុទ្ធសឹងជាមធ្យោបាយ សំខាន់ៗដែលនាំអ្នកអានទាំងឡាយឱ្យសម្រេចគោលបំណងអានរបស់ខ្លួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត អំណានដោយប្រើមធ្យោបាយបច្ចេកវិទ្យាទំនើប ចំណាយពេលតិច ងាយស្រួលអាន និងជួយដល់បរិស្ថានមួយកម្រិតទៀត។ នាពេលបច្ចុប្បន្ន សិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជនកម្ពុជាដែលស្រឡាញ់អំណានកំពុងតែប្រើប្រាស់មធ្យោបាយអំណានទាំងនេះ។ បើយើងក្រឡេកមើលទៅប្រទេសជឿនលឿន ទោះបីជា បច្ចេកវិទ្យារីកចម្រើនខ្លាំងយ៉ាងណា អំណានតាមរយៈសៀវភៅនៅតែមានសន្ទុះដដែល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត បច្ចេកវិទ្យា

អានបែបទំនើបតាមរយៈឧបករណ៍ទំនើប អាស្រ័យលើលទ្ធភាពនៃធនធានអប់រំ ឌីជីថល និងមាតិកាឌីជីថលគ្រប់គ្រាន់ដែលបានផលិត និងបង្ហោះចែកចាយសម្រាប់អំណាន។

ក្នុងបរិបទកម្ពុជា ជាពិសេសក្នុងបរិបទនៃការរីករាលដាលនៃជំងឺកូវីដ-១៩ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានជំរុញឱ្យមានបរិវត្តកម្មឌីជីថលនៅក្នុងអេកូស៊ីស្តែមនៃការអប់រំ ជាពិសេសការអប់រំតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិកនិងការអប់រំពីចម្ងាយដើម្បីលើកកម្ពស់អំណានតាមរយៈការផលិតមាតិកាឌីជីថលដែលមានភាពចម្រុះ ការកសាងសមត្ថភាពផ្នែកតំណភ្ជាប់និងវេទិកាឌីជីថល ការពង្រីកវិសាលភាពនៃមជ្ឈមណ្ឌលទិន្នន័យនិងការលើកកម្ពស់គុណភាពនៃការផលិតធនធានអប់រំឌីជីថល គួបផ្សំជាមួយការចែកសន្លឹកកិច្ចការឱ្យសិស្សយកទៅរៀននៅផ្ទះនិងការចុះទៅជួបសិស្សជាបណ្តុំតាមសហគមន៍។ ក្នុងន័យលើកកម្ពស់អំណាន និងភាពសម្បូរបែបនៃធនធានសៀវភៅសិក្សាឱ្យកាន់តែមានប្រសិទ្ធភាពនិងភាពសក្តិសិទ្ធិ និងផ្តល់ឱកាសអំណានកាន់តែច្រើនថែមទៀតដល់សិស្សានុសិស្ស និស្សិត និងសាធារណៈជន ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាលើកទឹកចិត្តនូវចំណុចមួយចំនួនដូចខាងក្រោម៖

1. សាស្ត្រាចារ្យ អ្នកស្រាវជ្រាវ និងបុគ្គលិកអប់រំ សូមបន្តនិងបង្កើនការបោះពុម្ពស្នាដៃបន្ថែមទៀត ដើម្បីធ្វើឱ្យធនធានសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប ជាពិសេសធនធានអំណានជាខេមរភាសា
2. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា សូមផ្តល់លទ្ធភាពគ្រប់បែបយ៉ាង ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់ និង និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សាអាចចូលរួមអាន និងសិក្សាស្រាវជ្រាវតាមគ្រប់លទ្ធភាពជាមួយធនធានអំណាន ជាពិសេសការរៀបចំឱ្យមានពេលវេលាសម្រាប់សហសិក្សា និងអំណានក្នុងបណ្ណាល័យ
3. សាស្ត្រាចារ្យតាមមុខវិជ្ជា និងអ្នកស្រាវជ្រាវតាមជំនាញឬវិស័យ ត្រូវរៀបចំដំណើរការរៀនបង្រៀន និងស្រាវជ្រាវដែលមានដាក់បញ្ចូលកិច្ចការស្វ័យសិក្សា សហសិក្សា ឬការស្រាវជ្រាវបណ្ណាល័យដែលតម្រូវឱ្យនិស្សិត ត្រូវអាននិងស្រាវជ្រាវជាមួយធនធានអំណាន
4. គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងមជ្ឈមណ្ឌលស្រាវជ្រាវ ត្រូវខិតខំឱ្យអស់លទ្ធភាពក្នុងការបង្កើតបណ្ណាល័យ មជ្ឈមណ្ឌលរក្សាឯកសារ ឬមជ្ឈមណ្ឌលអប់រំឌីជីថល ជាដើម ដើម្បីឱ្យបុគ្គលិកអប់រំគ្រប់លំដាប់ថ្នាក់និងនិស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា អាចទទួលបាន និងស្វែងរកប្រភពសម្រាប់អំណានកាន់តែសម្បូរបែប និងមានភាពបត់បែន ឆ្លើយតបតាមតម្រូវការអ្នកអាន
5. និស្សិតគ្រប់កម្រិតសិក្សា ត្រូវខិតខំនិងចំណាយពេលអាន និងចាត់ទុកវប្បធម៌ និងអកប្បកិរិយាអំណានជាផ្នែកមួយ នៃពេលវេលានិងភាពស៊ីវិល័យនៃជីវិតប្រចាំថ្ងៃ

6. បងប្អូនជនរួមជាតិ ដែលជាមាតាបិតា ឬអ្នកអាណាព្យាបាល សូមជួយជំរុញនិងបង្កលក្ខណៈ កាន់តែ ច្រើនថែមទៀត ជាពិសេសការលៃលកចំណាយនៅក្នុងគ្រួសារសម្រាប់ការទិញសម្ភារៈ សិក្សា សៀវភៅអាន និងឧបករណ៍សម្រាប់អំណានដល់កូនៗ ដែលចាត់ទុកជាការវិនិយោគ មួយដ៏សំខាន់ សម្រាប់ បង្កើនចំណេះដឹង និងអនាគតរបស់ពួកគេ។

ដោយមានការគាំទ្រពីក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ នៅឆ្នាំ២០២០ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលហៅកាត់ថា«មូលនិធិ សន.គ.»និងជាភាសាអង់គ្លេសថា The Research Creativity and Innovation Fund ដែលហៅកាត់ជាភាសាអង់គ្លេសថា "RCI Fund"។ គោលដៅចម្បងនៃមូលនិធិនេះ គឺរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិតច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតបទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។ មូលនិធិ សន បានសម្រេចកំណត់ប្រធានបទ ជា.គ. អាទិភាពសម្រាប់ការគាំទ្រដោយមូលនិធិធំចំនួន៣ រួមមានឌីជីថលយនកម្មសម្រាប់បដិវត្តឧស្សាហកម្ម ៤.0 (Digitalization for IR.4.0)

ការស្រាវជ្រាវអនុវត្តលើវិស័យកសិកម្ម (Applied Agricultural Research)និងការស្រាវជ្រាវគរុកោសល្យសតសតវត្សទី២១ (21st Century Pedagogy Research)

ដោយមានការធ្វើអាទិភាពរូបនីយកម្មទៅលើទិសដៅនៃការប្រើប្រាស់ថវិកាមូលនិធិសម្រាប់ឆ្នាំ ២០២០ ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ និងក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានផ្តល់ការគាំទ្រដល់ការ **រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សា)Text book) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា**។ គោលបំណងនៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អ សៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាគឺដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូនដល់និស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ លើសពីនេះទៀតការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សាមានគោលដៅដូចខាងក្រោម៖

- ឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់និស្សិតនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា
- លើកកម្ពស់ទំនើបភាវូបនីយកម្ម និងឧត្តមានុវត្តន៍នៃការរៀននិងបង្រៀន និងការស្រាវជ្រាវនៅលើមុខវិជ្ជា កម្មវិធីសិក្សា ឬមុខជំនាញជាក់លាក់

- បង្កើនភាពស៊ីជម្រៅក្នុងការកសាងវិជ្ជាជីវៈនិងបទពិសោធន៍សម្រាប់បានៈសាស្ត្រាចារ្យ និងអ្នកស្រាវជ្រាវ
- រួមចំណែកដល់ការកសាងភាពជាសហគមន៍វិជ្ជាជីវៈ ការចែករំលែកបទពិសោធន៍ និងវប្បធម៌នៃការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សានៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា បានវាយតម្លៃខ្ពស់ចំពោះការបោះជំហានប្រកបដោយមនសិការវិជ្ជាជីវៈនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងបុគ្គលិកអប់រំទាំងអស់ ក្នុងការរៀបចំ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណ លើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រឹងសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសា ជូននិស្សិតដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។ សៀវភៅសិក្សាជាផ្នែកមួយនៃការទទួលស្គាល់គុណភាពអប់រំនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងជាធនធានសិក្សាដែលជាមូលដ្ឋានមួយដ៏សំខាន់ ក្នុងការគាំទ្រដល់ការបង្រៀន និងរៀន ហើយត្រូវមានបរិមាណគ្រប់គ្រាន់ ឆ្លើយតបទៅនឹងកម្មវិធីអប់រំ និងតម្រូវការសិក្សាស្រាវជ្រាវ។ ជាគោលការណ៍ គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សាទាំងអស់ ត្រូវមានសៀវភៅសិក្សាដែលប្រើជាគោលសម្រាប់មុខវិជ្ជានីមួយៗ។ ចំនួនសៀវភៅសិក្សាដែលគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវ និងការសិក្សារបស់និស្សិត ត្រូវមានយ៉ាងតិចមួយចំណងជើងក្នុងមួយមុខវិជ្ជា ហើយត្រូវតម្កល់យ៉ាងតិច២ច្បាប់ នៅក្នុងបណ្ណាល័យ ឬអាចរកបានតាមប្រព័ន្ធអេឡិចត្រូនិក។ ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា លើកទឹកចិត្តបន្ថែមទៀតជូនដល់គ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋ និងឯកជនដែលបានស្នើសុំថវិកាមូលនិធិរួច សូមចូលរួមបន្ថែមទៀតដើម្បីបង្កើនចំនួនចំណងជើងសៀវភៅ។ ចំណែកគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សារដ្ឋនិងឯកជនដែលពុំទាន់បានដាក់ពាក្យស្នើសុំ សូមចូលរួម ដើម្បីជាគុណប្រយោជន៍ដល់តម្រូវការដ៏ទទូច និងថ្លៃថ្លានៃនិស្សិតកម្ពុជាក្នុងការសិក្សា និងស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

សេចក្តីបញ្ជាក់

នៃមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍

សៀវភៅសិក្សានេះជាលទ្ធផលនៃការស្នើសុំអនុវត្តថវិកាមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ក្នុងគម្រោង**រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅសិក្សា ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។** សៀវភៅសិក្សានេះ ត្រូវបានរៀបរៀង និពន្ធ ឬកែលម្អដោយមានការធានាអះអាងថាជាស្នាដៃរបស់អ្នកនិពន្ធផ្ទាល់ និងបានឆ្លងកាត់ត្រួតពិនិត្យ ផ្តល់យោបល់ និងវាយតម្លៃដោយក្រុមប្រឹក្សាអប់រំ ក្រុមប្រឹក្សាស្រាវជ្រាវ ឬក្រុមប្រឹក្សាដែលមានតម្លៃស្មើនៃគ្រឹះស្ថានឧត្តមសិក្សា និងតាមរយៈកិច្ចសន្យាដែលបានធ្វើឡើង និងដែលបានតម្កល់ទុកនៅមូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។ រាល់ខ្លឹមសារ ការបកស្រាយ និងរូបភាព គឺជាជំហរនិងទស្សនៈផ្ទាល់របស់អ្នកនិពន្ធ ហើយ ពុំឆ្លុះបញ្ចាំង ឬជាតំណាងដល់មូលនិធិការស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ នៃក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ឡើយ។

មាតិកា

អារម្ភកថា

សៀវភៅ " **គណិតវិទ្យាគណនា ២**" ដែលលោក អ្នកកំពុងកាន់នៅដៃនេះ បានរៀបរៀងឡើង ដើម្បីឆ្លើយតបទៅនឹងសេចក្តីត្រូវការរបស់គរុននិស្សិត និង អ្នកស្រាវជ្រាវដែលមានបំនងសិក្សា និងស្រាវជ្រាវដោយប្រើភាសាជាតិ ។ការរៀបរៀងឡើងគឺ ដើម្បីជំនួយដល់ការបង្រៀនរបស់សាស្តចារ្យ និងការសិក្សារបស់គរុនិស្សិតផ្នែកគណិតវិទ្យាឆ្នាំងទី១ នៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ។ ក្នុងសៀវភៅនេះ គឺយើងអាចស្វែងរកបាននូវឧទាហរណ៍ល្អៗ និងលំហាត់ល្អៗជាច្រើនដែលបង្ហាញនូវ ទ្រឹស្តី និងតិចនិច ដែលស្របតាមគំរូនៃការអនុវត្តបែបទាន់សម័យ និងប្រើវិធីផ្សេងៗគ្នា។ក្នុងសៀវភៅនេះ និយាយផ្តោតទៅលើ ការអនុវត្តដេរីវេ តិចនិចគណនាអាំងតេក្រាល និង ការដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ការអនុវត្តនៃការគណនាក្នុងសៀវភៅនេះបានផ្តល់អោយយើងស្គាល់នូវទំនាក់ទំនងជាច្រើនដែលផ្សារ ភ្ជាប់ជាមួយមុខវិជ្ជាផ្សេងទៀតយ៉ាងជិតស្និទ្ធដូចជា ប្រូបាប៊ីលីតេ ជីវវិទ្យា រូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជំនួញពាណិជ្ជកម្មវិស្វកម្ម និងវិទ្យាសាស្រ្តកុំព្យូទ័រជាដើម។

យើងខ្ញុំ ទាំងអស់គ្នាសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងរួមចំណែកផ្តល់នូវចំណេះដឹងក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវ លើមុខវិជ្ជា គណនាឆ្នាំទី១។

យើងរង់ចាំដោយរីករាយទទួលនូវការរិះគន់ស្ថាបនាអំពីមិត្តអ្នកអាន គ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន ដើម្បីជួយកលំអរសៀវភៅនេះអោយកាន់តែមានភាពសុក្រិតថែមមួយកំរិតទៀត ឆ្លើយតបនឹងពេលវេលាផង ព្រមទាំងសមត្ថភាព របស់និស្សិតផង។

យើងសូមជូនពរអោយមិត្តអ្នកអានជាបុគ្គលដែលមានជោគជ័យ គ្រប់ពេលវេលា។

សេចក្តីថ្លែងអំណរគុណ

ជាការពិតសៀវភៅ " **គណិតវិទ្យាគណនា ១**" ដែលលេចចេញជារូបរាងនៅពេលនេះគឺបានកើតឡើងពីការខិតខំ និងយកចិត្តទុកដាក់ចូលរួមពីភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធជាច្រើន ព្រមទាំងការចូលរួមរបស់គរុសស្ស និងគរុនិស្សិតផងដែរ។

យើងខ្ញុំ/ខ្ញុំបាទ/នាងខ្ញុំសូមថ្លែងអំណរគុណយ៉ាងជ្រាលជ្រៅបំផុតដល់ភាគី និងស្ថាប័នពាក់ព័ន្ធទាំងអស់ដូចជា ៖

- ក្រសួងសេដ្ឋកិច្ច និងហិរញ្ញវត្ថុ ដែលបានគាំទ្រយ៉ាងពេញទំហឹងដល់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាឱ្យបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ហៅកាត់ថា "មូលនិធិ ស.គ.ន»។

- ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡាដែលបានបង្កើតមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ដែលហៅកាត់ថា "មូលនិធិ ស.គ.ន» ដើម្បីរួមចំណែកលើកកម្ពស់វប្បធម៌នៃការស្រាវជ្រាវ បំផុសគំនិត 1 ច្នៃប្រឌិត និងជំរុញការធ្វើនវានុវត្ត ដើម្បីជាប្រយោជន៍ដល់វិស័យអប់រំ យុវជន និងកីឡា ដែលឆ្លើយតប ទៅនឹងទីផ្សារពលកម្ម និងសាកលភាវូបនីយកម្ម។

- មូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍ ដែលបានគាំទ្រដល់ការរៀបរៀង និពន្ធ និង កែលម្អសៀវភៅសិក្សា (Textbook) ដែលនឹងត្រូវប្រើប្រាស់នៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា ដើម្បីបង្កើនបរិមាណលើកកម្ពស់គុណភាព និងពង្រីកសមធម៌នៃធនធានសិក្សាជាខេមរភាសាជូនដល់និស្សិត ដែលកំពុងបន្តការសិក្សា និងត្រៀមខ្លួនធ្វើការស្រាវជ្រាវនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សា។

- ឯកឧត្តមបណ្ឌិត/ឯកឧត្តមវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធចូលរួមការ រៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលបានចាត់តាំងជាគណៈកម្មការនិពន្ធ និងគណៈកម្មការត្រួត ពិនិត្យ លើស្នាដៃនៃការចូលរួមការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅកម្រិតឧត្តមសិក្សានេះ។

- លោកប្រធាន នាយកដ្ឋានបណ្តុះបណ្តាលដែលព្រមព្រៀងទទួលសិទ្ធិជាតំណាងអ្នករៀបរៀងក្នុងការចាត់ចែង និងសម្របសម្រួលជាមួយក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា ចុះហត្ថលេខាលើកិច្ចព្រម ព្រៀង និងកិច្ចដំណើការទូទាត់ថវិកាតាមរយៈការស្នើសុំ និងទទួលថវិកា បោះពុម្ព និងផ្សព្វផ្សាយបន្តនូវ ស្នាដៃរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អរបស់អ្នករៀបរៀងក្នុងការរៀន និងបង្រៀនក្នុងគ្រឹះស្ថានសិក្សា និង ប្រគល់សិទ្ធិ

ស្របតាមការកំណត់នៃកិច្ចព្រមព្រៀង ស្ដីពីការរៀបរៀង និពន្ធ និងកែលម្អសៀវភៅនៅ កម្រិតឧត្តមសិក្សា ក្រោមការគាំទ្រនៃមូលនិធិស្រាវជ្រាវ គំនិតច្នៃប្រឌិត និងនវានុវត្តន៍។

- គ្រូឧទ្ទេសមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យានៃវិទ្យាស្ថានគរុកោសល្យរាជធានីភ្នំពេញ ដែលបានផ្ដល់មតិកែលម្អ លើខ្លឹមសារ នៃមេរៀននីមួយៗ ឱ្យកាន់តែមានភាពសុក្រឹត និងមានលក្ខណៈវិទ្យាសាស្ត្រ។

យើងខ្ញុំ/ខ្ញុំបាទ/នាងខ្ញុំសង្ឃឹមថា សៀវភៅនេះនឹងឆ្លើយតបជាបន្ទាន់ចំពោះការខ្វះខាតធនធានសិក្សា ដែលជាតម្រូវការសិក្សារបស់សិស្ស និស្សិត នៅកម្រិតវិទ្យាល័យ និងឧត្តមសិក្សា។

ការបរិយាយលើមុខវិជ្ជា

មុខវិជ្ជា" គណិតវិទ្យាគណនា ២" គឺត្រូវបានសរសេរឡើងស្របតាមកម្មវិធីសិក្សាថ្នាក់បរិញ្ញាបត្រគ្រូបង្រៀន ១២+៤ ផ្នែកគណិតវិទ្យា ក្នុងគោលបំណងជួយគរុនិស្សិតក្នុងការសិក្សាស្រាវជ្រាវលើមូលដ្ឋានទាក់ទងនឹងលំហាត់គណនា ផ្សារភ្ជាប់នឹងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

សិស្សត្រូវបានរំពឹងថានឹងប្រើប្រាស់ចំណេះដឹង និងការអនុវត្តគណិតវិទ្យារបស់ពួកគេដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហា។ សៀវភៅសិក្សានេះពង្រឹងការយល់ដឹងរបស់សិស្សអំពីមុខងារក្នុងការរៀបចំសម្រាប់ដំណើរការនៃភាពខុសគ្នា និងការរួមបញ្ចូល។ ខ្លឹមសារក្នុងសៀវភៅនេះមានដូចតទៅៈ

មេរៀនទី១ ការអនុវត្តដេរីវេ

ក្នុងមេរៀនេះ និស្សិតកំណត់បាននូវ វិធីសាស្ត្របួនយ៉ាងក្នុងការតាងអនុគមន៍ អត្រាបម្រែបម្រួលធម្មជាតិ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ការពុកផុតតាមអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល អត្រា និងការប៉ាន់ស្មានលីនេអ៊ែ។ និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី២ៈ ការប្រើប្រាស់ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បានខ្លឹមសារ ដែលទាក់ទងនឹង ការគណនាចំណុចបរមា ទ្រឹស្តីមធ្យម សិក្សាអនុគមន៍ អាស៊ីមតូតទ្រេត លីមីតរាងមិនកំណត់ និងឡូពីតាល់ វិធីសាស្ត្រញូតុន និង ព្រីមីទីវ។ និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី៣ តិចនិចអាំងតេក្រាល

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បានខ្លឹមសារ ដែលទាក់ទងនឹង វិធីក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល តាមវិធីប្តូរអថេរ និងដោយផ្នែក ព្រមទាំងការគណនាដោយប្រើប្រាស់តាមអនុគមន៍ផ្សេងៗដូចជាអនុមន៍ត្រីកោណមាត្រ អនុគមន៍ប្រភាគសនិទាន ។ និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មេរៀនទី៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក្នុងមេរៀននេះ និស្សិតកំណត់បានខ្លឹមសារ ដែលទាក់ទងនឹង វិធីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១ រាង $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, $y' + ay = 0$, សមីការប្រាកដ, រាង $ay' + by = p(x)$, សមីការលីនេអ៊ែ រាងតាមបែប ប៊ែនូយី និងការជំនួស។ ផ្នែកមួយទៀត សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ រាង

ay''+by'+cy=0 និង ay'' $+ by' + cy = p(x)$ ការគណនាចម្លើយទូទៅតាមវិធីបម្រែបម្រួលអថេរ ព្រមទាំងការអនុវត្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ និស្សិតអនុវត្តមានលំហាត់លើមេរៀន និងក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃបានត្រឹមត្រូវ។

មូលន័យសង្ខេប

យើងឃើញថា គំនិតនៃដែនកំណត់មួយកើតឡើងនៅក្នុងការព្យាយាមស្វែងរកផ្ទៃក្រឡា, មេគុណបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោង ល្បឿននៃរថយន្ត ឬផលបូកនៃស៊េរីគ្មានកំណត់។ យើងមាន ម៉ូដែលជាច្រើនដែលកំណត់បានជាអនុគមន៍គណិតវិទ្យា ហើយអនុគមន៍នេះនឹងត្រូវបានយកមកសិក្សា និងអនុវត្តរបស់វា។ គោលគំនិតនៃការគណនាដែលបានរកឃើញរួមមានការអនុវត្តដេរីវេ ការប្រើប្រាស់ឌីផេរ៉ង់ស្យែល តិចនិចគណនាអាំងតេក្រាល និងសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ការសង្កត់ធ្ងន់ត្រូវបានដាក់លើការស្វែងរកកម្មវិធីគណនាក្នុងពិភពពិត សិស្សត្រូវបានរំពឹងថានឹងរៀនជ្រើសរើស និងប្រើប្រាស់គណិតវិទ្យា ក្នុងជីវភាពប្រចាំថ្ងៃ។

ករណីដែលប្រធានបទទូទៅគឺការគណនាបរិមាណដែលជាដែនកំណត់នៃបរិមាណផ្សេងទៀត ដែលងាយស្រួលគណនា។ វាគឺជាគំនិតជាមូលដ្ឋាននៃដែនកំណត់ដែលកំណត់ការគណនាខុសពីផ្នែកផ្សេងទៀតនៃ

គណិតវិទ្យា។ តាមពិតយើងអាចកំណត់ការគណនាជាផ្នែកនៃគណិតវិទ្យាដែលទាក់ទងនឹងដែនកំណត់។

បន្ទាប់ពី Sir Isaac Newton បានបង្កើតកំណែគណនារបស់គាត់ គាត់បានប្រើវាដើម្បីពន្យល់ពីចលនា

នៃភពជុំវិញព្រះអាទិត្យ។ សព្វថ្ងៃនេះ ការគណនាត្រូវបានប្រើប្រាស់ក្នុងការគណនាគន្លងរបស់ផ្កាយរណប

និងយានអវកាស ក្នុងការទស្សន៍ទាយទំហំប្រជាជន ក្នុងការប៉ាន់ប្រមាណថាតើតម្លៃកាហ្វេកើនឡើងលឿនប៉ុណ្ណា

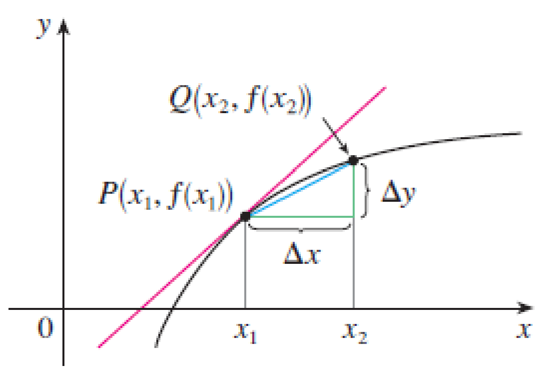
ការព្យាករណ៍អាកាសធាតុ ក្នុងការវាស់ស្ទង់ទិន្នផលបេះដូងនៃបេះដូង ការគណនាបុព្វលាភធានារ៉ាប់រងអាយុជីវិត និងក្នុងវិស័យជាច្រើនផ្សេងទៀត។ យើងនឹងស្វែងយល់ពីការប្រើប្រាស់មួយចំនួន

នៃការគណនានៅក្នុងសៀវភៅនេះ។

ជំពូកទី១ អនុវត្តន៍ដេរីវេ

១.១. អត្រាបម្រែបម្រួលធម្មជាតិ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម

យើងដឹងហើយថា $y=f(x)$ នោះដេរីវេ $\frac{dx}{dy}$ អាចបង្ហាញជាអត្រានៃការប្រែប្រួលនៃ y ធៀបទៅនឹង x ។ នៅក្នុងចំនុចនេះយើងនឹងបង្ហាញនៃការប្រើប្រាស់វានៅក្នុងរូបវិទ្យា គីមីវិទ្យា ជីវវិទ្យា សេដ្ឋកិច្ច និងវិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងៗ ។ ដូចបានបកស្រាយក្នុងចំនុច 2.7 បើ x ប្រែប្រួលពី x_1 ទៅ x_2 នោះ $\Delta x = x_2 - x_1$ ដូចគ្នា បម្រែបម្រួល $y=f(x)$ គឺ $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ នោះគេបាន $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ជាបម្រែបម្រួលមធ្យម នៃ y ធៀបនឹង x នៅលើចន្លោះ $[x_1; x_2]$ ហើយក៏អាចបកស្រាយជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ PQ ដូចរូប ទី1 ។ លីមីតរបស់វាពេល $\Delta x \to 0$ គឺជាដេរីវេ $f'(x_1)$



ជាមេគុណប្រាប់ទិស នៃ បន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំនុច $P(x_1; f(x_1))$ ។ តាមការកំណត់និមិត្តសញ្ញារបស់ *Leibniz* យើងបានទម្រង់ ដូចខាង ក្រោម: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

នៅក្នុងរូបវិទ្យា

បើ $s=f(t)$ ជាអនុគមន៍នៃទីតាំងរបស់ភាគល្អិតមួយដែលផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ត្រង់មួយ នោះគេបាន $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ តំនាងឲ្យបម្រែបម្រួលមធ្យមរបស់ល្បឿនធៀបនឹងរយៈពេល Δt ហើយ $v=\frac{ds}{dt}$ តំនាងឲ្យ វ៉ិចទ័រ

ល្បឿនខណៈ (អត្រានៃបម្រែបម្រួលបម្លាស់ទីស្ថិតនៅខណៈពេលណាមួយ) ។ អត្រាបម្រែបម្រួលខណៈនៃវ៉ិចទ័រ ល្បឿន ធៀបទៅនឹងពេលគឺជាមេគុណប្រាប់ទិស $a(t) = v'(t) = s''(t)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី ១. ទីតាំងនៃភាគល្អិតមួយត្រូវបានឲ្យដោយសមីការដូចខាងក្រោម:

$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ ដែល t គិតជាវិនាទី និង s គិតជាម៉ែត្រ ។

$a.$ រកវ៉ិចទ័រល្បឿននៅខណៈ t

$b.$ តើវ៉ិចទ័រល្បឿនមានតម្លៃប៉ុន្មានបន្ទាប់ពី $2s$ & $4s$ ។

$c.$ តើភាគល្អិតឈប់នៅពេលណា ?

$d.$ តើពេលណាដែលភាគល្អិតឆ្ពោះទៅមុខ (ទិសដៅវិជ្ជមាន) ?

$e.$ គូសដ្យាក្រាមតំណាងឲ្យបម្លាស់ទីនៃភាគល្អិតនេះ ។

$f.$ រកចម្ងាយចរសរុបរបស់ភាគល្អិតក្នុងកំឡុង $5s$ ដំបូង ។

$g.$ រកមេគុណប្រាប់ទិសនៅខណៈ t និងបន្ទាប់ពី $4s$ ។

$h.$ គូសក្រាហ្វនៃទីតាំង ល្បឿន និងមេគុណប្រាប់ទិស របស់អនុគមន៍ចលនាចំពោះ $0 \le t \le 5$

$i.$ តើពេលណាល្បឿននៃភាគល្អិតកើនឡើង ? ហើយពេលណាល្បឿនថយចុះ?

ដំណោះស្រាយ

$a.$ អនុគមន៍ល្បឿនជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ទីតាំង

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \Rightarrow v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

$b.$ ល្បឿនបន្ទាប់ពី $2s$ មានន័យថា ល្បឿនខណៈពេល $t = 2$ នោះគេបាន

$$v(2) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3m/s$$

ល្បឿនបន្ទាប់ពី $4s$ គឺ $v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9m/s$

$c.$ ភាគល្អិតឈប់កាលណា $v(t) = 0$

$$\Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t-1)(t-3) = 0$$

$\Rightarrow t=1 \; or \; t=3$

ដូចនេះ ភាគល្អិតបានឈប់បន្ទាប់ពី $1s$ និង បន្ទាប់ $3s$ ។

d. ភាគល្អិតផ្លាស់ទីទៅទិសដៅវិជ្ជមានកាលណា $v(t)>0$

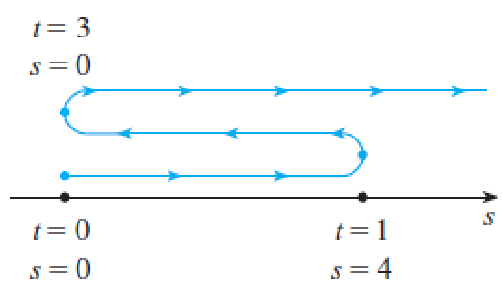
$\Rightarrow 3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)>0$

វិសមីការពិតកាលណា $t>3$ ឬ $t<1$

ដូចនេះ ភាគល្អិតផ្លាស់ទីតាមទិសដៅវិជ្ជមានក្នុងចន្លោះពេល $t<1$ & $t>3$

វាផ្លាស់ទីបកក្រោយក្នុងទិសដៅអវិជ្ជមានពេលណា $1<t<3$ ។

e. ប្រើប្រាស់ទំនាក់ទំនងពីចំនុច d យើងបានក្រាហ្វតំនាងនៃចលនាដូចខាងក្រោម



f. រកចម្ងាយសរុបដែលភាគល្អិតផ្លាស់ទីក្នុងរយៈពេល $5s$ ដំបូង

ពីចំនុច d & e យើងត្រូវគណនាចម្ងាយចរក្នុងចន្លោះពេល $[0,1];[1,3];[3,5]$ នីមួយៗចម្ងាយក្នុងមួយវិនាទីដំបូង $|f(1)-f(0)|=|4-0|=4m$ ចម្ងាយក្នុងចន្លោះពេលពី $t=1\rightarrow t=3$ គឺ $|f(3)-f(1)|=|0-4|=4m$

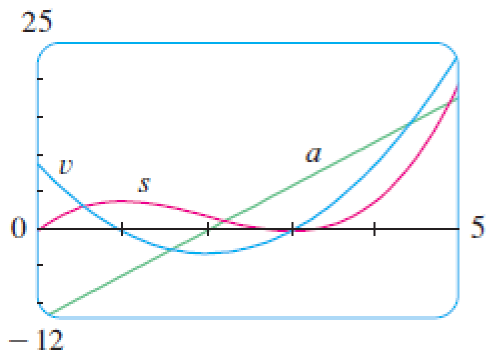
ចម្ងាយចរក្នុងចន្លោះពេលពី $t=3\rightarrow t=5$ គឺ $|f(5)-f(3)|=|20-0|=20m$ ចម្ងាយសរុបគឺ $4+4+20=28m$

g. សំទុះជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ល្បឿន

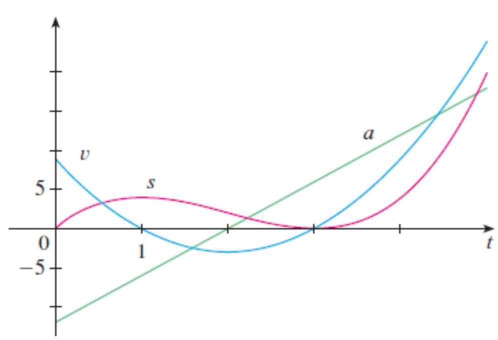
យើងបាន $a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=6t-12$

$\Rightarrow a(4)=6\times4-12=12m/s^2$

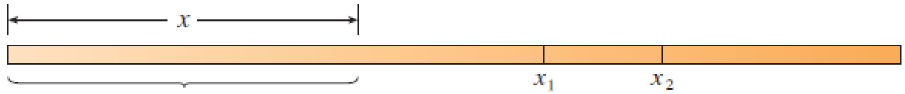
h. រូបទី៣ បង្ហាញពីក្រាហ្វនៃចម្ងាយចរ ល្បឿន និងសំទុះ



i. ល្បឿនរបស់ភាគល្អិតមានការកើនឡើង កាលណាល្បឿន និងសំទុះមានសញ្ញាដូចគ្នា ។



១២. ប្រសិនបើដំបង ឬបំណែកនៃលួសមានលក្ខណៈដូចគ្នា នោះដង់ស៊ីតេលីនេអ៊ែររបស់វាគឺដូចគ្នា ហើយត្រូវបានកំណត់ជាម៉ាសក្នុងមួយឯកតាប្រវែង $\rho=\frac{m}{l}$ គិតជាគីឡូក្រាមក្នុងមួយម៉ែត្រ ។ ទោះជាយ៉ាងណា សន្មតថាដំបងនេះមិនមានលក្ខណៈដូចគ្នា តែវាត្រូវបានវាស់ពីចុងខាងឆ្វេងរបស់វារហូតដល់ចំនុចមួយដោយប្រវែង x គឺ $m=f(x)$ ដូចបានបង្ហាញក្នុងរូបទីប្រាំ



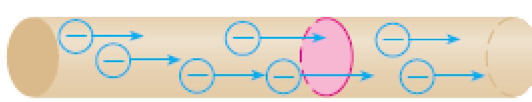
ដំបងមានម៉ាស $f(x)$

ម៉ាសផ្នែកនៃដំបងដែលស្ថិតនៅចន្លោះ $x=x_1$ និង $x=x_2$ ត្រូវបានគេឲ្យដោយ $\Delta m = f(x_2)-f(x_1)$ ដូចនេះដង់ស៊ីតេមធ្យមនៃផ្នែករបស់ដំបងគឺ ដង់ស៊ីតេមធ្យម $=\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

យើងតាង $\Delta x \to 0$ មានន័យថា $x_2 \to x_1$ ដង់ស៊ីតេលីនេអ៊ែរ (The Linear Density) p នៅត្រង់ x_1 គឺជាលីមីតនៃដង់ស៊ីតេមធ្យម ពេលដែល $\Delta x \to 0$ ។ បានន័យថា ដង់ស៊ីតេលីនេអ៊ែរ គឺជាអត្រានៃបម្រែបម្រួលម៉ាស ធៀបទៅនឹងបម្រែបម្រួលប្រវែង ។ ជាតំនាង: $\rho = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\dfrac{dm}{dx}$ នោះ ដង់ស៊ីតេលីនេអ៊ែរនៃដំបង គឺជាដេរីវេនៃម៉ាស ធៀបនឹងប្រវែង ។ ជាឧទាហរណ៍ បើ $m=f(x)=\sqrt{x}$ ដែល x គឺគិតជាម៉ែត្រ ហើយ m គិតជាគីឡូក្រាម ។ ដង់ស៊ីតេមធ្យមផ្នែកនៃដំបងឲ្យដោយ $1\le x\le 1.2$ គឺ $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}=\dfrac{f(1.2)-f(1)}{1.2-1}=\dfrac{\sqrt{1.2}-1}{0.2}\approx 0.48\,kg/m$

ដោយ Density right នៅត្រង់ $x=1$ គឺ $p=\dfrac{dm}{dx}\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}=0.50\,kg/m$

ឧ៣. មានចរន្តមួយឆ្លងកាត់នៅពេលដែលបន្ទុកអគ្គិសនីផ្លាស់ទី ។ (រូបទី៦) បង្ហាញពី ផ្នែកមួយនៃលួស និង អេឡិចត្រុងផ្លាស់ទីនៅលើផ្ទៃប្លង់ ដែលមានស្រមោលពណ៌ក្រហម ។ បើសិន ΔQ គឺជាបន្ទុកសុទ្ធដែលឆ្លងកាត់លើផ្ទៃនេះក្នុងកំឡុងពេលមួយ Δt ពេលនោះចរន្តមធ្យមក្នុងកំឡុងចន្លោះពេលនេះគឺ កំណត់ដោយ:



ចរន្តមធ្យម $=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q_2-Q_1}{t_2-t_1}$

ដូចនឹង២៧. បើតាង $\Delta t \to 0$ នោះចរន្ត I នៅត្រង់ពេល t_1 គឺ $I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}$ នោះគេបាន ចរន្ត គឺអត្រាដែលបន្ទុកឆ្លងកាត់លើផ្ទៃ។វាត្រូវបានវាស់ជាឯកតានៃបន្ទុកក្នុងមួយឯកតា(ឡំក្នុងមួយវិនាទី ហៅថា អំពែ) ។

រ៉ិចទ័រល្បឿន ដង់ស៊ីតេ និងអាំងតង់ស៊ីតេចរន្ត គឺមិនត្រឹមតែជាអត្រានៃបម្រែបម្រួល ប៉ុណ្ណោះទេ

នៅក្នុងគីមីវិទ្យា

២៨. ប្រតិកម្មគីមី ជាប្រតិកម្មដែលបង្កើតបានជាផលិតផល ដែលបានមកពីសមាសធាតុពីរច្រើន ប្រតិកម្មគ្នា ។

$2H_2+O_2\to 2H_20$

បានមកពី ពីរម៉ូលេគុលអ៊ីដ្រូសែន មួយម៉ូលេគុលអុកស៊ីសែន រួមផ្សំគ្នា បង្កើតបានជា ពីរម៉ូលេគុល ទឹក ពិនិត្យប្រតិកម្ម: $A+B\to C$

ដែល $A\,\&\,B$ ជាអង្គធាតុប្រតិករ ហើយ C ជាផលិតផល ឬអង្គធាតុកកើត ។ កំហាប់នៃអង្គធាតុ ប្រតិករ A ជាចំនួនម៉ូលក្នុងមួយលីត្រ ឬ ជាផលធៀបនៃចំនួនម៉ូលទៅនឹងលីត្រ ហើយគេកំណត់តាងកំហា ប់នៃ A ដោយ $[A]$ កំហាប់ផ្សេងៗទៀតក្នុងពេលប្រតិកម្មដូចជា $[A];[B];[C]$ គឺជាអនុគមន៍នៃ t ។ ល្បឿនមធ្យមនៃផលិតផល C លើចន្លោះពេល $t_1\le t\le t_2$ គឺ $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}=\frac{[C](t_2)-[C](t_1)}{t_2-t_1}$ តែគីមីវិទូចាប់ អារម្មណ៍ច្រើនទៅលើល្បឿនខណៈនៃប្រតិកម្ម ដែលបានពីលីមីតនៃល្បឿនមធ្យមនៃប្រតិកម្មធៀបនឹង ចន្លោះពេល $\Delta t\to 0$ យើងបាន

ល្បឿននៃប្រតិកម្ម $=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta[C]}{\Delta t}=\frac{d[C]}{dt}$

ពេលដំណើរការនៃប្រតិកម្ម ពេលនោះកំហាប់នៃអង្គធាតុកកើតកើនឡើង នោះដេរីវេ $\frac{d[C]}{dt} > 0$ ហើយល្បឿននៃប្រតិកម្មវិជ្ជមាន ហើយក្នុងពេលនោះដែរ កំហាប់នៃអង្គធាតុប្រតិករក៏ចាប់ផ្តើមថយចុះ ហេតុនេះដើម្បីឲ្យល្បឿននៃប្រតិកម្ម $[A]$ & $[B]$ វិជ្ជមាន យើងត្រូវដាក់សញ្ញាដកពីមុខដេរីវេនៃ $\frac{d[A]}{dt}$ & $\frac{d[B]}{dt}$ ។ យើងបានៈ

$$\text{ល្បឿននៃប្រតិកម្ម} = \frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

ជាទូទៅសមីការនៃប្រតិកម្មមានទម្រង់ $aA + bB \rightarrow cC + dD$

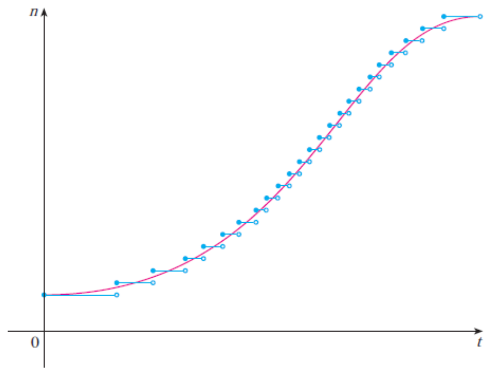
យើងបាន $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$

ល្បឿននៃប្រតិកម្ម ក៏យើងអាចកំណត់បានផងដែរតាមរយៈទិន្នន័យ និងក្រាហ្វិកដែលគេឲ្យ ។

នៅក្នុងជីវវិទ្យា

ឧ.៦ គេឲ្យ $n = f(t)$ ជាចំនួននៃឯកត្តលក្ខណៈផ្សេងៗគ្នា នៅក្នុងសត្វ ឬរុក្ខជាតិ នៅក្នុងរយៈពេល t ។ ការផ្លាស់ប្តូរនៃសកល គឺស្ថិតនៅខណៈ $t = t_1$ and $t = t_2$ is $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$ នោះអត្រានៃការកើនឡើងមធ្យមក្នុងកំឡុងពេល $t_1 \le t \le t_2$ គឺ អត្រានៃការកើនឡើងមធ្យម $= \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

អត្រានៃការកើនឡើងខណៈ (Instantaneous rate of growth) គឺបានមកពីលីមីតនៃអត្រានៃការកើនឡើងមធ្យមដោយកំណត់ $\Delta t \to 0$ ។ នោះគេបានអត្រានៃការកើនឡើងគឺអត្រាកំណើន $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$



និយាយឲ្យដាក់លាក់ វាមិនត្រឹមត្រូវទេពីព្រោះក្រាហ្វពិតប្រាកដនៃអនុគមន៍ចំនួន $n = f(t)$ អាចជា Step Function (ជាអនុគមន៍ដែលកើនឡើង ឬចុះយ៉ាងឆាប់រហ័សពីចំនួនថេរមួយ ទៅចំនួនថេរមួយផ្សេងទៀត) នោះគឺវាមានភាពដាច់ដោយឡែកពីគ្នា (មិនមែនជាប់គ្នា) នៅពេលដែលកើត ឬស្លាប់ នោះវាមិនមានដេរីវេទេ ។ យ៉ាងណាក៏ដោយ ចំពោះសត្វធំៗ ឬក៏ចំនួនរុក្ខជាតិ យើងក៏អាចជំនួសវាដោយការខ្សែកោងដែលមានលក្ខណៈប្រហាក់ប្រហែលដូចក្នុងរូបទីប្រាំពីរ ។

ដើម្បីដាក់លាក់ ពិនិត្យពីចំនួនបាក់តេរីនៅក្នុងឧបករណ៍ផ្ទុកសារធាតុចិញ្ចឹមមួយ ។ ហើយសន្មតថា តាមរយៈការធ្វើគំរូចំនួនបាក់តេរីនៅចន្លោះពេលដាក់លាក់ណាមួយ នោះវាត្រូវបានកំណត់ថាចំនួនបាក់តេរីកើនឡើងទ្វេដងជារៀងរាល់ម៉ោង ។ បើចំនួនបាក់តេរីដំបូងគឺ n_0 ហើយរយៈពេល t គិតជាម៉ោង ។

នោះយើងបាន:

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

ហើយជាទូទៅ $f(t) = 2^t n_0$

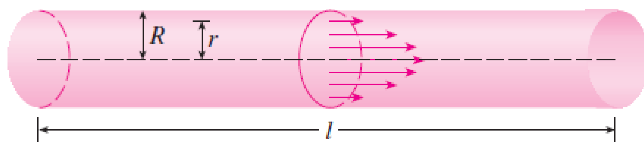
អនុគមន៍នៃចំនួនបាក់តេរី $n = n_0 2^t$

នៅក្នុង 3.4 យើងបានបង្ហាញថា: $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x 1a$

នោះអត្រានៃការកើនឡើងរបស់បាក់តេរីនៅខណៈពេល t គឺ: $\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}\left(n_0 2^t\right) = n_0 2^t \ln 2$

សម្រាប់ឧទាហរណ៍នេះ សន្មតថា $n_0 = 100$ បាក់តេរី នោះអត្រានៃការកើនឡើងរបស់បាក់តេរីបន្ទាប់ពីបួនម៉ោងគឺ $\left.\frac{dn}{dt}\right|_{(t=4)} = 100 \times 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$ នោះមានន័យថា បន្ទាប់ពីរយៈពេល 4 ម៉ោង នោះចំនួនបាក់តេរីដែលកើនឡើងដោយអត្រាប្រហែល 1109 បាក់តេរីក្នុងមួយម៉ោង ។

ឧទាហរណ៍៧. ពេលដែលយើងពិនិត្យពីលំហូរឈាមតាមរយៈសរសៃឈាមដូចជា សរសៃវ៉ែន ឬ សរសៃអាកទែ ។ យើងអាចយកគំរូតាមសរសៃឈាមដោយបំពង់ស៊ីឡាំងដែលមានកាំ R និង ប្រវែង l ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី ៨ ។



ដោយសារតែការកកិតនៅនឹងជញ្ជាំងនៃបំពង់ ។ ល្បឿន នៃឈាមគឺមានតម្លៃធំបំផុតតាមអ័ក្សកណ្តាលនៃបំពង់ ហើយថយចុះនៅចម្ងាយ r ពីអ័ក្សកើនឡើងរហូតដល់ល្បឿនស្មើនឹងសូន្យពេលនៅជាប់ជញ្ជាំង ។ ទំនាក់ទំនងរវាង v និង r ត្រូវបានផ្តល់ឲ្យដោយ ច្បាប់នៃលំហូរឡាមីណា ដែលត្រូវបានរកឃើញដោយរូបវិទូជនជាតិបារាំងនៅឆ្នាំ1840 ។ ច្បាប់នោះគឺកំណត់ដោយនិមិត្តសញ្ញា: $v = \frac{P}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$ (1)

ដែល η ជា Blood Viscosity (ការវាស់វែងនៃកម្រាស់ និងភាពស្អិតរមួតនៃឈាមរបស់មនុស្សម្នាក់ៗ តាមរយៈសរសៃឈាម) និង P ជាសម្ពាធខុសគ្នារវាងចុងបំពង់ ។ បើ P និង l គឺថេរ នោះ v ជាអនុគមន៍នៃ r លើដែនកំណត់ $[0, R]$ ។

អត្រាមធ្យមនៃបម្រែបម្រួលរបស់ល្បឿននៅពេលប្តូរពី $r = r_1$ ទៅ $r = r_2$ ដែលត្រូវបានផ្តល់ឲ្យ:

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

ហើយបើតាង $\Delta r \to 0$ នោះយើងបាន ជម្រាលល្បឿន (Velocity Gradient នោះគឺជាអត្រាខណៈនៃបម្រែបម្រួលរបស់ល្បឿនធៀបទៅនឹង(អាស្រ័យ r)នោះតាងដោយ:

ជម្រាលល្បឿន $= velocity\ gradient = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$

តាមសមីការ (1) យើងបាន:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0-2r) = -\frac{\Pr}{2\eta l}$$

សម្រាប់សរសៃឈាមតូចមួយក្នុងចំនោមសរសៃឈាមតូចៗរបស់មនុស្សយើងយើងអាចយក $n = 0.027$ $R = 0.008\,cm$ $l = 2\,cm$ $P = 4000\,dynes/cm^2$ យើងបាន:

$$v = \frac{4000}{4\times(0.027)\times 2}\left(0.000064 - r^2\right)$$

$$\approx 1.85\times 10^4\left(6.4\times 10^{-5} - r^2\right)$$

នៅពេល $r = 0.002\,cm$ ឈាមគឺហូរដោយល្បឿន:

$$v(0.002) \approx 1.85\times 10^4\left(64\times 10^{-6} - 4\times 10^{-6}\right)$$

$$= 1.11\,cm/s$$

ហើយជម្រាលនៃល្បឿននៅត្រង់ចំនុចនេះគឺ:

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} = -74(cm/s)/cm$$

យើងដូរឯកតាពីសង់ទីម៉ែត្រ ទៅ មីក្រូម៉ែត្រ ($1\,cm = 10000\,\mu m$) នោះយើងបានកាំនៃសរសៃឈាមគឺ $80\,\mu m$ ។ វ៉ិចទ័រល្បឿននៅអ័ក្សកណ្ដាលគឺ $11850\,\mu m/s$ ដែលថយចុះទៅ $11110\,\mu m/s$ នៅចម្ងាយនៃកាំ $r = 20\,\mu m$ ជាការពិត $\frac{dv}{dr} = -74\,\mu m/s$ មានន័យថា ពេលកាំ $r = 20\,\mu m$ វ៉ិចទ័រល្បឿនគឺថយចុះដោយអត្រាប្រហែល $74\,\mu m/s$ ។

នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

ឧទាហរណ៍៨. សន្មតថា $C(x)$ ជាការចំនាយសរុបដែលក្រុមហ៊ុនត្រូវផលិតនូវទំនិញឯកតា x ។ អនុគមន៍ C ត្រូវបានគេហៅថាជាអនុគមន៍ចំនាយ ។ បើសិនជាចំនួននៃទំនិញដែលបានផលិតកើនពី $x_1 \to x_2$ នោះតម្លៃដែលត្រូវបន្ថែមគឺ $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ ហើយអត្រាមធ្យមនៃការប្រែប្រួលតម្លៃគឺ

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{C(x_1+\Delta x)-C(x_1)}{\Delta x}$$

លីមីតនៃបរិមាណនេះ ពេល $\Delta x \to 0$ នោះជាអត្រាខណៈនៃការប្រែប្រួលការចំនាយដោយអាស្រ័យទៅនឹងចំនួនទំនិញដែលបានផលិត ត្រូវបានគេហៅថា Marginal Cost ដោយអ្នកសេដ្ឋកិច្ច ។

$$\text{Marginal Cost}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\frac{dC}{dx}$$

យក $\Delta x=1$ ហើយ n ធំ នោះ Δx គឺតូចធៀបទៅនឹង n យើងបាន: $C'(n)\approx C(n+1)-C(n)$

គេតាងនៃអនុគមន៍ចំនាយសរុបដោយអនុគមន៍ពហុធា: $C(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ ដែល a តំនាងឲ្យការចំនាយលើស (ជួល កំដៅ ការថែទាំ) ហើយតួផ្សេងទៀតតំនាងឲ្យ វត្ថុធាតុដើម កម្លាំងពលកម្មជាដើម ។

(ការចំនាយទៅលើវត្ថុធាតុដើម សមាមាត្រទៅនឹងអញ្ញាត x តែការចំនាយទៅលើពលកម្មសមាមាត្រទៅនឹងស្វ័យគុណខ្ពស់នៃ x ដោយសារតែការចំនាយលើបន្ថែមម៉ោង ហើយនិង ការពាក់ព័ន្ធគ្មានប្រសិទ្ធភាពមួយចំនួន។)ជាឧទាហរណ៍ សន្មតថាក្រុមហ៊ុនបានប៉ាន់ស្មានការចំនាយគិតជាដុល្លារនៅក្នុងការផលិតទំនិញ x ឯកតា នោះគឺ: $C(x)=10000+5x+0.01x^2$ នោះ Marginal Cost គឺ $C'(x)=5+0.02x$ ការចំនាយតិចតួចទៅនឹងកម្រិតនៃការផលិតទំនិញចំនួន 500 គឺ: $C'(500)=5+0.02\times 500=\$15/\text{item}$ នេះផ្តល់នូវអត្រានៃការចំនាយដែលកំពុងកើនឡើងដោយអាស្រ័យទៅលើផលិតផលដែលផលិតនៅពេល $x=500$ ហើយនឹងប៉ាន់ស្មានពីការចំនាយទៅលើផលិតផលទី 501 ។ការចំនាយជាក់ស្តែងទៅលើផលិតផលទី 501 គឺ:

$$C(501)-C(500)=\left[10000+5(501)+0.01(501)^2\right]-\left[10000+5(500)+0.01(500)^2\right]$$

$$=\$15.01$$

ចំនាំថា: $C'(500)\approx C(501)-C(500)$

វិទ្យាសាស្ត្រផ្សេងៗ

អត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរកើតឡើងនៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រទាំងអស់នេះ ។ ភូគព្ភវិទូម្នាក់បានចាប់អារម្មណ៍ចង់ដឹងពីអត្រាដែលថ្មរលាយក្នុងរាងកាយត្រជាក់ដោយប្រមូលកំដៅទៅក្នុងថ្មព័ទ្ធជុំវិញ ។ វិស្វករម្នាក់ចង់ដឹងពីអត្រាដែលហូរចេញ និងហូរចូលពីអាងស្តុកទឹកមួយ ។ អ្នកភូមិសាស្ត្រចាប់អារម្មណ៍ចង់ដឹងពីអត្រានៃ

ដង់ស៊ីតេប្រជាជននៅក្នុងក្រុង ខណៈចម្ងាយពីទីក្រុងត្រូវបានកើនឡើង ។ អ្នកឧតុនិយមមានការព្រួយបារម្ភពីអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរសម្ពាធនសបរិយាកាសទាក់ទងនឹងកម្ពស់ ។

១.២.កំណើនអ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និង ការពុកផុយ (Exponential Growth and Decay)

នៅក្នុងបាតុភូតធម្មជាតិបរិមាណកើនឡើង ឬថយចុះតាមអត្រាសមាមាត្រទៅនឹងទំហំរបស់វា ។ ជាឧទាហរណ៍ បើ $y = f(t)$ ជាចំនួនឯកត្តលក្ខណៈរបស់សត្វ ឬបាក់តេរីនៅខណៈពេល t ហើយបន្ទាប់មកវាហាក់ដូចជាសមហេតុផលក្នុងការរំពឹងថាអត្រាកំណើន $f'(t)$ សមាមាត្រទៅនឹងចំនួនប្រជាជន $f(t)$ នោះគេបាន $f'(t) = kf(t)$ ដែល k ជាចំនួនថេរ ។ ជាការពិតស្ថិតក្នុងលក្ខខណ្ឌល្អប្រសើរមួយ (បរិស្ថានគ្មានដែនកំណត់ អាហារូបត្ថម្ភគ្រប់គ្រាន់ ភាពសាំនឹងជម្ងឺ) ទម្រង់ក្នុងគណិតវិទ្យាដែលឲ្យដោយសមីការ $f'(t) = kf(t)$ ហើយទស្សន៍ទាយនូវអ្វីដែលកើតឡើងពិតប្រាកដត្រឹមត្រូវ ។ ជាឧទាហរណ៍ដែលនៅក្នុងរូបវិទ្យានុយក្លេអ៊ែរដែលម៉ាសសារធាតុវិទ្យុសកម្មថយចុះក្នុងអត្រាសមាមាត្រទៅនឹងម៉ាស ។ នៅក្នុងគីមីវិទ្យា អត្រានៃប្រតិកម្មលំដាប់ដំបូងដែលមិនអាចគ្រប់គ្រងបានដោយសមាមាត្រទៅនឹងកំហាប់នៃសារធាតុ ។

នៅក្នុងហិរញ្ញវត្ថុនៃគណនីសន្សំជាមួយនឹងការប្រាក់ដែលបានបូកបញ្ចូលគ្នាជាបន្តបន្ទាប់ក្នុងអត្រាសមាមាត្រទៅនឹងតម្លៃនោះ ។

ជាទូទៅ បើ $y(t)$ ជាតម្លៃនៃបរិមាណ y នៅខណៈពេល t ហើយបើអត្រាបម្រែបម្រួលនៃ y អាស្រ័យទៅនឹង t គឺសមាមាត្រទៅនឹងទំហំរបស់វា $y(t)$ នៅខណៈពេលណាមួយ ពេលនោះគេកំណត់បាន:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = ky \qquad (1)}$$

ដែល k ជាចំនួនថេរមួយ

សមីការ (1) គេហៅថា ច្បាប់នៃការកើនឡើងធម្មជាតិ $(Law\ of\ natural\ growth)$ បើ $k>0$

ច្បាប់នៃការថយចុះធម្មជាតិ $(Law\ of\ natural\ decay)$ បើ $k<0$

វាត្រូវបានគេហៅថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយសារតែវាពាក់ព័ន្ធនឹងអនុគមន៍ដែលមិនស្គាល់មួយ y ហើយដេរីវេរបស់វា $\frac{dy}{dt}$ ។

វាពិបាកក្នុងការរកដំនោះស្រាយសមីការនៃសមីការ (1) ហើយសមីការនេះចង់ស្នើឲ្យយើងរកអនុគមន៍មួយដែលដេរីវេរបស់វាគឺជាផលគុណចំនួនថេរនៃខ្លួនវា ។

អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែលដែលមានទម្រង់ $y(t)=Ce^{kt}$ ដែល C ជាចំនួនថេរ ផ្ទៀងផ្ទាត់ទៅនឹង

$y'(t)=C(ke^{kt})=k(Ce^{kt})=ky(t)$

យើងនឹងឃើញនៅចំនុច 9.4 ដែលអនុគមន៍ខ្លះ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\frac{dy}{dt}=ky$ ត្រូវតែមានទម្រង់ $y=Ce^{kt}$

ដើម្បីដឹងពីសារៈសំខាន់នៃចំនួនថេរ C យើងសង្កេតឃើញថាៈ

$y(0)=Ce^{k\times 0}=C$

នោះ C ជាតម្លៃដំបូងនៃអនុគមន៍ ។

(2) ទ្រឹស្តីបទៈ ដំណោះស្រាយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dt}=ky$ ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល

$$y(t)=y(0)e^{kt}$$

កំណើនប្រជាជន

តើចំនួនថេរ k មានសារៈសំខាន់ដូចម្តេច?

នៅក្នុងបរិបទនៃកំណើនប្រជាជនដែល $P(t)$ ជាទំហំនៃប្រជាជននៅខណៈពេលនោះ ។ យើងអាចសរសេរៈ

(3)

$$\frac{dP}{dt}=kP\Rightarrow\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=k$$

បរិមាណ $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ គឺអត្រានៃកំណើនប្រជាជនចែកនឹងទំហំប្រជាជន ឬត្រូវបានគេហៅថាអត្រាកំណើនអិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬអត្រាកំណើនបន្តបន្ទាប់ ហើយត្រូវបានគេហៅថា អត្រាកំណើនដែលទាក់ទង $(relative\ growth\ rate)$ ។

អាស្រ័យតាមសមីការ 3 យើងអាចនិយាយបានថា អត្រាកំណើនគឺសមាមាត្រទៅនឹងទំហំប្រជាជន ។

យើងក៏អាចថា អត្រាកំណើនដែលទាក់ទងគឺជាចំនួនថេរ ។

សមីការ 2 អាចនិយាយបានថាចំនួនប្រជាជនដែលអត្រាកំណើនថេរ ត្រូវតែកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំង ។

ចំណាំថា: អត្រាកំណើនទាក់ទង k ជាមេគុណនៃ t ក្នុងអនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល Ce^{kt} ។ ជា **ឧទាហរណ៍** បើ: $\frac{dP}{dt}=0.02P$ ហើយ t គិតជាឆ្នាំ នោះយើងបាន អត្រាកំណើនទាក់ទងគឺ $k=0.02$ ហើយកំណើនប្រជាជននៅអត្រាទំនាក់ទំនង 2% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។ បើចំនួនប្រជាជននៅខណៈពេល 0 គឺ P_0 នោះយើងបានកន្សោមប្រជាជនគឺ: $P(t)=P_0e^{0.02t}$

ឧទាហរណ៍១. ប្រើប្រាស់ទិន្នន័យពិតនៃប្រជាជននៅលើពិភពលោកនៅក្នុងឆ្នាំ 1950 មានចំនួន 2560 លាននាក់ ហើយនឹង 3040 លាននាក់ ក្នុងឆ្នាំ 1960 ដើម្បីកំណត់គំរូប្រជាជនក្នុងពិភពលោកនៅពាក់កណ្តាលទីពីរនៃសតវត្សទី 20 ។ (សន្មតថាអត្រាកំណើនប្រជាជនគឺសមាមាត្រទៅនឹងចំនួនប្រជាជន) ។ តើអ្វីជាអត្រាកំណើនទំនាក់ទំនង? ប្រើប្រាស់គំរូនេះដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណចំនួនប្រជាជននៅក្នុងឆ្នាំ 1993 ហើយនឹងទស្សន៍ទាយចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2020 ។

ដំណោះស្រាយ:

យើងយក t គិតជាឆ្នាំ នោះយើងតាង $t=0$ ចំពោះឆ្នាំ 1950

$P(t)$ ជាចំនួនប្រជាជនគិតជាលាននាក់

នោះគេបាន $P(0)=2560$ និង $P(10)=3040$

យើងសន្មតថា $\frac{dP}{dt}=kP$ តាមទ្រឹស្តីបទទី ២ យើងបាន:

$$P(t)=P(0)e^{kt}=2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} \quad = 3040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

អត្រាកំណើនដែលទាក់ទងគឺប្រហែល 1.7% ក្នុងមួយឆ្នាំ

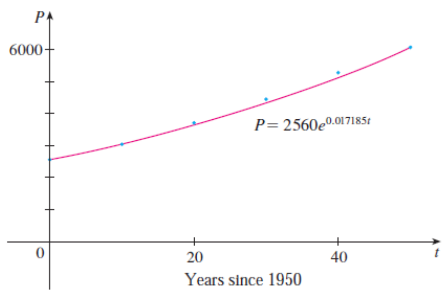
ហើយគម្រូនោះគឺ $P(t) = 2500e^{0.017185t}$

យើងប៉ាន់ប្រមាណចំនួនប្រជាជនពិភពលោកក្នុងឆ្នាំ 1993 គឺ

$P(43) = 2560e^{0.017185\times 43} \approx 5360$ លាននាក់

គម្រូនៃការទស្សន៍ទាយចំនួនប្រជាជនក្នុងឆ្នាំ 2020 នឹងបាន:

$P(70) = 2560e^{0.017185\times 70} \approx 8524$ លាននាក់



ក្រាហ្វក្នុងរូបទីមួយ បង្ហាញថាគម្រូគឺមានភាពត្រឹមត្រូវដល់ចុងសតវត្សន៍ទី 20 (ចំនុចតំនាងអោយចំនួនប្រជាជនជាក់ស្តែង) ហើយដូចនេះការប៉ាន់ស្មានចំពោះឆ្នាំ 1993 គឺមានភាពសមរម្យគួរឲ្យទុកចិត្តបាន។ តែចំពោះការទស្សន៍ទាយនៅឆ្នាំ 2020 គឺមានភាពប្រថុយច្រើន ។

ការថយចុះនៃវិទ្យុសកម្ម

សារជាតុវិទ្យុសកម្មថយចុះដោយការបញ្ចេញនូវវិទ្យុសកម្មដោយខ្លួនឯង ៕ ប្រសិនបើ $m(t)$ ជាម៉ាសដែលសល់ពីម៉ាសដើម m_0 នៃសារជាតុបន្ទាប់ពីខណៈពេល t នោះអត្រាថយចុះដែលទាក់ទងគឺៈ

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

ដោយ $\frac{dm}{dt}$ ជាចំនួនអវិជ្ជមាន នោះអត្រាថយចុះដែលទាក់ទងគឺវិជ្ជមាន ។ នោះយើងបានៈ

$$\frac{dm}{dt}=km$$

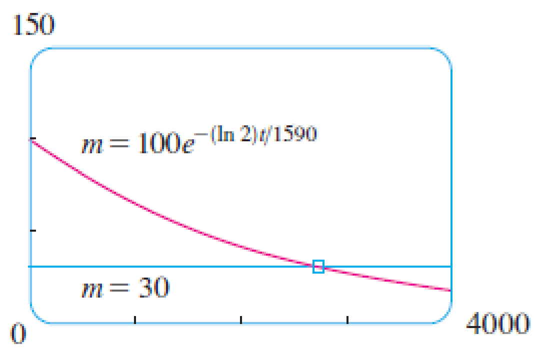
ដែល k ជាចំនួនអវិជ្ជមាន ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត សារធាតុវិទ្យុសកម្មថយចុះនៅអត្រាសមាមាត្រទៅនឹងម៉ាសដែលនៅសល់ ។ នេះមានន័យថាយើងអាចប្រើសមីការ (2) ដើម្បីបង្ហាញពីការថយចុះនៃម៉ាសយ៉ាងគំហុក ។

ឧទាហរណ៍២. ពាក់កណ្តាលជីវិតនៃរ៉ាដ្យូម 226 គឺ 1590 ឆ្នាំ ។

a. គំរូនៃរ៉ាដ្យូម 226 មានម៉ាស 100 mg ។ រករូបមន្តរបស់ម៉ាសនៃគំរូដែលនៅសល់បន្ទាប់ពីរយៈពេល t ឆ្នាំ

b. រកម៉ាសបន្ទាប់ពី 1000 ឆ្នាំ ដែលត្រូវគិតជាមីលីក្រាម

c. តើពេលណាដែលម៉ាសនឹងត្រូវបានកាត់បន្ថយដល់ 30 mg ?



ដំណោះស្រាយ

a. តាង $m(t)$ ជាម៉ាសនៃរ៉ាដ្យូម 226 (គិតជាមីលីក្រាម) ដែលសល់បន្ទាប់ពីរយៈពេល t ឆ្នាំ

នោះយើងបាន $\frac{dm}{dt}=km$, $y(0)=100$ នោះសមីការ (2) អោយជាៈ $m(t)=m(0)e^{kt}=100e^{kt}$

ដើម្បីកំណត់តម្លៃរបស់ k យើងប្រើការពិតដែល $y(1590)=\frac{1}{2}\times 100=50$ នោះយើងបានៈ

$$100e^{1590k} = 50 \;\Rightarrow\; e^{1590k} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; 1590k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\Rightarrow\; k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

នោះយើងបានៈ

$$m(t) = 100e^{-\frac{(\ln 2)t}{1590}}$$

យើងអាចប្រើការពិតថា $e^{\ln 2} = 3$ ដើម្បីសរសេរកន្សោមសម្រាប់ $m(t)$ ក្នុងកន្សោមជំនួសៈ

$$m(t) = 100 \times 2^{-\frac{t}{1590}}$$

b. ម៉ាសបន្ទាប់ពី 1000 ឆ្នាំគឺ $m(1000) = 100e^{-\frac{(\ln 2)(1000)}{1590}} \approx 65\ mg$

c. យើងចង់រកតម្លៃ t ដែល $m(t) = 30$ នោះយើងបានៈ

$$100e^{-\frac{t(\ln 2)}{1590}} = 30 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{t(\ln 2)}{1590}} = 0.3$$

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

$$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762$$ ឆ្នាំ

ច្បាប់នៃភាពត្រជាក់របស់លោកញូតុន

ច្បាប់នៃភាពត្រជាក់របស់លោកញូតុនបានចែងថា ជាអត្រានៃការត្រជាក់របស់វត្ថុ ដែលសមាមាត្រទៅនឹងភាពខុសគ្នានៃសីតុណ្ហភាពរវាងវត្ថុ និងបរិស្ថានរបស់វាដែលផ្តល់នូវភាពខុសគ្នាមិនធំពេក ។

បើយើងតាង $T(t)$ ជាសីតុណ្ហភាពរបស់វត្ថុនៅខណៈពេល t ហើយ T_s ជាសីតុណ្ហភាពនៃមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ ។ យើងបានរូបមន្តនៃច្បាប់ត្រជាក់របស់លោកញូតុនជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺៈ

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_s)\ ,\ k \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

សមីការនេះគឺមិនសក្តិសមទៅនឹងសមីការ (1) ទេ ហេតុនេះយើងផ្លាស់ប្តូរអថេរ $y(t)=T(t)-T_s$

T_s ជាចំនួនថេរ យើងបាន: $y'(t)=T'(t)$ នោះសមីការក្លាយជា $\frac{dy}{dt}=ky$

ដើម្បីរកតម្លៃ y យើងត្រូវប្រើប្រាស់សមីការ (2)

ឧទាហរណ៍៣. ដបសូដាមួយដបនៅសីតុណ្ហភាពបន្ទប់ 72^oC ត្រូវបានដាក់ក្នុងទូទឹកកកដែលមានសីតុណ្ហភាព 44^oC ។ បន្ទាប់ពីកន្លះម៉ោងសូដាប៉ុបបានត្រជាក់ដល់ 61^oF ។

a. តើសីតុណ្ហភាពនៃដបសូដានោះស្មើនឹងប៉ុន្មានបន្ទាប់ពីកន្លះម៉ោងផ្សេងទៀត?

b. តើវាត្រូវចំនាយពេលប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យដបសូដាត្រជាក់ដល់សីតុណ្ហភាព 50^oF ?

ដំណោះស្រាយ:

a. តាង $T(t)$ ជាសីតុណ្ហភាពនៃសូដានៅខណៈពេល t គិតជានាទី

សីតុណ្ហភាពនៃមជ្ឈដ្ឋានជុំវិញ $T_s=44^oF$

តាមច្បាប់ត្រជាក់របស់ញូតុនយើងបាន $\frac{dT}{dt}=k(T-44)$

តាង $y=T-44\ ,\ y(0)=T(0)-44=72-44=28$

នោះ y ផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយ $\begin{cases}\frac{dy}{dt}=ky\\ y(0)=28\end{cases}$

តាមសមីការ (2) យើងបាន: $y(t)=y(0)e^{kt}=28e^{kt}$

ដោយ $T(30)=61$ នោះ $y(30)=61-44=17$

$$\Leftrightarrow\ 28e^{30k}=17$$

$$\Leftrightarrow\ e^{30k}=\frac{17}{28}$$

$$\Leftrightarrow\ k=\frac{\ln\frac{17}{28}}{30}\approx -0.01663$$

យើងបានៈ

$$y(t)=28e^{-0.01663t}$$

$$T(t)=44+28e^{-0.01663t}$$

$$T(60)=44+28e^{-0.01663\times 60}\approx 54.3$$

ដូចនេះ after another half hour the pop has cooled to about 54

$b)$. យើងមាន $T(t)=50$ នោះ $44+28e^{-0.01663t}=50$

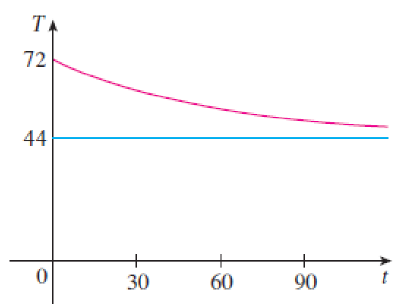
$$e^{-0.01663t}=\frac{6}{28}$$

$$t=\frac{\ln\frac{6}{28}}{-0.01663}\approx 92.6$$

ដូចនេះ ដបសូដានោះត្រជាក់ទៅដល់សីតុណ្ហភាព $50^{o}F$ គឺបន្ទាប់ពី $1h33mn$

កំណត់ចំនាំៈ ក្នុងឧទាហរណ៍ ៣ យើងបានៈ

$$\lim_{t\to\infty}T(t)=\lim_{t\to\infty}(44+28e^{-0.01663t})\quad =44+28\times 0=44$$



ការប្រាក់សមាសជាប់ (Continuously Compound Interest)

ឧទាហរណ៍៤. ប្រសិនបើលុយ $\$1000$ ត្រូវបានវិនិយោគក្នុងអត្រាការប្រាក់ 6% ប្រាក់សរុប (ទាំងដើម និងទាំងការ) ប្រចាំឆ្នាំ ហើយបន្ទាប់ពីមួយឆ្នាំ ការវិនិយោគមានតម្លៃ $\$1000(1.06)=\$1060$, បន្ទាប់ពីពីរឆ្នាំ វាមានតម្លៃ $\$[1000(1.06)]1.06=\$1123.60$ ហើយបន្ទាប់ពី t ឆ្នាំ វាមានតម្លៃ $\$1000(1.06)^t$

ជាទូទៅៈ បើសិនជាបរិមាណ A_0 ត្រូវបានដាក់វិនិយោគដោយអត្រាការប្រាក់ r $(r=0.06)$ ដូចក្នុងឧទាហរណ៍) ពេលនោះបន្ទាប់ពីរយៈពេល t ឆ្នាំតម្លៃរបស់វាគឺ $A_0(1+r)^t$

ជាធម្មតាការប្រាក់គឺត្រូវបានសរុបជាញឹកញាប់ n ដងក្នុងមួយឆ្នាំ ។ នោះក្នុងកំឡុងពេលនៃការសរុបរួមនីមួយៗអត្រាការប្រាកគឺ $\frac{r}{n}$ នោះ nt ក្នុង t ឆ្នាំ ។នោះតម្លៃនៃការវិនិយោគគឺៈ

$$A_n\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

ជាឧទាហរណ៍ បន្ទាប់ពីរយៈពេល បីឆ្នាំ ដោយអត្រា 6% ក្នុងការវិនិយោគ $\$1000$ នឹងមានតម្លៃៈ

$\$1000(1.06)^3=\$1191.02$ ការសរុបទឹកប្រាក់ប្រចាំឆ្នាំ

$\$1000(1.03)^6=\$1194.05$ ការសរុបទឹកប្រាក់ប្រចាំឆមាស

$\$1000(1.015)^{12}=\$1195.62$ ការសរុបទឹកប្រាក់ប្រចាំត្រីមាស

$\$1000(1.005)^{36}=\$1196.68$ ការសរុបទឹកប្រាក់ប្រចាំខែ

$\$1000\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365.3}=\$1197.20$ ការសរុបទឹកប្រាក់ប្រចាំថ្ងៃ

យើងឃើញថាការប្រាក់ដែលត្រូវបង់កើនឡើងនៅពេលចំនួនពេលសរុបកាន់តែយូរដែរនោះ ។

បើយើងតាង $n\to\infty$ ពេលនោះយើងនឹងការសរុបនៃការប្រាក់ជាបន្ត និងតម្លៃនៃការវិនិយោគនឹងក្លាយទៅជាៈ

$$A(t)=\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= \lim_{n\to\infty} A_0 \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rt}$$

$$= A_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} \right]^{rt} \ , \ m = \frac{n}{r}$$

តែលីមីតនៃកន្សោមនេះ គឺស្មើទៅនឹងចំនួន e (មើលសមីការ 3.6.6)

ដូចនេះជាមួយ ការប្រាក់នៃការសរុបជាបន្តបន្ទាប់នៅអត្រាការប្រាក់ r នោះបរិមាណបន្ទាប់បីរយៈពេល t ឆ្នាំគឺ:

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

ធ្វើដេរីវេលើសមីការ នោះយើងបាន: $\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t)$

ដែលនិយាយថា ការសរុបបន្តបន្ទាប់របស់ការប្រាក់ អត្រានៃការកើនឡើងនៃការវិនិយោគគឺសមាមាត្រទៅនឹងចំនួនទឹកប្រាក់របស់វា ។

ត្រលប់ទៅឧទាហរណ៍ ដែលទឹកប្រាក់ \$1000 បានដាក់វិនិយោគសម្រាប់រយៈពេលបីឆ្នាំដោយអត្រាការប្រាក់ 6% ។ យើងឃើញជាមួយការសរុបបន្តបន្ទាប់គ្នានៃការប្រាក់ តម្លៃនៃការវិនិយោគនឹងក្លាយជា:

$$A(3) = \$1000 \ e^{(0.06)\times 3} = \$1197.22$$

សំគាល់ឃើញថា តម្លៃនេះគឺវាជិតទៅនឹងចំនួនដែលយើងគណនារកការសរុបប្រចាំថ្ងៃ \$1197.20 ។ តែចំនួននេះគឺមានភាពងាយស្រួលក្នុងការគណនា បើយើងប្រើ ការសរុបជាបន្តបន្ទាប់ ។

១.៣. អត្រា

ប្រសិនបើយើងបូមកំពុងបូមខ្យល់ទៅក្នុងប៉េងប៉ោង នោះទាំងមាឌ និងកាំរបស់វាគឺកើនឡើង ហើយអត្រានៃការកើនឡើងរបស់វាគឺមានភាពទាក់ទងគ្នា ។ តែដើម្បីឲ្យវាមានភាពងាយស្រួលជាងក្នុងការកំណត់ឲ្យបានជាក់លាក់ពីអត្រានៃការកើនឡើងរបស់មាឌជាងអត្រានៃការកើនឡើងនៃកាំ ។

ក្នុងលំហាត់អត្រាទាក់ទងនេះ គំនិតយោបល់ដើម្បីគណនាអត្រាប្រែប្រួលនៃបរិមាណមួយin term នៃអត្រាប្រែប្រួលរបស់បរិមាណមួយផ្សេងទៀត (ដែលអាចងាយស្រួលជាងក្នុងការកំណត់) ។ ដើម្បីរកសមីការសមីការដែលទាក់ទងនឹងបរិមាណពីរ ហើយពេលនោះប្រើច្បាប់បណ្ដាក់ដើម្បីញធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងសងខាងដោយធៀបទៅនឹងពេលវេលា ។

ឧទាហរណ៍១. ខ្យល់ត្រូវបានគេបូមចូលទៅក្នុងបាល់មួយដែលមានរាងជាស្វ៊ែរ ហើយមាឌរបស់វាកើនឡើងដោយអត្រា $100cm^3/s$ ។ តើកាំរបស់ប៉េងប៉ោងកើនឡើងយ៉ាងដូចម្ដេចពេលដែលអង្កត់ផ្ចិតគឺ $50cm$?

ដំណោះស្រាយ

យើងសង្កេតទៅលើ

ពត៌មានដែលផ្ដល់ឲ្យ:

អត្រានៃការកើនឡើងមាឌរបស់ខ្យល់គឺ $100cm^3/s$

ពត៌មានដែលមិនដឹង:

អត្រានៃការកើនឡើងកាំរបស់ខ្យល់ពេលដែលមានអង្កត់ផ្ចិតគឺ $50cm$

ដើម្បីពីបរិមាណទាំងនេះតាមលក្ខណៈគណិតវិទ្យា យើងណែនាំនូវការលើកឡើងខ្លះៗ

តាង V ជាមាឌនៃប៉េងប៉ោង ហើយ r ជាកាំរបស់វា

គន្លឹះសំខាន់ក្នុងចងចាំអត្រានៃការបម្រែបម្រួលគឺ ដេរីវេ

នៅក្នុងលំហាត់នេះ មាឌ និងកាំរបស់វាជាអនុគមន៍នឹងពេល t ។ អត្រានៃការកើនឡើងនៃមាឌអាស្រ័យទៅនឹងពេល t គឺ ដេរីវេ $\frac{dV}{dt}$ ហើយអត្រានៃការកើនឡើងរបស់កាំទាក់ទងនឹងពេល t គឺ $\frac{dr}{dt}$ ។ យើងអាចកំណត់វាសារឡើងវិញ:

ផ្តល់ឲ្យ: $\frac{dV}{dt} = 100\, cm^3/s$

មិនស្គាល់: $\frac{dr}{dt}$ ពេល $r = 25cm$

តាមរូបមន្តមាឌនៃស្វ៊ែរ: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរដោយធៀបនឹង t នោះគេបាន:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

ជំនួស $r = 25$ ហើយ $\frac{dV}{dt} = 100$ ក្នុងសមីការនោះគេបាន:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi (25)^2} \times 100 = \frac{1}{25\pi}$$

កាំរបស់ប៉េងប៉ោងគឺកើនឡើងដោយអត្រា $\frac{1}{25\pi} \approx 0.0127\, cm/s$ ។

ឧទាហរណ៍២. កាំជណ្តើរមួយប្រវែង 10 ft ជាប់នឹងជញ្ជាំងបញ្ឈរមួយ ។

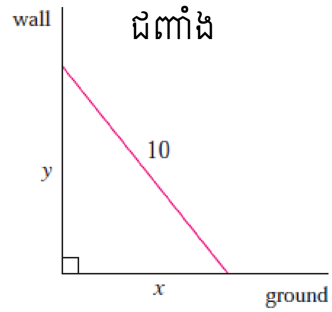
ដំណោះស្រាយ:

តាង x គិតជាហ្វីត ដែលជាចម្ងាយពីបាតនៃកាំជណ្តើរទៅជញ្ជាំង

y គិតជាហ្វីត ដែលជាកំពូលនៃជណ្តើរទៅដី

ដែល x និង y ជាអនុគមន៍នៃពេល t គិតជា s

យើងដឹងហើយថា $\frac{dx}{dt} = 1\, ft/s$



អ្វីដែលត្រូវរក $\frac{dy}{dt}$ ពេល $x=6$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រយើងបាន: $x^2+y^2=10^2$

$$x^2+y^2=100$$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង t យើងបាន:

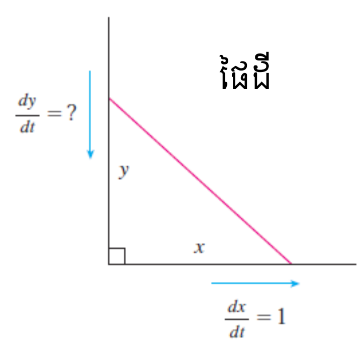
$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

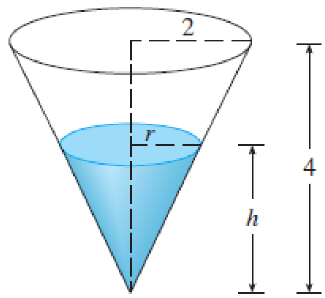
ដោយ $y^2=100-36 \Rightarrow y=8$, $\frac{dx}{dt}=1$ យើងបាន:

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{6}{8}\times 1=-\frac{3}{4}\ ft/s$$

មានន័យថា ចម្ងាយពីកំពូលនៃកាំជណ្តើរទៅដី គឺថយចុះដោយអត្រា $\frac{3}{4}\ ft/s$



ឧទាហរណ៍៣. ធុងទឹកមួយមានរាងកោនរង្វង់ ដែលមានកាំបាតស្មើនឹង $2\ m$ និងកម្ពស់ $4\ m$ ។ បើទឹកត្រូវបានបញ្ចូលទៅក្នុងធុងដោយអត្រា $2m^3/\min$ ។ រកអត្រាដែលកម្រិតទឹកកំពុងឡើង នៅពេលដែលទឹកមានជម្រៅ $3\ m$?



ដំណោះស្រាយ

រូបតំនាង:

តាង V ជាមាឌនៃទឹក, r ជាកាំនៃទឹក , h ជាកំពស់នៃទឹកនៅខណៈពេល t ដែល t គិតជានាទី

យើងមាន $\frac{dV}{dt} = 2m^3/\min$

អ្វីដែលសួររក $\frac{dh}{dt}$ ពេល $h = 3m$

តាមរូបមន្តមាឌនៃកោន: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

តាមលក្ខណៈនៃត្រីកោណដូចគ្នាក្នុងរូបទី ៣ នោះយើងបាន:

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$$

យើងបាន $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរធៀបនឹង t យើងបាន:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

ដោយ $h=3$, $\frac{dV}{dt}=2m^3/mn$ យើងបាន:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{9\pi}\times 2=\frac{8}{9\pi}$$

កម្រិតនៃទឹកកំពុងកើនឡើងដោយអត្រា $\frac{8}{9\pi}\approx 0.28m/mn$

វិធីសាស្ត្រក្នុងការដោះស្រាយចំនោទបញ្ហា

អានចំនោទបញ្ហាដោយប្រុងប្រយ័ត្ន

គូសដ្យាក្រាមបើអាច

បញ្ជាក់ពីនិមិត្តសញ្ញា ដោយដាក់និមិត្តសញ្ញាទាំងនោះទៅនឹងបរិមាណទាំងអស់ដែលជាអនុគមន៍នៃ t

បង្ហាញពត៌មានដែលបានផ្តល់ឲ្យ និងអត្រាដែលត្រូវការក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃដេរីវេ

សរសេរសមីការដែលទាក់ទងនឹងបរិមាណផ្សេងៗនៃលំហាត់ ឬបញ្ហា បើសិនជាចាំបាច់ប្រើប្រាស់នូវលក្ខណៈធរណីមាត្រដើម្បីលុបបំបាត់អថេរដោយជំនួស (ដូច ឧ៣)

ប្រើក្បួនបណ្តាក់ដើម្បីធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរនៃសមីការដោយធៀបទៅនឹងពេល t

ជំនួសនូវពត៌មានដែលគេឲ្យចូលទៅក្នុងលទ្ធផលសមីការ និងដោះស្រាយរកអត្រាដែលមិនស្គាល់

ឧទាហរណ៍៤. ឡាន A ធ្វើដំណើរទៅទិសខាងលិចដោយល្បឿន $50mi/h$ ហើយឡាន B ធ្វើដំណើរទៅទិសខាងជើងដោយល្បឿន $60mi/h$ ។ ឡានទាំងពីរត្រូវបានជួបគ្នានៅត្រង់ផ្លូវប្រសព្វនៃផ្លូវពីរ ។ តើនៅអត្រាប៉ុន្មានដែលឡានទាំងពីរនៅជិតគ្នា ហើយនៅពេលដែលឡាន A មានចម្ងាយ $0.3\,mi$ និងឡាន B មានចម្ងាយ $0.4\,mi$ ពីផ្លូវប្រសព្វគ្នានោះ ?

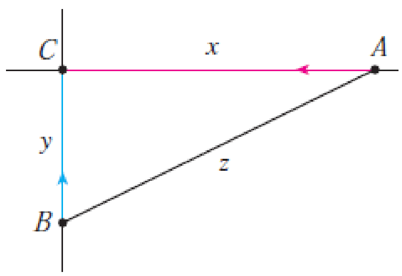
ដំណោះស្រាយ:

តាមរូបទី៤ C ជាចំនុចប្រសព្វនៃប្លង់ទាំងពីរ

នៅខណៈពេល t យើងតាង x ជាចម្ងាយពីឡាន A ទៅចំនុច C , y ជាចម្ងាយពីឡាន B ទៅចំនុច C , z ជាចម្ងាយរវាងឡានទាំងពីរ ហើយ x,y,z គិតជាម៉ាយល៍ ។

យើងមាន: $\frac{dx}{dt} = -50\,mi/h$, $\frac{dy}{dt} = -60\,mi/h$ (ដេរីវេគឺអវិជ្ជមានពីព្រោះ x និង y ថយចុះ)

អ្វីដែលត្រូវរក $\frac{dz}{dt}$



តាមទ្រឹស្តីបទពីតាក័រក្នុងត្រីកោណ ΔABC $: z^2 = x^2 + y^2$

ធ្វើដេរីវេលើអង្គទាំងពីរដោយធៀបនឹង t យើងបាន:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

ដោយ $x = 0.3$, $y = 0.4$, $z = 0.5$ យើងបាន:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}\left[0.3(-50) + 0.4(-60)\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = -78\,mi/h$$

ឡានគឺនៅជិតគ្នាដោយអត្រា $78\ mi/h$ ។

ឧទាហរណ៍៥. បុរសម្នាក់បានដើរតាមបណ្ដោយផ្លូវត្រង់ដោយល្បឿន $4\,ft/s$ ។ ពន្លឺស្វែងរកមួយ $(Searchlight)$ មានទីតាំងស្ថិតនៅលើដីដែលមានចម្ងាយ $20\ ft$ ពីផ្លូវហើយត្រូវបានផ្ដោតទៅលើបុរសម្នាក់ ។ តើនៅអត្រាប៉ុន្មានដែល $Searchlight$ បង្វិល ពេលដែលបុរសនោះគឺមានចម្ងាយ $15\ ft$ ពីចំនុចដែលនៅលើផ្លូវដែលជិតបំផុតទៅនឹង $Searchlight$?

ដំណោះស្រាយ

គូររូបទីប្រាំ ហើយតាង x ជាចម្ងាយពីបុរសទៅនឹងចំនុចនៅលើផ្លូវដែលជិតនឹង $Searchlight$ បំផុត ។

តាង θ ជាមុំដែលផ្គុំឡើងដោយកាំរស្មីនៃ $Searchlight$ និងកែងទៅនឹងផ្លូវនោះ ? .

យើងមាន $\frac{dx}{dt} = 4\ ft/s$

អ្វីដែលសួររយក: $\frac{d\theta}{dt}$ ពេល $x = 15$

តាមរូបទី៥ យើងបាន: $\tan\theta = \frac{x}{20} \ \Rightarrow\ x = 20\tan\theta$

ធ្វើដេរីវេអង្គទាំងសងខាងធៀបនឹងពេល t នោះយើងបាន

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

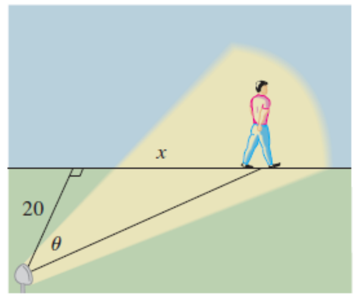
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

ដោយ $x = 15$, the length of beam 25 នោះ $\cos\theta = \frac{4}{5}$

យើងបាន: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$

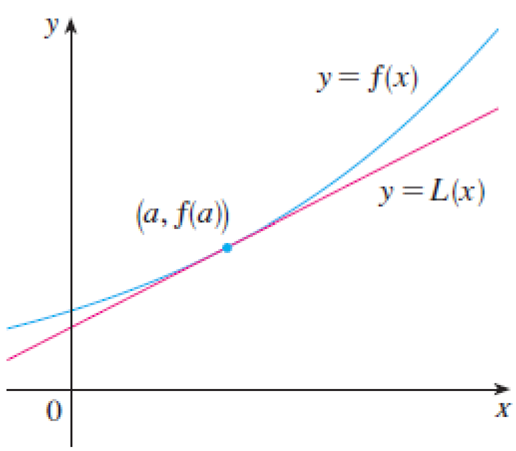
$Searchlight$ គឺបង្វិលដោយអត្រា $0.128\,rad/s$ ។



១.៤. ការប៉ាន់ស្មានលីនេអ៊ែ និងឌេរីវេ

យើងបានឃើញថាខ្សែកោងស្ថិតនៅជិតនឹងបន្ទាត់ប៉ះរបស់វានៅជិតចំនុចនៃភាពលំអៀង ។ តាមពិត តាមរយៈការពង្រីកទៅចំនុចមួយនៅលើក្រាហ្វនៃ Differentiable function យើងសង្កេតឃើញថាក្រាហ្វមើលទៅមានលក្ខណៈកាន់តែច្រើនដូចបន្ទាត់តង់សង់របស់វា ។ ការអង្កេតនេះជាមូលដ្ឋានសម្រាប់វិធីសាស្ត្រក្នុងរកតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលរបស់អនុគមន៍ ។

វាមានលក្ខណៈងាយស្រួលក្នុងការគណនាតម្លៃ $f(a)$ នៃអនុគមន៍ តែវាពិបាក (ឬអាចធ្វើទៅបាន) ដើម្បីគណនាតម្លៃក្បែរនៃ f ។ យើងដោះស្រាយចំពោះតម្លៃដែលបានគណនាយ៉ាងងាយនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ L ដែលក្រាហ្វរបស់វាជាបន្ទាត់ប៉ះនៃអនុគមន៍នៅត្រង់ $(a, f(a))$ មើលរូបទី១



ម្យ៉ាងវិញទៀត យើងប្រើបន្ទាត់តង់សង់នៅត្រង់ $(a, f(a))$ ជាតម្លៃប្រហែលទៅនឹងខ្សែកោង $y = f(x)$ ពេល $x \to a$ នោះ

សមីការនៃបន្ទាត់នោះគឺៈ $y=f(a)+f'(a)(x-a)$

តម្លៃប្រហែលគឺៈ $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$ (1) គឺត្រូវបានគេហៅថា តម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរ ឬតម្លៃប្រហែលនៃបន្ទាត់ប៉ះរបស់អនុគមន៍ f ត្រង់ a ។

អនុគមន៍លីនេអ៊ែរដែលក្រាហ្វរបស់វាគឺជាបន្ទាត់តង់សង់គឺ $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ (2) ត្រូវបានគេហៅថា Linearization នៃអនុគមន៍ f នៅត្រង់ចំនុច a ។

ឧទេហរណ៍១. រកលីនេអ៊ែរនៃអនុគមន៍ $f(x)=\sqrt{x+3}$ នៅត្រង់ $a=1$ ហើយប្រើវាដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃចំនួន $\sqrt{3.98}$ និង $\sqrt{4.05}$ ។ តើម្លៃប្រហែលទាំងនេះនៅលើពីការប៉ាន់ស្មាន ឬ នៅក្រោមពីការប៉ាន់ស្មាន?

ដំណោះស្រាយៈ

ដេរីវេនៃ $f(x)=\sqrt{x+3}$ គឺ $f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

យើងបាន $f(1)=2$; $f'(1)=\frac{1}{4}$

ជួសតម្លៃទាំងនេះចូលទៅក្នុងសមីការ (2) នោះយើងបានលីនេអ៊ែរគឺៈ

$$L(x)=f(1)+f'(1)(x-1)$$

$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-1)=\frac{x}{4}+\frac{7}{4}$$

តាមសមីការ (1) នោះយើងបានៈ

$\sqrt{x+3}\approx\frac{7}{4}+\frac{x}{4}$ ពេល x ជិត 1

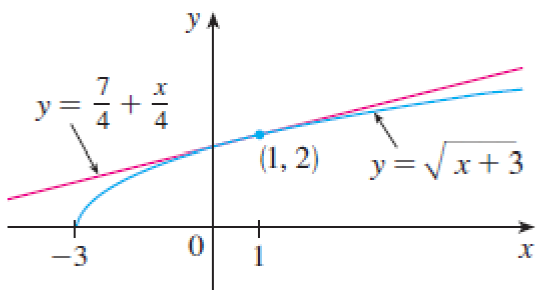
នោះយើងបានៈ

$$\sqrt{3.98}\approx\frac{7}{4}+\frac{0.98}{4}=1.995$$

$$\sqrt{4.05}\approx\frac{7}{4}+\frac{1.05}{4}=2.0125$$

តម្លៃប្រហែលនៃលីនេអ៊ែរត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី២ ខាងក្រោមៈ

យើងឃើញថា តម្លៃប្រហែលនៃបន្ទាត់តង់សង់គឺតម្លៃដ៏ល្អដល់អនុគមន៍នេះពេលដែល $x \to 1$ ។ យើងក៏ឃើញថាតម្លៃប្រហែលគឺស្ថិតនៅពីលើការប៉ាន់ស្មានដោយសារតែបន្ទាត់តង់សង់ស្ថិតនៅពីលើនៃខ្សែកោង ។



ក្នុងតារាងខាងក្រោមយើងប្រៀបធៀបការប៉ាន់ស្មានពីតម្លៃប្រហែលនៃលីនេអ៊ែរនៅក្នុង៩១ ជាមួយនឹងតម្លៃពិតប្រាកដ ។ ចំនាំ ពីតារាងទាំងនេះ និងរូបទី២ ដែលតម្លៃប្រហែលរបស់បន្ទាត់តង់សង់ផ្តល់នូវតម្លៃប៉ាន់ស្មានដ៏ល្អពេលដែល $x \to 1$ តែភាពត្រឹមត្រូវនៃការប៉ាន់ស្មានមានការថយចុះពេលដែល x នៅឆ្ងាយពីលេខ 1 ។

	x	From $L(x)$	Actual value
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176.....
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373....
$\sqrt{4}$	1	2	2.0000000....
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117......
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567.......
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797......
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974.....

ឧទាហរណ៍២. តើតម្លៃប៉ុន្មាននៃ x គឺជាតម្លៃប្រហែលនៃលីនេអ៊ែរ $\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4}+\frac{x}{4}$ ត្រឹមត្រូវចំពោះខាងក្នុង 0.5 ? តើតម្លៃប៉ុន្មានដែលត្រឹមត្រូវចំពោះខាងក្នុង 0.1?

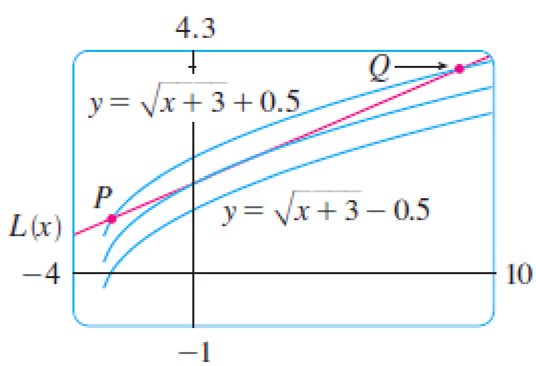
ដំណោះស្រាយ

ភាពត្រឹមត្រូវនៅក្នុងចន្លោះ 0.5 មានន័យថា អនុគមន៍គួរតែខុសគ្នាតិចជាង 0.5

យើងបាន $\left|\sqrt{x+3}-\left(\frac{7}{4}+\frac{x}{4}\right)\right|<0.5$

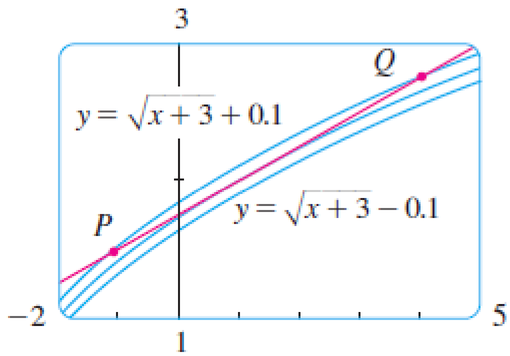
$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}-0.5<\frac{7}{4}+\frac{x}{4}<\sqrt{x+3}+0.5$

យើងអាចនិយាយបានថា ការគណនាប្រហាក់ប្រហែលលីនេអ៊ែរ គួរតែស្ថិតនៅចន្លោះខ្សែកោងដេលទទួលបានដោយការផ្លាស់ប្តូរខ្សែកោង $y=\sqrt{x+3}$ ឡើងលើ និងចុះក្រោមដោយចំនួន 0.5 ។ រូបទី៣ បង្ហាញពីបន្ទាត់តង់សង់ $y=\frac{7+x}{4}$ ប្រសព្វទៅនឹងខ្សែកោងផ្នែកខាងលើ $y=\sqrt{x+3}+0.5$ នៅត្រង់ចំនុច P និង Q ។ ពង្រីក និងប្រើទស្សន៍ទ្រនិច យើងប៉ាន់ប្រមាណអ័ក្ស x នៃចំនុច P គឺ ប្រហែល -2.66 និងចំនុច Q គឺប្រហែល 8.66 ។



យើងមើលឃើញពីក្រាហ្វដែលមានប្រហាក់ប្រហែល $\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4}+\frac{x}{4}$ គឺត្រឹមត្រូវក្នុងចន្លោះ 0.5 ពេល $-2.6<x<8.6$

ស្រដៀងគ្នា ពីរូបទី៤ យើងឃើញថាការប៉ាន់ស្មានប្រហាក់ប្រហែលក្នុងចន្លោះ 0.1 ពេល $-1.1<x<3.9$



ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ប្រសិនបើ $y=f(x)$ ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ នោះឌីផេរ៉ង់ស្យែល dx ជាអថេរមិនអាស្រ័យ មានន័យថា dx អាចផ្តល់នូវតម្លៃនៃចំនួនពិតណាមួយបាន ។

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល dy គឺកំណត់ជាទំនាក់ទំនងនៃ dx នោះគេបានសមីការៈ

$$\boxed{\begin{array}{c}(3).\\ dy=f'(x)dx\end{array}}$$

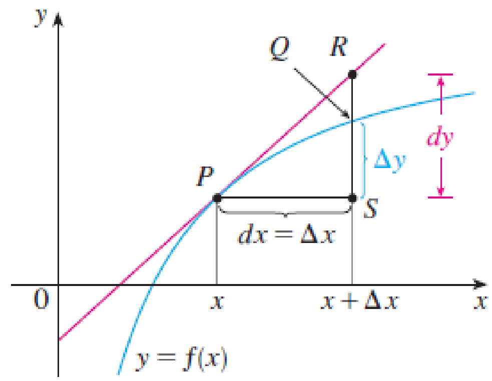
dy ជាអថេរអាស្រ័យ វាអាស្រ័យទៅលើតម្លៃនៃ x និង dx ។ បើសិន dx គឺជាតម្លៃមួយជាក់លាក់ ហើយ x គឺយកពីតម្លៃជាក់លាក់ណាមួយក្នុងដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f នោះតម្លៃលេខនៃ dy ត្រូវបាន កំណត់ ។

តាមអត្ថន័យធរណីមាត្រនៃឌីផេរ៉ង់ស្យែលគឺត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី ៥

តាង $P(x,f(x))$ និង $Q(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ ជាចំនុចនៅលើក្រាហ្វ f ហើយតាង $dx=\Delta x$

ដូចគ្នាបម្រែបម្រួលនៃ y គឺ: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$

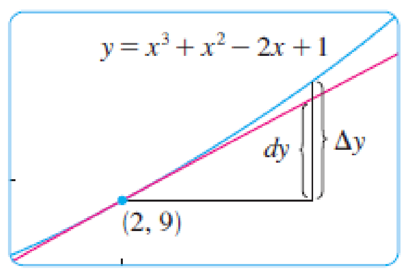
មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់តង់សង់ PR គឺជាដេរីវេ $f'(x)$ ។



ឧទាហរណ៍៣.ប្រៀបធៀបពីតម្លៃនៃ Δy និង dy បើ $y=f\left(x\right)=x^3+x^2-2x+1$ ហើយ x ប្តូរពី:

a. $2\to 2.05$

b. $2\to 2.01$



ដំណោះស្រាយ:

a. យើងមាន:

$$f\left(2\right)=2^3+2^2-2\times 2+1=9$$

$$f\left(2.05\right)=\left(2.05\right)^3+\left(2.05\right)^2-2\times 2.05+1=9.717625$$

$$\Delta y=f\left(2.05\right)-f\left(2\right)=0.717625$$

$$dy=f'\left(x\right)dx=\left(3x^2+2x-2\right)dx$$

ពេល $x = 2$ និង $dx = \Delta x = 0.05$ នោះយើងបាន:

$$dy = \left[3\times 2^2 + 2\times 2 - 2\right]\times 0.05 = 0.7$$

b. យើងមាន:

$$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

ពេល $dx = \Delta x = 0.01$ នោះយើងបាន:

$$dy = \left[3(2)^2 + 2(2) - 2\right]\times 0.01 = 0.14$$

ចំនាំថា: តម្លៃប្រហែលនៃ $\Delta y \approx dy$ មានភាពល្អប្រសើរកាលណា Δx មានតម្លៃកាន់តែតូចទៅៗ។ តម្លៃ dy ក៏កាន់តែមានភាពងាយស្រួលជាងក្នុងការគណនា Δy ។

នៅក្នុងនិមិត្តសញ្ញានៃឌីផេរ៉ង់ស្យែល តម្លៃប្រហែលលីនេអ៊ែរនៃសមីការ (1) អាចសរសេរបានដូចខាងក្រោម:

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

ឧ. ចំពោះអនុគមន៍ $f(x) = \sqrt{x+3}$ ក្នុងឧទាហរណ៍ ១ ។

យើងមាន: $dy = f'(x)dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+3}}$

បើ $a = 1$ និង $dx = \Delta x = 0.05$ នោះយើងបាន:

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1+3}} = 0.0125$$

ហើយ $\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$

ឧទាហរណ៍៤. កាំនៃស្វ៊ែរមួយត្រូវបានគេវាស់ និងត្រូវបានគេរកឃើញថាវាមានទំហំ $21cm$ ដោយមានកំហុសដែលអាចមានច្រើនបំផុតគឺ $0.05\ cm$ ។ តើតម្លៃខ្ពស់បំផុតប៉ុន្មានដែលមានកំហុសក្នុងការប្រើតម្លៃនៃកាំដើម្បីគណនាមាឌរបស់ស្វ៊ែរ?

ដំណោះស្រាយៈ

បើកាំនៃស្វ៊ែរគឺ r នោះមាឌនៃស្វ៊ែរគឺ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

បើមានបញ្ហាក្នុងការវាស់តម្លៃនៃ r នោះគេតាងដោយ $dr = \Delta r$ ហើយដូចគ្នាបញ្ហាក្នុងការគណនាមាឌ V គឺ ΔV ដែលអាចកំណត់តម្លៃប្រហែលវាបានដោយឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

ពេល $r = 21$ និង $dr = 0.05$ នោះយើងបានៈ

$$dV = 4\pi\left(21\right)^2 \times 0.05 \approx 277$$

តម្លៃអតិបរមាដែលមានបញ្ហាក្នុងការគណនាមាឌគឺប្រហែល $277\,cm^3$ ។

ចំនាំ

ទោះបីជាកំហុសដែលអាចកើតមានក្នុងឧទាហរណ៍ទីបួនដែលមើលទៅដូចជាធំជាង ហើយរូបភាពនៃកំហុសគឺត្រូវបានឲ្យដោយទំនាក់ទំនងកំហុស ដែលត្រូវបានគណនាដោយការចែកកំហុសនោះដោយមាឌសរុប ។

ភាពល្អៀងគណិតវិទ្យារវាងតម្លៃពិត និង តម្លៃប៉ាន់ស្មានតែងតែមាន៖

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

តាមឧទាហរណ៍៤ គេបាន $\frac{dr}{r} = \frac{0.05}{21} \approx 0.0024$ ។

១.៥. អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

បន្សំគូ និងសេសនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល e^x និង e^{-x} កើតឡើងជាញឹកញាប់ក្នុងគណិតវិទ្យា ហេតុនេះទើបសមទទួលនឹងទទួលនឹងបាននូវឈ្មោះពិសេស ។ ពួកវាមានលក្ខណស្រដៀងគ្នាទៅនឹងអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ហើយវាក៏មានទំនាក់ទំនងដូចទៅនឹងអ៊ីពែបូលដែលអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រមានរង្វង់ ។

ដោយសារហេតុផលទាំងនេះទើបគេហៅថា អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក (*Hyperbolic Functions*) ។

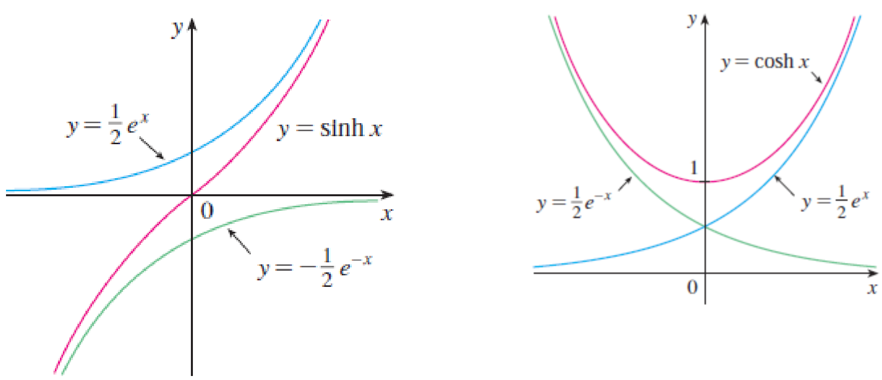
និយមន័យនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

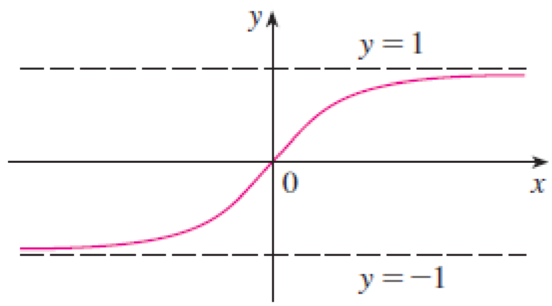
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

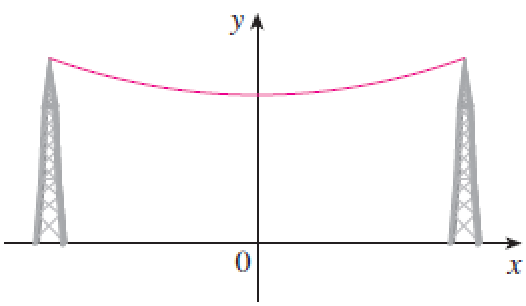
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

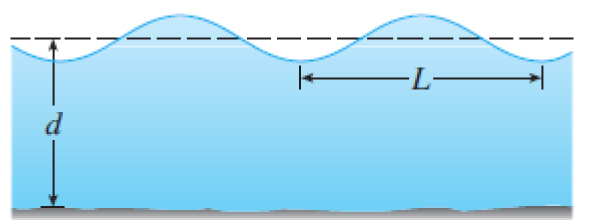
ក្រាហ្វខាងក្រោមបង្ហាញពីអនុគមន៍កូស៊ីនីសអ៊ីពែបូលិក និង ស៊ីនីសអ៊ីពែបូលិក និង តង់សង់អ៊ីពែបូលិក ដូចបង្ហាញក្នុងរូបខាងក្រោម៖





ចំណាំថា: sinh មានដែនកំណត់ $\mathbb{R}$ និងមានរូបភាព $\mathbb{R}$ ហើយ cosh មានដែនកំណត់ $\mathbb{R}$ និងរូបភាព $[1;+\infty]$ ។ ក្រាហ្វនៃ tanh បង្ហាញនៅរូបទី ៣ ។ វាមានអាស៊ីមតូតទ្រេត $y=\pm 1$ មើលលំហាត់ទី២៣ ខ្លះៗនៃគណិតវិទ្យាប្រើប្រាស់អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដែលនឹងបង្ហាញនៅក្នុងជំពូកទីក្រោយ។





សញ្ញាណនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

ឧទាហរណ៍១. បង្ហាញថា:

$a.\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$b.1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$

ដំណោះស្រាយ:

$$a.\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

$b.$ តាម a យើងបាន:

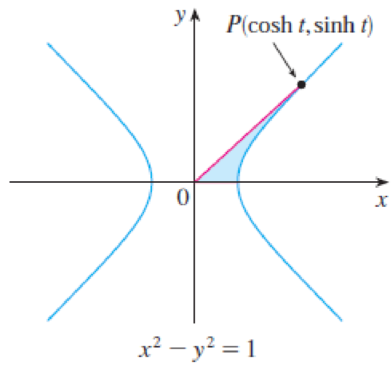
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

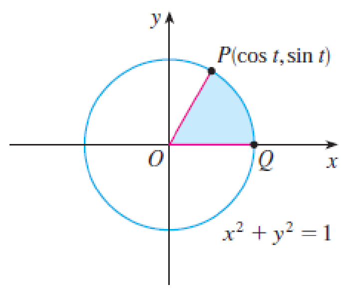
$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$$

របៀបមួយទៀត:

បើ t ជាចំនួនពិតណាមួយ ហើយចំនុច $P(\cos t;\sin t)$ ដែលស្ថិតលើរង្វង់ឯកតាដែលហៅថា $x^2 + y^2 = 1$ ដោយសារតែ $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ។ ជាការពិត t អាចត្រូវបានបកស្រាយថាជារង្វាស់កាំនៃ $\angle POQ$ ក្នុងរូបទី ៦ ។





ដោយហេតុផលនេះ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រត្រូវបានគេហៅថា អនុគមន៍រង្វង់ (Circular Function)

ដូចគ្នានេះដែរ បើ t ជាចំនួនពិតណាមួយ ហើយចំនុច $P(\cosh t;\sinh t)$ ដែលស្ថិតនៅលើអ័ក្សខណ្ឌចែកខាងស្តាំ (right branch) នៃសមីការអ៊ីពែបូល $x^2-y^2=1$ ដោយសារតែ $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ ដែល $\cosh t\geq 1$ ។ លើកនេះ t មិនបានតំនាងអោយរង្វាស់នៃមុំ ។

ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដែលអាចគណនាដោយស្រួល ។

១. $\dfrac{d}{dx}(\sinh x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$ ។

តារាងខាងក្រោម បង្ហាញពីដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

(1) ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x)=-\operatorname{csch} x\coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x)=-\operatorname{sech} x\tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x)=\operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x)=-\operatorname{csch}^2 x$$

ឧទាហរណ៍២. យើងអាចគណនាដោយបើក្បួនបណ្តាក់

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh\sqrt{x}\right)=\sinh\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{\sinh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

ពិនិត្យមើលរូបទី 1 & 3 ដែល $\sinh$ និង $\tanh$ ជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ ដូច្នេះហើយវាមានអនុគមន៍ច្រាសដែលតាងដោយ $\sinh^{-1}$ និង $\tanh^{-1}$ ។ រូបទី២ បង្ហាញថា $\cosh$ មិនមែនជាអនុគមន៍មួយទល់មួយ តែពេលវាមានដែនកំណត់ $[0,\infty]$ វាក៏ក្លាយជាអនុគមន៍មួយទៅមួយ ។ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកកូស៊ីនីសច្រាសគឺកំណត់ភាពច្រាសនៃដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ ។

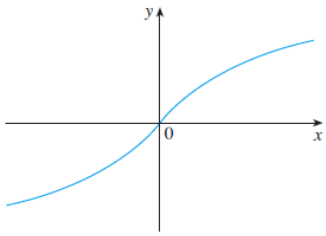
(2) លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ច្រាស

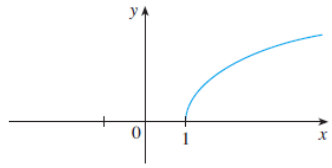
$$y=\sinh^{-1}x\Rightarrow \sinh y=x$$

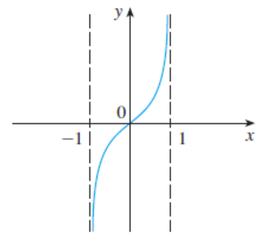
$$y=\cosh^{-1}x\Rightarrow \cosh y=x \quad ;\ y\ge 0$$

$$y=\tanh^{-1}x\Rightarrow \tanh y=x$$

យើងអាចគូសក្រាហ្វនៃ $\sinh^{-1}$,$\cosh^{-1}$,$\tanh^{-1}$ ក្នុងរូបទី ៨ ទី៩ ទី១០ ដោយប្រើរូបទី ១ ទី២ ទី៣







អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកគឺកំណត់ក្នុងទម្រង់ជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ហើយវាក៏មិនចម្លែកដែរ ដែលអនុគមន៍ច្រាសអ៊ីពែបូលិកកំណត់ក្នុងទម្រង់ជាអនុគមន៍ឡូការីតនោះ ។

យើងបានតារាង

(3) $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);\; x\in\mathbb{R}$
(4) $\cosh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\; x\geq 1$
(5) $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right);\; -1<x<1$

ឧទាហរណ៍. បង្ហាញថា $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

ដំណោះស្រាយ:

តាង $y=\sinh^{-1}x$

យើងបាន: $x=\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$\Rightarrow e^{y}-2x-e^{-y}=0$

$\Rightarrow e^{2y}-2xe^{y}-1=0$

$\Rightarrow \left(e^{y}\right)^{2}-2xe^{y}-1=0$

តាម $\Delta=b^{2}-4ac=\left(-2x\right)^{2}-4\left(1\right)\left(-1\right)=4x^{2}+4$

យើងបាន $e^{y}=\dfrac{2x\pm\sqrt{4x^{2}+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^{2}+1}$

ចំនាំ $e^{x}>0$ តែ $x-\sqrt{x^{2}+1}<0$ ពីព្រោះ $x<\sqrt{x^{2}+1}$

យើងបាន៖ $e^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1}$

$$\Rightarrow y=\ln e^{y}=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

មើលលំហាត់ទី២៥ សម្រាប់របៀបផ្សេងទៀត

(6) ដេរីវេនៃអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកច្រាស

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1}x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^{2}+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^{2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^{2}}$$

ឧទាហរណ៍៤. បង្ហាញថា $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}$

ដំណោះស្រាយ:

ទី១

តាង $y=\sinh^{-1}x \Rightarrow x=\sinh y$

ធ្វើដេរីវេសមីការនេះធៀបនឹង x គេបាន:

$$\cosh y\frac{dy}{dx}=1$$

ដោយ $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$ ហើយ $\cosh y\geq 0$ នោះ $\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}$

នោះ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\cosh y}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

ទី២

ពីសមីការ ៣ ដូចបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍ទី ៣

យើងបាន $\dfrac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} x\right)=\dfrac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

៥៩. រកតម្លៃ $\dfrac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\sin x)\right]$

ដំណោះស្រាយ

ប្រើប្រាស់តារាងលេខ ៦ និងលក្ខណៈបណ្តាក់នោះ យើងបាន៖

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\sin x)\right]=\frac{1}{1-(\sin x)^2}\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2 x}\cos x$$

$$=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\sec x$$

ឧទាហរណ៍បន្ថែម

៩១. តើមានបន្ទាត់ប៉ុន្មានដែលប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរ $y=-1-x^2$ និង $y=1+x^2$? រកកូអរដោនេនៃចំនុចទាំងនោះដែលបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលទាំងនោះ ?

ដំណោះស្រាយៈ

ដើម្បីទទួលការយល់ដឹងបានទូលំទូលាយទាក់ទងនឹងលំហាត់នេះ យើងគួរគូររូបរបស់វា គូសប៉ារ៉ាបូល $y=1+x^2$ (ជាសមីការស្តង់ដានៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ដោយផ្លាស់ឡើងលើ1ឯកតា) ហើយ $y=-1-x^2$ (ដែលបានមកពីការឆ្លុះរបស់ប៉ារ៉ាបូលទីមួយលើអ័ក្ស x)បើយើងព្យាយមគូសបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូលទាំងពីរ នោះយើងនឹងឃើញវាអាចមានតែពីរប៉ុណ្ណោះ ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទីមួយ ។តាង P ជាចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះក្នុងចំនោមបន្ទាត់ទាំងនេះប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលផ្នែកខាងលើ ហើយតាង a ជាកូអរដោនេរបស់វា ។ (និមិត្តសញ្ញាដែលយើងមិនស្គាល់ពិតជាសំខាន់ ។ ជាការពិតយើងអាចប្រើ b , c , x_0 , x_1 ជំនួស a ។ ទោះជាយ៉ាងណា វាមិនត្រូវបានគេណែនាំឲ្យប្រើ x ដើម្បីជំនួស a ទេ ពីព្រោះអីខ្លាចច្រលំទៅនឹងអថេរ x ក្នុងសមីការប៉ារ៉ាបូល ។) បន្ទាប់មក P ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=1+x^2$ នោះអរដោនេរបស់វាគឺ $y=1+a^2$ ។ ដោយសារភាពឆ្លុះគ្នាដូចបង្ហាញក្នុងរូបទីមួយ នោះកូអរដោនេរបស់ Q ដែលបន្ទាត់ប៉ះនឹងប៉ារ៉ាបូលផ្នែកខាងក្រោមគឺ $\left(-a\ ,\ -\left(1+a^2\right)\right)$ ដើម្បីប្រើទិន្នន័យដែលគេឲ្យថាបន្ទាត់នោះជាបន្ទាត់ប៉ះកាលណា មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ PQ ស្មើនឹងមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់នៅត្រង់ P

យើងមានៈ $m_{(PQ)}=\dfrac{1+a^2-(-1-a^2)}{a-(-a)}=\dfrac{1+a^2}{a}$

បើ $f(x)=1+x^2$ នោះមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប្រាប់ទិសនៅត្រង់ P គឺ $f'(a)=2a$ នោះលក្ខខណ្ឌដែលយើងត្រូវការប្រើគឺៈ

$$\frac{1+a^2}{a}=2a$$

$$1+a^2=2a^2$$

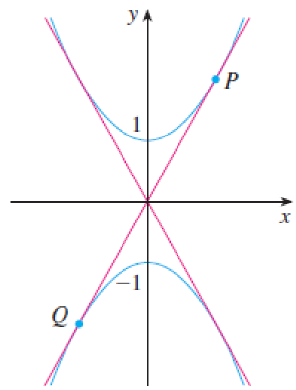
$$a^2=1 \Rightarrow\ a=\pm1$$

នោះចំនុចគឺ $(\ 1\ ,\ 2\ )$; $(\ -1\ ,\ -2\ )$

តាមភាពឆ្លុះនោះចំនុចផ្សេងទៀតគឺ

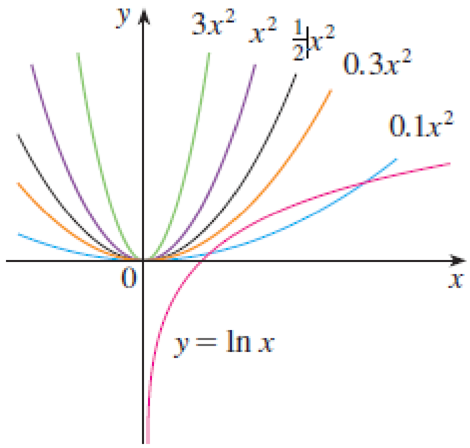
$(-1 , 2) \; ; \; (1 , -2)$

៤២. តើតម្លៃអ្វីនៃ c ដែលធ្វើ ... មានដំណោះស្រាយតែមួយគត់ ?

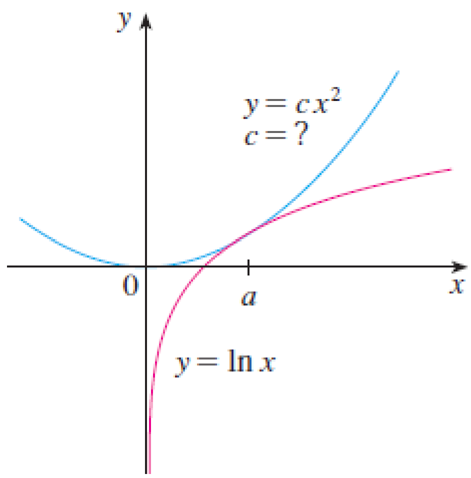


ចម្លើយ

ដើម្បីភាពងាយស្រួល យើងត្រូវគូសជ្យាក្រាម យើងផ្តើមដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \ln x$ និង $y = cx^2$ សម្រាប់គ្រប់តម្លៃផ្សេងគ្នានៃ c ។ យើងដឹងហើយថា ចំពោះ $c \neq 0$ នោះ $y = cx^2$ ជាប៉ារ៉ាបូលដែលបែរភាពផតឡើងលើបើ $c > 0$ និងបែរភាពផតចុះក្រោមបើ $c < 0$ ។ រូបទីពីរ បង្ហាញពីប៉ារ៉ាបូល $y = cx^2$ ចំពោះតម្លៃវិជ្ជមាន c មួយចំនួន ។



ភាគច្រើននៃប៉ារ៉ាបូលនោះ មិនប្រសព្វគ្នា នឹងអនុគមន៍ $y = \ln x$ ទាំងអស់ទេ ហើយមួយប្រសព្វពីរដង ។ យើងអាចឃើញថាមានតម្លៃនៃ c (នៅកន្លែងណាមួយរវាង 0.1 និង 0.3) ដែលខ្សែកោងប្រសព្វនឹងប៉ារ៉ាបូលតែម្តងដូចបង្ហាញក្នុងរូបទីបី ។



ដើម្បីស្វែងរកតម្លៃពិសេសនៃ c នោះយើងតាង a ជាអ័ក្ស x នៃចំនុចមួយរបស់ចំនុចប្រសព្វ ។ ម្យ៉ាងទៀត $\ln a = ca^2$ ហេតុនេះ a ជាដំណោះស្រាយតែមួយគត់របស់សមីការដែលគេឲ្យ ។ តាមរូបទីបី យើងឃើញថាខ្សែកោងគ្រាន់តែប៉ះ នោះវាមានបន្ទាត់ប៉ះមួយពេល $x = a$ នោះមានន័យថាខ្សែកោង $y = \ln x$ និង $y = cx^2$ មានមេគុណប្រាប់ទិសដូចគ្នា ពេល $x = a$ នោះយើងបាន:

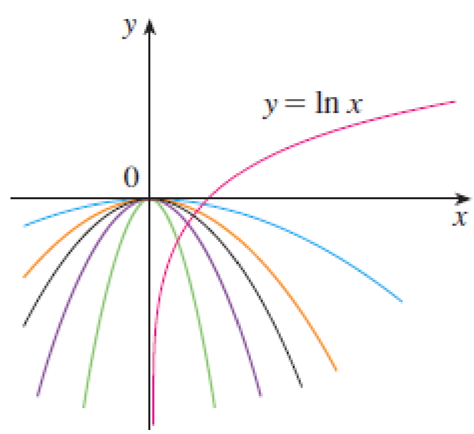
$$\frac{1}{a} = 2ca$$

ដោះស្រាយសមីការ $\begin{cases} \ln a = ca^2 \\ \frac{1}{a} = 2ca \end{cases} \Rightarrow \ln a = c \times \frac{1}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = e^{\frac{1}{2}}$

យើងបាន: $c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{1}{2e}$

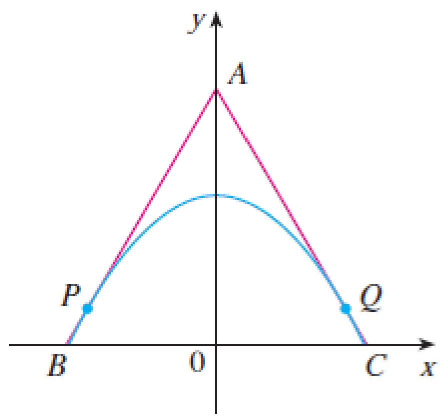
ចំពោះតម្លៃអវិជ្ជមាននៃ c ដូចយើងបង្ហាញក្នុងរូបទីបួន:

គ្រប់ប៉ារ៉ាបូលទាំងអស់ $y = cx^2$ ដែលមានតម្លៃ c អវិជ្ជមាន ប្រសព្វនឹង $y = \ln x$ ពិតប្រាកដមួយ ហើយកុំភ្លេចពីតម្លៃ $c = 0$ នោះខ្សែកោងគឺ $y = 0x^2 = 0$ គឺគ្រាន់តែជាអ័ក្ស x ដែលប្រសព្វនឹង $y = \ln x$ យ៉ាងពិតប្រាកដតែម្តង ។នោះយើងបានតម្លៃដែលត្រូវការ $c = \frac{1}{2e}$ ហើយ $c \le 0$ ។



លំហាត់

1. រកចំនុច P និង Q នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=1-x^2$ នោះត្រីកោណ ABC ដែលបង្កើតដោយអ័ក្សអាប់ស៊ីស x និងបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ P និង Q ជាត្រីកោណសមបាត ។ (មើលរូប)



2. រកចំនុចដែលខ្សែកោង $y=x^3-3x+4$ និង $y=3(x^2-x)$ ប្រសព្វគ្នា នោះវាមានបន្ទាត់ប៉ះរួមគ្នា ។ គូសរូបតំនាងខ្សែកោងទាំងពីរ និងបន្ទាត់ប៉ះរួម ។

3. បង្ហាញថាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងប៉ារ៉ាបូល $y=ax^2+bx+c$

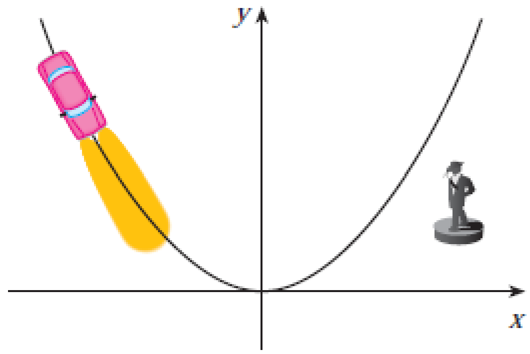
4. បង្ហាញថា $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\dfrac{\cos^2 x}{1+\tan x}\right)=-\cos 2x$

5. បើ $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{\sec t-\sec x}{t-x}$ ។ រកតម្លៃនៃ $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

6. រកតម្លៃចំនួនថេរ a & b ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x}=\dfrac{5}{12}$

7. បង្ហាញថា $\sinh^{-1}(\tan x)=\tan^{-1}(\sinh x)$

8. ឡានមួយកំពុងធ្វើដំណើរតាមបណ្ដោយផ្លូវហាយវេមួយដែលមានរាងជាប៉ារ៉ាបូលហើយមានកំពូលនៅត្រង់គល់តម្រុយ (មើលរូប) ។

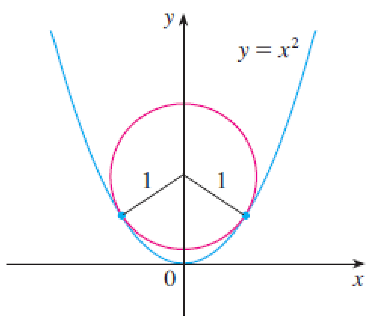


ឡានចាប់ផ្តើមធ្វើដំណើរនៅត្រង់ទីតាំងមួយដែលមានចម្ងាយ 100 m ពីខាងលិច 100 m ពីខាងជើងនៃគល់តម្រុយ ហើយធ្វើដំណើរទៅតាមទិសខាងកើត ។ មានរូបចម្លាក់មួយដែលស្ថិតនៅចម្ងាយ 100 m ពីខាងកើត និង 50 m ពីខាងជើងនៃគល់តម្រុយ ។ តើត្រង់ទីតាំងណានៅលើផ្លូវនេះ ភ្លើងឡាននឹងត្រូវចាំងលើរូបចម្លាក់នោះ ?

9. បង្ហាញថា $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

10. រកដេរីវេទី n នៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$

11. រូបខាងក្រោមបង្ហាញពីរង្វង់មួយដែលមានកាំ $r=1$ ហើយចារឹកក្នុងប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។ រកផ្ចិតរបស់រង្វង់ ។



12. បើ f មានដេរីវេនៅត្រង់ a ដែល $a>0$. Evaluate the following limit in terms of $f'(a)$

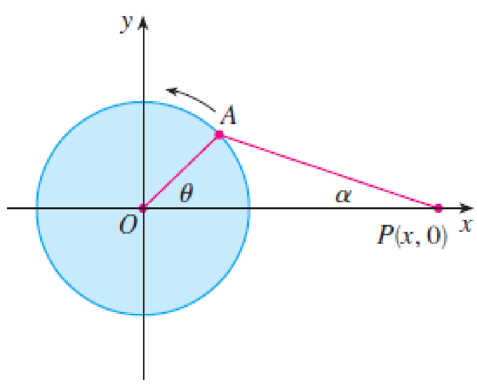
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

13. រូបខាងក្រោមនេះ បង្ហាញពីការរង្វិលរបស់កង់មួយ (កង់បង្វិល) ដែលមានកាំ $40\ cm$ ហើយ និងខ្សែភ្ជាប់ AP ដែលមានប្រវែង $1.2\ m$ ។ ចំនុច P រំកិលពីក្រោយតាមអ័ក្ស x ខណៈកង់វិលច្រាស ទ្រនិចនាឡិកាតាមអត្រាបជិវត្ត 360 ក្នុងមួយនាទី ។

$a.$ Find the angular velocity of the connecting rod , $\frac{d\alpha}{dt}$ in radians per second, when $\theta = \frac{\pi}{3}$

$b.$ បង្ហាញថាកន្សោមចម្ងាយចរ $x = |OP|$ ជាអនុគមន៍នៃ θ

$c.$ រកកន្សោមចំពោះល្បឿនត្រង់ចំនុច P ជាអនុគមន៍នៃ θ

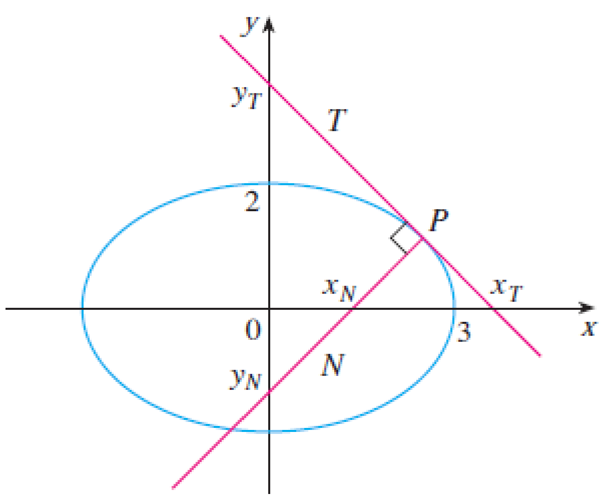


14. បន្ទាត់ប៉ះ T_1 និង T_2 គឺប៉ះនៅត្រង់ចំនុចពីររៀងគ្នាគឺ P_1 និង P_2 នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ ហើយបន្ទាត់ទាំងពីរប្រសព្វគ្នានៅត្រង់ចំនុច P ។ បន្ទាត់ប៉ះមួយទៀត T គឺប៉ះនៅត្រង់ចំនុចមួយនៅចន្លោះ P_1 និង P_2 នៅលើប៉ារ៉ាបូល ។ វាប្រសព្វនឹង T_1 នៅត្រង់ចំនុច Q_1 ហើយ ប្រសព្វនឹង T_2 នៅត្រង់ចំនុច Q_2 ។ បង្ហាញថា: $\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$ ។

15. បង្ហាញថា: $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{ax}\sin bx\right)=r^n e^{ax}\sin\left(bx+n\theta\right)$ ដែល a , b ជាចំនួនវិជ្ជមាន ហើយ $r=a^2+b^2$ និង $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ។

16. គណនា $\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-1}{x-\pi}$

17. តាង T , N ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅអេលីប $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ នៅត្រង់ចំនុច P នៅលើអេលីប ក្នុងកាជ្រង់ទីមួយ ។ តាង x_T និង y_T ជាចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះ T កាត់ នៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីស និងអរដោនេ ហើយ តាង x_N និង y_N ជាចំនុចដែលបន្ទាត់ប៉ះ N កាត់នៅលើអ័ក្សទាំងពីរ ។ នៅពេល P ផ្លាស់ទីទៅមុខនៅលើអេលីបក្នុងកាជ្រង់ទីមួយ (តែមិនមែនលើអ័ក្ស) ។ តើតម្លៃនៃ x_t , y_T , x_N , y_N ស្ថិតនៅត្រង់ណា ? ព្យាយាមប៉ាន់ស្មានចម្លើយដោយគ្រាន់តែមើលរូបខាងក្រោម ។ បន្ទាប់មកដោះស្រាយចំនោទនេះ ហើយពិនិត្យមើលថាការគិតរបស់អ្នកល្អប៉ុណ្ណា ។



18. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(3+x\right)^2-\sin 9}{x}$

19.

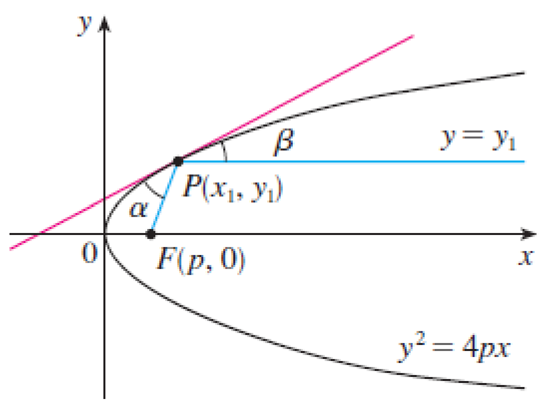
$a.$ ប្រើរូបមន្ត $\tan(x-y)$ ដើម្បីបង្ហាញថា ប្រសិនបើបន្ទាត់ L_1 និង L_2 ប្រសព្វគ្នានៅត្រង់មុំ α នោះយើងបាន: $\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ ដែល m_1 និង m_2 ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ L_1 និង L_2 រៀងគ្នា

$b.$ មុំរវាងខ្សែកោង C_1 និង C_2 នៅត្រង់ចំនុចប្រសព្វ P គឺត្រូវបានកំនត់ថាជាមុំរវាងបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង C_1 និង C_2 នៅត្រង់ P (បើសិនជាមានបន្ទាត់ប៉ះទាំងនោះ) ។ ប្រើប្រាស់ផ្នែក a ដើម្បីស្វែងរកចម្លើយ , correct to the nearest degree , the angle between each pair of curves at each point of intersection.

$i.$ $y = x^2$, $y = (x-2)^2$

$ii.$ $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

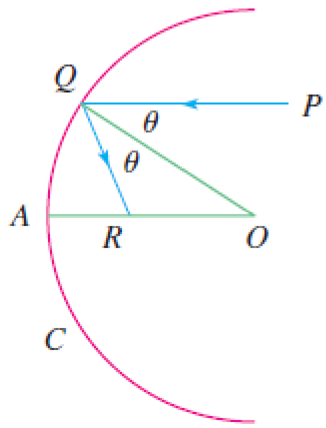
20. តាងចំនុច $P(x_1 , y_1)$ នៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2 = 4px$ ដែលមានកំនុំ $F(p , 0)$ ។ តាង α ជាមុំរវាងប៉ារ៉ាបូល និងអង្កត់ FP ហើយតាង β ជាមុំរវាងបន្ទាត់ដេក $y = y_1$ និងប៉ារ៉ាបូល ដូចបង្ហាញក្នុងរូប ។



បង្ហាញថា $\alpha = \beta$ ។

21. យើងសន្មតថាជំនួសកញ្ចក់ប៉ារ៉ាបូល (ក្នុងលំហាត់ទី២០) ដោយកញ្ចក់ស្វ៊ែរ ។ ទោះបីកញ្ចក់គ្មានកំណុំ ក៏ពួកអាចបង្ហាញពីអត្ថិភាពនៃកំណុំប្រហែលមួយ ។ នៅក្នុងរូប C ជាកន្លះរង្វង់ដែលមានផ្ចិត O ។ កាំរស្មីនៃពន្លឺចូលមកក្នុងកញ្ចក់ស្របទៅនឹងអ័ក្សនៅតាមបណ្តោយបន្ទាត់ PQ នឹងត្រូវបានឆ្លុះបញ្ចាំ

ទៅលើចំនុច R នៅលើអ័ក្ស ដូចនេះ $\angle PQO = \angle OQR$ ។ តើមានអ្វីកើតឡើងចំពោះចំនុច R នៅពេលដែល P ខិតជិតនឹងអ័ក្ស ?



22. បើ f និង g ជាអនុគមន៍មានដេរីវេ ដែល $f(0) = g(0) = 0$ ហើយ $g'(0) \neq 0$ បង្ហាញថា

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

23. គណនា: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$

24. អនុគមន៍ដឺក្រេទីបី $f(x) = x(x-2)(x-6)$ មានឫសបីផ្សេងគ្នា 0 , 2 , 6 ។ គូសក្រាហ្វតាងអនុគមន៍ f និងបន្ទាត់ប៉ះរបស់វា at the average of each pair of zeros. តើអ្នកកត់ចំណាំឃើញអ្វី ?

25. តើតម្លៃ k ប៉ុន្មានដែឡសមីការ $e^{2x} = k\sqrt{x}$ មានដំណោះស្រាយតែមួយគត់?

26. ចំពោះចំនួនគត់វិជ្ជមាន a តើវាពិតឬទេដែល $a^x \geq 1 + x$; $\forall x$?

27. បើ: $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\sin}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$ ។ បង្ហាញថា: $y' = \frac{1}{a + \cos x}$ ។

28. គេឲ្យអេលីបមួយ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ដែល $a \neq b$ ។ រកសមីការនៃសំនុំចំនុចទាំងអស់ដែលមានបន្ទាត់ប៉ះទៅខ្សែកោងដែលមានមេគុណប្រាប់ទិសគឺ:

a. ចម្រាស

b. ចម្រាសអវិជ្ជមាន ។

29. រកពីរចំនុចនៅលើខ្សែកោង $y=x^4-2x^2-x$ ដែលsមានបន្ទាត់ប៉ះមួយ ។

30. សន្មតថាមានបីចំនុចនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ មានប្រសព្វគ្នាបន្ទាត់កែងខ្សែងកោងត្រង់មួយចំណុច។ បង្ហាញថា ផលបូកអាប់ស៊ីសត្រង់ចំណុចកាត់កែងស្មើ 0។31. ចំណុចនៃបន្ទះឈើមួយនៅក្នុងប្លង់ ជាចំនុចមួយដែលកូអរដោនេជាចំនួនគត់ ។ សន្មតថារង្វង់ដែលមានកាំ r ត្រូវបានគូរដោយប្រើចំនុចនៃបន្ទះឈើទាំងអស់ជាផ្ចិត ។ រកតម្លៃតូចបំផុតនៃកាំដែលដែលមានបន្ទាត់ណាមួយដែលមានមេគុណប្រាប់ទិស 3 ហើយកាត់រង្វង់ខ្លះៗ នៃរង្វង់ទាំងអស់នេះ ។

32. កោនមួយមានកាំ r (cm) និងកម្ពស់ h (cm) ត្រូវបានបន្ទាបនៅចំនុចដំបូងដោយអត្រា $1\,cm/s$ ចូលទៅក្នុងស៊ីឡាំងខ្ពស់ដែលមានកាំ R (cm) ដែលត្រូវបានបំពេញដោយផ្នែកដោយទឹក ។

តើកម្រិតទឹកកើនឡើងថេរយ៉ាងដូចម្តេចរហូតដល់លិចកោនបាត់?

33. ធុងមួយមានរាងជាកោណបញ្ច្រាសដែលមានកម្ពស់ $16\,cm$ និង កាំ $5\,cm$ នៅកំពូល ។ វាត្រូវបានបំពេញដោយអង្គធាតុរាវៗដែលហូរតាមជ្រុង តាមអត្រាសមាមាត្រទៅនឹងផ្ទៃក្រលានៃធុងនោះដែលមានទំនាក់ទំនងជាមួយអង្គធាតុរាវ ។ (ផ្ទៃក្រលានៃកោណគឺ πrl ដែល r ជាកាំ ហើយ l ជាកម្ពស់ទាប) ។ បើយើងចាក់ទឹករាវចូលក្នុងធុងដោយអត្រា $2\,cm^3/mn$ ពេលនោះកម្ពស់នៃអង្គធាតុរាវថយចុះដោយអត្រា $0.3\,cm/mn$ ពេលដែលកម្ពស់វាគឺ $10\,cm$ ។ បើយើងចង់ រក្សាកម្ពស់វានៅកម្ពស់ថេរគឺ $10\,cm$ ។ តើនៅអត្រាប៉ុន្មានដែលយើងគួរតែចាក់ទឹករាវចូលទៅក្នុងធុងនោះ

មេរៀនទី២ ការប្រើប្រាស់ឌីផេរ៉ង់ស្យែល

២.១.តម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមា (Maximum and Minimum Values)

ការប្រើប្រាស់ការគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែលមួយចំនួន ដែលមានសារៈសំខាន់បំផុតគឺជាបញ្ហាដែលធ្វើឱ្យមានការប្រសើរឡើង ដែលក្នុងនោះពួកយើងត្រូវបានគេតម្រូវឱ្យស្វែងរកផ្លូវល្អបំផុតពីការធ្វើអ្វីមួយ។ ទាំងនោះគឺជាឧទាហរណ៍នៃបញ្ហាទាំងឡាយណាដែលពួកយើងនឹងដោះស្រាយក្នុងជំពូកនេះ ៖

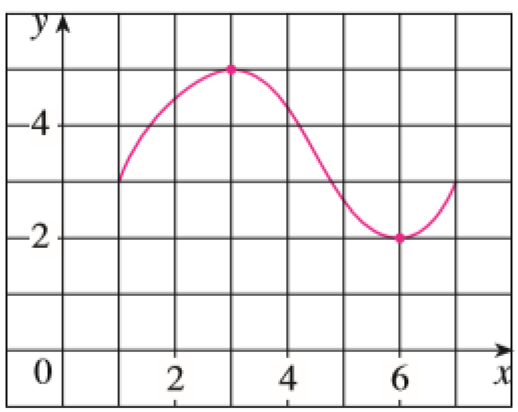
តើកំប៉ុងមួយដែលធ្វើឱ្យថ្លៃដើមផលិតកម្មអប្បបរមានេះ មានរូបរាងយ៉ាងដូចម្តេច?

តើការកើនឡើងអតិបរមារបស់ល្បឿនយានអាវកាសស្មើប៉ុន្មាន? (នេះគឺជាសំណួរសំខាន់ដល់អាវកាសចរដែលត្រូវទ្រាំទ្រទៅនឹងលទ្ធផលនៃការកើនឡើងល្បឿន)។

តើប្រវែងកាំនៃបំពង់ខ្យល់ ដែលបញ្ចេញខ្យល់បានទៀងទាត់បំផុត ក្នុងកំឡុងពេលក្អក មានប្រវែងស្មើប៉ុន្មាន?

តើសរសៃឈាមគួរបែកមែកនៅត្រង់មុំណា ដើម្បីឱ្យបេះដូងចំណាយកម្លាំងអប្បរមាក្នុងការបូមឈាម?

បញ្ហាទាំងនេះនឹងត្រូវបានកាត់បន្ថយក្នុងការស្វែងរកតម្លៃអតិបរមា ឬតម្លៃអប្បបរមានៃអនុគមន៍។ ជាដំបូងយើងត្រូវពន្យល់ឱ្យបានច្បាស់ថាតើតម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមាមានន័យយ៉ាងដូចម្តេច។



រូបទី 1

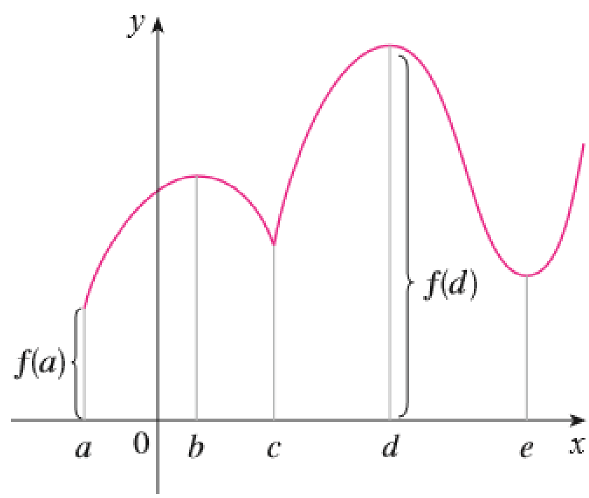
យើងឃើញថាចំណុចដែលខ្ពស់បំផុតនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ f បានបង្ហាញក្នុងរូបលេខ 1 គឺចំណុច $(3,5)$ ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀត តម្លៃធំបំផុតនៃ f គឺ $f(3)=5$ ។ លើសពីនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ f គឺ $f(6)=2$ ។ យើងអាចនិយាយបានថា $f(3)=5$ គឺជាអតិបរមាដាច់ខាតនៃ f ហើយ $f(6)=2$ គឺជាអប្បបរមាដាច់ខាត។

ជាទូទៅ យើងប្រើនិយមន័យដូចខាងក្រោម ៖ **និយមន័យ:** គេមាន c ជាចំនួនមួយក្នុងដែនកំណត់ D នៃអនុគមន៍ f ។ បន្ទាប់មក $f(c)$ គឺជា

តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតនៃ f លើ D ប្រសិនបើ $f(c)\geq f(x)\forall x\in D$ ។

តម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃ f លើ D ប្រសិនបើ $f(c)\leq f(x)\forall x\in D$ ។

ពេលខ្លះ តម្លៃធំបំផុតដាច់ខាតមួយ ត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃធំបំផុត ឬតូចបំផុតជាសាកល។ តម្លៃធំបំផុត និងតូចបំផុតនៃ f ត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃបរមានៃ f ។



រូបទី ២

រូបទី 2 បង្ហាញថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f មួយដែលមានអតិបរមាដាច់ខាតត្រង់ d និង អប្បបរមាដាច់ខាតត្រង់ a ។ ចំណាំថា $(d,f(d))$ គឺជាចំណុចដែលខ្ពស់បំផុតនៅលើក្រាបហើយ

$(a, f(a))$ គឺជាចំណុចដែលទាបបំផុត។ ក្នុងរូបទី 2 បើយើងពិនិត្យទៅលើតែតម្លៃនៃ x ខិតជិត b [ឧទាហរណ៍: បើយើងផ្តោតការយកចិត្តទុកដាក់ទៅលើចន្លោះ (a,c)] បន្ទាប់មក

$f(b)$ គឺជាតម្លៃដែលធំបំផុតនៃ $f(x)$ និងត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f ។ លើសពីនេះ $f(c)$ ត្រូវបានគេហៅថាតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃ f ព្រោះ $f(c) \leq f(x)$ ពេល x ខិតជិត c [ឧទាហរណ៍: លើចន្លោះ (b,d)] ។ អនុគមន៍ f ក៏មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c ដែរ។ ជាទូទៅ យើងមាននិយមន័យដូចខាងក្រោម ៖

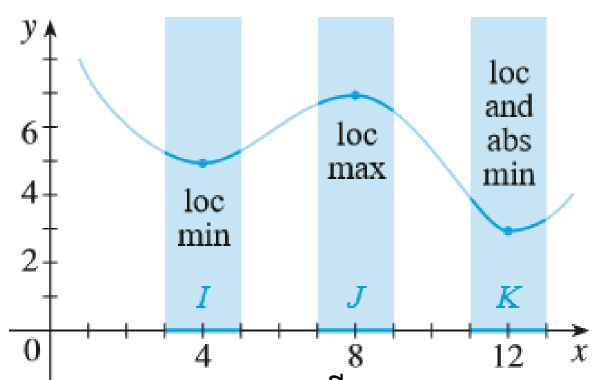
និយមន័យ: ចំនួន $f(c)$ គឺជា ៖

តម្លៃអតិបរមាធៀបមួយនៃ f ប្រសិនបើ $f(c) \geq f(x)$ នៅពេល x ខិតជិត c ។

តម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយនៃ f ប្រសិនបើ $f(c) \leq f(x)$ នៅពេល x ខិតជិត c ។

ក្នុងនិយមន័យទី 2 (និងនៅកន្លែងផ្សេងទៀត) បើយើងនិយាយថាមានអ្វីមួយដែលពិតខិតជិត c មានន័យថា វាពិតនៅលើចន្លោះបើកដែលផ្ទុក c ។ ឧទាហរណ៍: ក្នុងរូបទី 3 យើងឃើញថា $f(4)=5$ គឺជាអប្បបរមាធៀបព្រោះវាជាតម្លៃតូចបំផុតនៃ f នៅលើចន្លោះ I ។

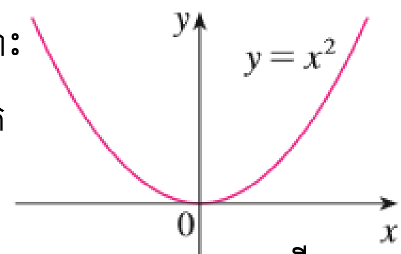
វាមិនមែនជាអប្បបរមាដាច់ខាតទេព្រោះ $f(x)$ មានតម្លៃតូចជាង នៅពេល x ខិតជិត 12 (ឧទាហរណ៍: ក្នុងចន្លោះ K) ។ តាមការពិត $f(12)=3$ គឺជាអប្បបរមាធៀបផង និងអប្បបរមាដាច់ខាតផង។ ស្រដៀងគ្នាដែរ $f(8)=7$ គឺជាអតិបរមាធៀប ប៉ុន្តែមិនមែនជាអតិបរមាដាច់ខាតទេ ព្រោះ f មានតម្លៃធំជាង នៅពេល x ខិតជិត 1 ។



រូបទី ៤

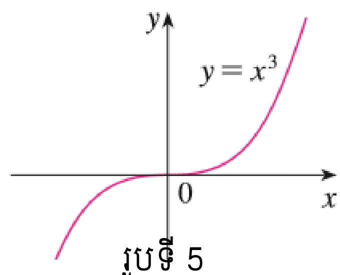
ឧទាហរណ៍ទី ១ : អនុគមន៍ $f(x)=\cos x$ ចំណាយពេលទៅលើតម្លៃអតិបរមាធៀប និងដាច់ខាត គ្មានទីបញ្ចប់ជាច្រើនដង ដោយសារតែ $\cos 2n\pi=1$ គ្រប់ចំនួនគត់ n ហើយ $-1\le\cos x\le 1\ \forall x$ ។ លើសពីនេះ $\cos(2n+1)\pi=-1$ គឺជាតម្លៃអតិបរមា ដែល n គឺជាចំនួនគត់ណាមួយ។

ឧទាហរណ៍ទី ២ : បើ $f(x)=x^2$ នោះ $f(x)\ge f(0)$ ព្រោះ $x^2\ge 0\ \forall x$ ។ ដូច្នេះ $f(0)=0$ គឺជាតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតផង និងជាតម្លៃអតិបរមាធៀបផងនៃ f ។ វាត្រូវគ្នាទៅនឹងការពិតដែលថាគល់តម្រុយគឺជាចំណុចដែលនៅក្រោមគេបង្អស់នៃប៉ារ៉ាបូល $y=x^2$ ។ (មើលរូបទី 4) ។ ប៉ុន្តែ វាមិនមានចំណុចដែលខ្ពស់បំផុតនៅលើប៉ារ៉ាបូលទេ ដូច្នេះហើយអនុគមន៍នេះគ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ។



រូបទី 4

ឧទាហរណ៍ទី ៣ : តាមក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^3$ ដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី 5 យើងឃើញថាអនុគមន៍នេះមិនមានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត ឬតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតឡើយ។ តាមពិតទៅ វាក៏គ្មានតម្លៃបរមាដែរ។

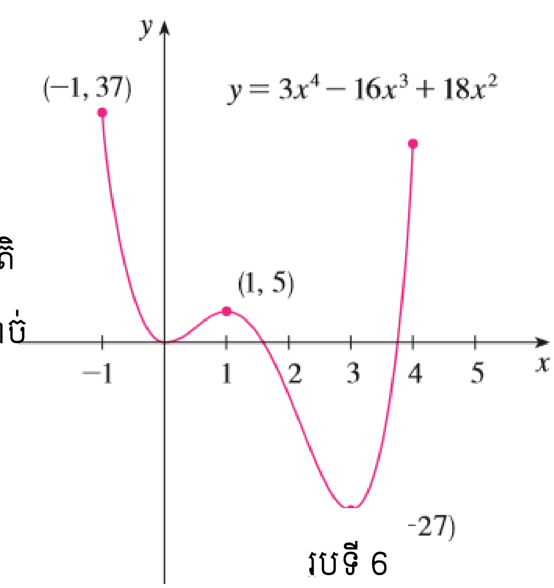


រូបទី 5

ឧទាហរណ៍ទី ៤ : ក្រាបនៃអនុគមន៍

$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2 \qquad -1\le x\le 4$

ត្រូវបានគេបង្ហាញក្នុងរូបទី 6 ។ អ្នកអាចឃើញថា $f(1)=5$ គឺជាអតិបរមាធៀប ចំណែកឯ អតិបរមាដាច់ខាតគឺ $f(-1)=37$ ។ (អតិបរមាដាច់ខាតនេះមិនមែនជាអតិបរមាធៀបទេ ព្រោះវាស្ថិតនៅចំណុចចុងមួយនៃក្រាប។) ម្យ៉ាងទៀត



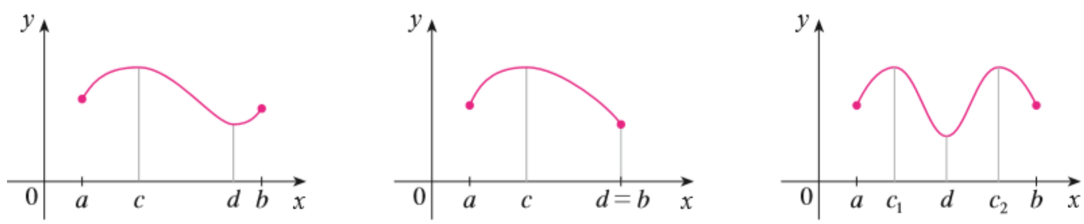
រូបទី 6

$f(0)=0$ គឺជាអប្បបរមាធៀប ហើយ $f(3)=-27$ គឺជាអប្បបរមាធៀបផង និងជាអប្បបរមាដាច់ខាតផង។

យើងបានឃើញថាអនុគមន៍ខ្លះមានតម្លៃបរមា ចំណែកឯអនុគមន៍ខ្លះមិនមានទេ។ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមផ្តល់នូវលក្ខខណ្ឌមួយចំនួន ដែលអនុគមន៍មួយត្រូវបានធានាថាមានតម្លៃបរមា។

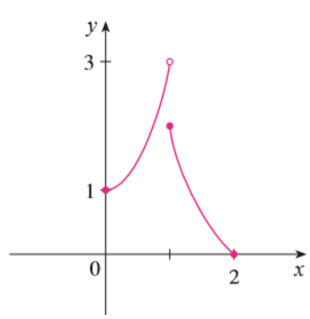
ទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) បើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះ f ទទួលបានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតមួយគឺ $f(c)$ និងតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតមួយគឺ $f(d)$ ដែលមានចំនួន c និង d នៅក្នុង $[a,b]$ ។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី 7 ។ ចំណាំថា តម្លៃបរមានៃខ្សែកោងមួយ អាចមានច្រើនជាងមួយ។ ទោះបីទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) ជាគំនិតដែលអាចទុកចិត្តបានយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏វាមានការពិបាកក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ដែរ ដូច្នេះហើយទើបយើងមិនបញ្ចូលការស្រាយបញ្ជាក់មកទេ។

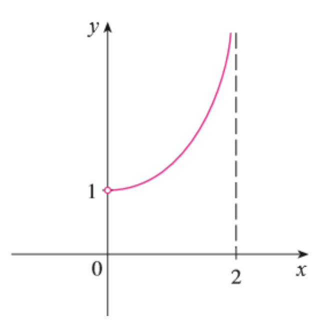


រូបទី 7

រូបទី 8 និង 9 បង្ហាញថាអនុគមន៍មួយមិនត្រូវការមានតម្លៃបរមាឡើយប្រសិនបើសម្មតិកម្ម (ភាពជាប់ ឬចន្លោះបិទ)មិនត្រូវបានបញ្ចូលពីទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) ។



រូបទី 8



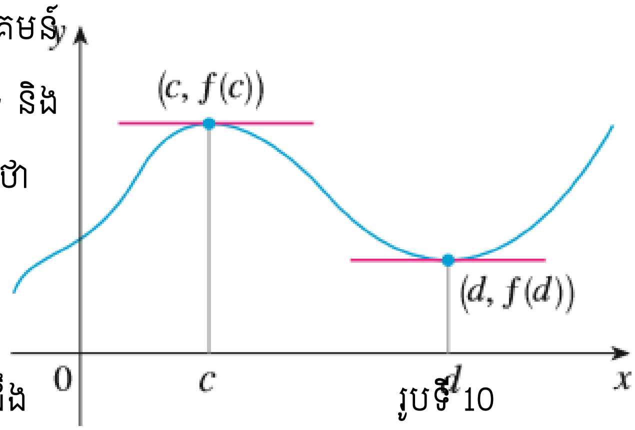
រូបទី 9

អនុគមន៍ f ដែលក្រាបរបស់វាត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី 8 ត្រូវបានកំណត់លើចន្លោះបិទ $[0,2]$ ប៉ុន្តែគ្មានតម្លៃអតិបរមាទេ។ (ចំណាំថាសំណុំរូបភាពនៃ f គឺ $[0,3)$) ។ អនុគមន៍នេះអាចយកតម្លៃប្រហែលស្មើនឹង 3 ប៉ុន្តែវាមិនអាចទៅដល់តម្លៃស្មើ 3 ទេ។ វាមិនប្រឆាំងនឹងទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) ទេ ព្រោះ f មិនមែនជាអនុគមន៍ជាប់។ [ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ អនុគមន៍ដាច់មួយអាចមានតម្លៃអតិបរមា និងអប្បបរមាបាន។ មើលលំហាត់ទី $13(b)$ ។]

អនុគមន៍ g ដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី 9 ជាប់លើចន្លោះបើក $(0,2)$ ប៉ុន្តែគ្មានតម្លៃអតិបរមា ឬអប្បបរមាទេ។ [សំណុំរូបភាពនៃ g គឺ $(1,\infty)$ ។ អនុគមន៍នេះអាចយកតម្លៃធំ បាន។] វាមិនប្រឆាំងនឹងទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) ទេ ព្រោះចន្លោះ $(0,2)$ មិនមែនជាចន្លោះបិទ ។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (The Extreme Value Theorem) និយាយថា អនុគមន៍មួយជាប់លើចន្លោះបិទមួយ មានតម្លៃអតិបរមាមួយ និងតម្លៃអប្បបរមាមួយ ប៉ុន្តែវាមិនបានប្រាប់យើងពីរបៀបនៃការរកតម្លៃបរមាទេ។ដូច្នេះ យើងចាប់ផ្តើមដោយស្វែងរកតម្លៃបរមាធៀប។

រូបទី 10 បង្ហាញថាក្រាបនៃអនុគមន៍ f មួយដែលមានអតិបរមាធៀបត្រង់ c និងអប្បបរមាត្រង់ d ។ វាបង្ហាញឱ្យឃើញថា នៅត្រង់ចំណុចអតិបរមា និងអប្បបរមា បន្ទាត់ប៉ះគឺជាបន្ទាត់ដេក ដូច្នេះហើយវាមានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 0 ។ យើងដឹង



រូបទី 10

ថាដេរីវេគឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ ដូច្នេះវាបង្ហាញឱ្យឃើញថា $f'(c)=0$ និង $f'(d)=0$ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនិយាយថា វាពិតជានិច្ចសម្រាប់អនុគមន៍ដែលមានដេរីវេ។

ទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ាត (Fermat's Theorem) បើ f មានអតិបរមាធៀប ឬអប្បបរមាធៀបត្រង់ c ហើយបើ $f'(c)$ អាចកំណត់តម្លៃបាន នោះ $f'(c)=0$ ។

ស្រាយបញ្ជាក់: សន្មតថា ចំពោះប្រយោជន៍នៃភាពច្បាស់លាស់ ដែល f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ c ។ នោះ តាមនិយមន័យទី 2 $f(c)\ge f(x)$ បើ x ខិតជិត ។ នេះបញ្ជាក់ថាបើ h ខិតជិត 0 ដែល h វិជ្ជមាន ឬអវិជ្ជមាន នោះ $f(c)\ge f(c+h)$

ដូច្នេះហើយ

$$f(c+h)-f(c)\le 0$$

យើងអាចចែកអង្គទាំងសងខាងនៃវិសមីការដោយចំនួនវិជ្ជមានមួយ។ ដូច្នេះ បើ $h>0$ ហើយ h តូចល្មម យើងបាន $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\le 0$

បំពាក់លីមីតខាងស្តាំដៃនៃអង្គទាំងសងខាងនៃវិសមីការ (ប្រើទ្រឹស្តីបទ 2.3.2) យើងបាន

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\le \lim_{h\to 0^+}0=0$$

ប៉ុន្តែដោយសារតែ $f'(c)$ អាចកំណត់តម្លៃបាន នោះយើងបាន

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

ដូច្នេះហើយយើងបានបង្ហាញថា $f'(c)\le 0$ ។

បើ $h<0$ នោះទិសដៅនៃវិសមីការ ខាងលើ ត្រូវបានចម្រាសនៅពេលយើងចែកវាដោយ h :

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0 \qquad h<0$$

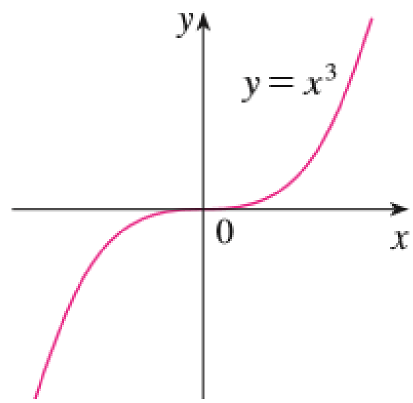
ដូច្នេះ ដោយយកលីមីតនៅខាងឆ្វេងដៃ យើងបាន

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\ge 0$$

យើងបានបង្ហាញថា $f'(c)\ge 0$ ហើយក៏បង្ហាញថា $f'(c)\le 0$ ។ ដោយសារតែវិសមីការទាំងពីរនេះត្រូវតែពិត នោះភាពដែលអាចកើតឡើងបានតែមួយគត់នោះគឺ $f'(c)=0$ ។

យើងបានស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទហ្វូម៉ាតសម្រាប់ករណីនៃអតិបរមាធៀបមួយ។ ករណីនៃអប្បបរមាធៀបមួយអាចត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់តាមវិធីស្រដៀងគ្នាមួយ ឬយើងអាចប្រើលំហាត់ទី 76 ដើម្បីទាញបញ្ជាក់វាពីករណីដែលយើងទើបតែបានស្រាយបញ្ជាក់ (មើលលំហាត់ទី 77) ។

ឧទាហរណ៍ខាងក្រោមដាស់តឿនយើងកុំឱ្យអានទ្រឹស្តីបទហ្វឺម៉ាតច្រើនពេកៈ យើងមិនអាចរំពឹងថាការកំណត់តម្លៃបរមាដោយកំណត់ឱ្យ $f'(x)=0$ ហើយដោះស្រាយរក x មានភាពងាយស្រួលនោះទេ។



រូបទី 11

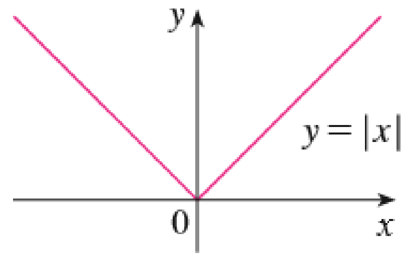
ឧទាហរណ៍ទី 5 : បើ $f(x)=x^3$ នោះ $f'(x)=3x^2$

ដូច្នេះ $f'(0)=0$ ។ ប៉ុន្តែ f គ្មានអតិបរមា ឬអប្បបរមាត្រង់ 0 ទេ ដូចដែលអ្នកបានឃើញពីក្រាបរបស់វាក្នុងរូបទី 11 ។ (ឬសំគាល់ថា $x^3>0 \ \forall \ x>0$ ប៉ុន្តែ $x^3<0 \ \forall \ x<0$) ។ ការពិត

ទៅ $f'(0)=0$ មានន័យសាមញ្ញថាខ្សែកោង $y=x^3$ មាន

បន្ទាត់ប៉ះដេកមួយត្រង់ $(0,0)$ ។ ជំនួសឱ្យការមានអតិបរមាឬអប្បបរមាត្រង់ $(0,0)$ ខ្សែកោងកាត់បន្ទាត់ប៉ះរបស់វាត្រង់ចំណុចនោះ។

ឧទាហរណ៍ទី 6 : អនុគមន៍ $f(x)=|x|$ មានតម្លៃអប្បបរមាធៀប និងដាច់ខាតត្រង់ 0 ប៉ុន្តែតម្លៃនោះមិនអាចរកឃើញដោយប្រើ $f'(x)=0$ បានទេ ព្រោះដូចដែលបានបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍ទី 5 ក្នុងផ្នែកទី 2.8 ។ $f'(0)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបានទេ។ (មើលរូបទី 12)



រូបទី 12

* ប្រយ័ត្នៈ ឧទាហរណ៍ទី 5 និង 6 បង្ហាញថាយើងត្រូវមានការប្រុងប្រយ័ត្ននៅពេលប្រើទ្រឹស្តីបទហ្វូម៉ាត (Fermat's Theorem) ។ ឧទាហរណ៍ទី 5 បំភ្លឺថាទោះជាពេល $f'(0)=0$ ក៏វាមិនត្រូវការឱ្យមានអតិបរមា ឬអប្បបរមាត្រង់ c ដែរ។ លើសពីនេះទៅទៀត វាប្រហែលជាមានតម្លៃបរមា ទោះជាពេល $f'(c)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបានក៏ដោយ (ដូចឧទាហរណ៍ទី 6) ។

ទ្រឹស្តីបទហ្វូម៉ាត (Fermat's Theorem) ណែនាំថា យ៉ាងហោចណាស់យើងគួរតែចាប់ផ្តើមរកតម្លៃបរមានៃ f ត្រង់ចំនួន c ពេល $f'(c)=0$ ឬ $f'(c)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបាន។ ចំនួនបែបនេះត្រូវបានគេដាក់ឈ្មោះពិសេសឱ្យ។

និយមន័យៈ ចំណុចពិសេស (critical number) មួយនៃអនុគមន៍ f គឺជាចំនួន c មួយក្នុងដែនកំណត់នៃ f ដែល $f'(c)=0$ ឬ $f'(c)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបាន។

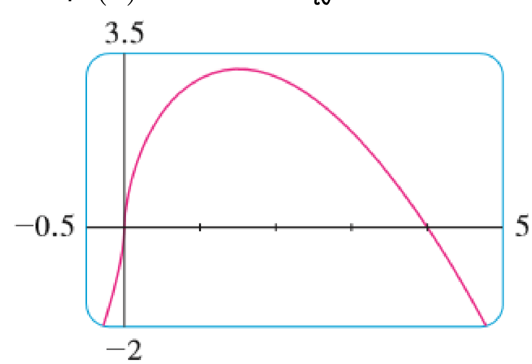
ឧទាហរណ៍ទី 7 : រកចំណុចពិសេសនៃ $f(x)=x^{\frac{3}{5}}(4-x)$

ចម្លើយៈ

$$f'(x)=x^{\frac{3}{5}}(-1)+(4-x)\left(\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)=-x^{\frac{3}{5}}+\frac{3(4-x)}{5x^{\frac{2}{5}}}=\frac{-5x+3(4-x)}{5x^{\frac{2}{5}}}=\frac{12-8x}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

(បើយើងសរសេរ $f(x)=4x^{\frac{3}{5}}-x^{\frac{8}{5}}$ នោះយើងនឹងអាចទទួលបានលទ្ធផលដូចគ្នា)

ដូច្នេះ $f'(x)=0$ បើ $12-8x=0$ នោះ $x=\frac{3}{2}$ ហើយ $f'(x)$ មិនអាចរកតម្លៃបានទេពេល $x=0$ ។ ដូចនេះ ចំណុចពិសេស គឺ $\frac{3}{2}$ និង 0 ។



រូបទី 13 បង្ហាញពីក្រាបរបស់អនុគមន៍ f ក្នុងឧទា

ហរណ៍ទី 7។ វាត្រឹមត្រូវតាមចម្លើយរបស់យើងព្រោះ

វាមានបន្ទាត់ប៉ះដេកមួយត្រង់ $x=1.5$ និងបន្ទាត់ប៉ះ

ឈរមួយត្រង់ $x=0$ ។ រូបទី 13

ក្នុងលក្ខខណ្ឌនៃ ចំនួនពិសេស ទ្រឹស្តីបទហ្វូម៉ាតអាចត្រូវបានបកស្រាយឡើងវិញដូចខាងក្រោម (និយមន័យខាងលើ និងទ្រឹស្តីបទទី 4) :

បើ f មានអតិបរមាធៀប ឬអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ c នោះ c ជាចំណុចពិសេសមួយនៃ f ។

ដើម្បីរកអតិបរមាដាច់ខាត ឬអប្បបរមាដាច់ខាតមួយនៃអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ចន្លោះបិទ យើងចំណាំថាវាជាធៀប [ក្នុងករណីវាកើតឡើងត្រង់ចំណុចពិសេស មួយតាមនិយមន័យខាងលើ]ឬវាកើតឡើងត្រង់ ចន្លោះនោះ។ ដូចនេះ នីតិវិធីបីជំហានខាងក្រោមមានប្រសិទ្ធភាពជានិច្ច។

វិធីសាស្ត្រដោយប្រើចន្លោះបិទ (The closed Interval Method) : ដើម្បីរកតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ យើងត្រូវៈ

1.រកតម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចពិសេស នៃ f ក្នុង (a,b)

2.រកតម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចចុងនៃចន្លោះនោះ

3.តម្លៃធំជាងគេដែលរកបានពីជំហានទី 1 និងទី 2 គឺជាតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត ហើយតម្លៃដែលតូចជាងគេគឺជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត។

ឧទាហរណ៍ទី8:រកតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតនិងតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃអនុគមន៍

$$f\left(x\right)=x^3-3x^2+1 \qquad -\frac{1}{2}\le x\le 4$$

ចម្លើយៈ ដោយសារតែ f ជាប់លើ $\left[-\frac{1}{2},4\right]$ យើងអាចប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រដោយប្រើចន្លោះបិទ (The closed Interval Method) :

$$f(x)=x^3-3x^2+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

ដោយសារតែ $f'(x)$ មានន័យ $\forall x$ នោះចំណុចពិសេសនៃ f កើតឡើងពេល $f'(x)=0$

នាំឱ្យ $x=0$ ឬ $x=2$

ចំណាំថា មួយក្នុងចំណោមចំណុចពិសេសទាំងនោះ ស្ថិតនៅលើចន្លោះ $\left(-\frac{1}{2},4\right)$

តម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចពិសេសទាំងនេះគឺ

$f(0)=1$ $\quad$ $f(2)=-3$

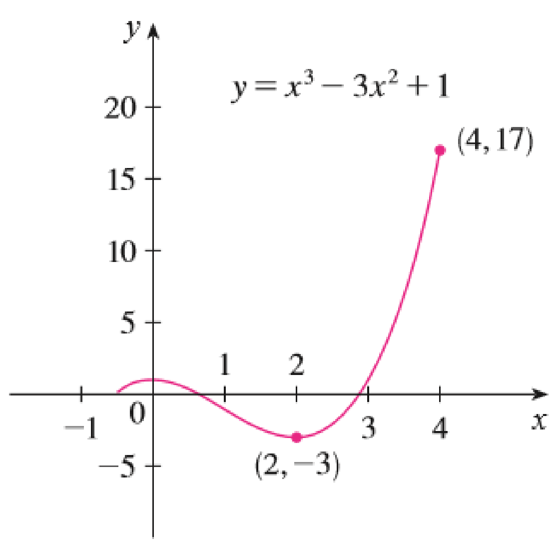
តម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចចុងនៃចន្លោះនោះគឺ

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ $\quad$ $f(4)=17$

បើប្រៀបធៀបចំនួនទាំងបួននេះ យើងឃើញថាតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតគឺ $f(4)=17$ ហើយតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតគឺ $f(2)=-3$

ចំណាំថា ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ អតិបរមាដាច់ខាតកើតឡើងនៅត្រង់ចំណុចចុង ចំណែកឯអប្បបរមាដាច់ខាត កើតឡើងនៅត្រង់ចំណុចពិសេស។ ក្រាបនៃ f ត្រូវបានគូសក្នុងរូបទី 14 ។

បើអ្នកមានឧបករណ៍សម្រាប់គូសក្រាប ឬកុំព្យូទ័រដែលមានកម្មវិធីសម្រាប់គូសក្រាប វាពិត



រូបទី 14

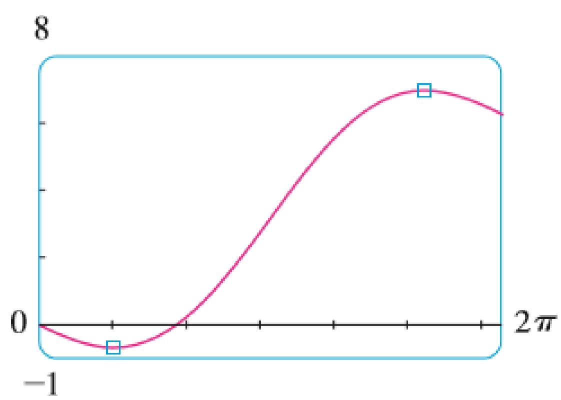
អាចប៉ាន់ស្មានតម្លៃអតិបរមាធៀប និងតម្លៃអប្បបរមាធៀបបានយ៉ាងងាយស្រួល។ ប៉ុន្តែ ឧទាហរណ៍បន្ទាប់ បង្ហាញថា យើងត្រូវការការគណនាដើម្បីរកតម្លៃប្រាកដ។

ឧទាហរណ៍ទី 9 :

(a) ប្រើឧបករណ៍សង់ក្រាបដើម្បីប៉ាន់ស្មានរកតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត និងតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត នៃអនុគមន៍ $f(x)=x-2\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$

(b) ប្រើការគណនា ដើម្បីរកតម្លៃប្រាកដនៃតម្លៃអប្បបរមា និងតម្លៃអតិបរមា

ចម្លើយ:



រូបទី 15

(a) រូបទី 15 បង្ហាញពីក្រាបនៃ f ក្នុងរូបភាពជាចតុកោណកែង $[0,2\pi]$ និង $[-1,8]$។ ដោយប្តូរទីតាំងទ្រនិចប្តូរទីតាំងនៅលើកុំព្យូទ័រ ឱ្យជិតចំណុចអតិបរមាយើងឃើញថាកូអរដោនេ y មិនប្រែប្រួលច្រើនទេនៅតំបន់ជុំវិញអតិបរមា។ តម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតគឺប្រហែល 6.97 ហើយវាកើតឡើងនៅពេល $x\approx 5.2$ ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ដោយប្តូរទីតាំងទ្រនិចប្តូរទីតាំងនៅលើកុំព្យូទ័រ ឱ្យជិតចំណុចអប្បបរមា យើងឃើញថា តម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតគឺប្រហែល -0.68 ហើយវាកើតឡើងនៅពេល $x\approx 1.0$ ។ វាជារឿងដែលអាចកើតឡើងបានក្នុងការទទួលបានការប៉ាន់ប្រមាណដោយត្រឹមត្រូវជាងនេះ ដោយពង្រីកឱ្យធំចំចំណុចអតិបរមា និងអប្បបរមា ប៉ុន្តែជំនួសឱ្យការធ្វើបែបនេះ យើងមកធ្វើការគណនាវិញ។

(b) អនុគមន៍ $f(x)=x-2\sin x$ ជាអនុគមន៍ជាប់លើ $[0,2\pi]$ ។ ដោយសារតែ $f'(x)=1-2\cos x$ យើងមាន $f'(x)=0$ ពេល $\cos x=\frac{1}{2}$ ហើយវាកើតឡើងនៅពេល $x=\frac{\pi}{3}$ ឬ $\frac{5\pi}{3}$ ។ តម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចពិសេសនេះគឺ

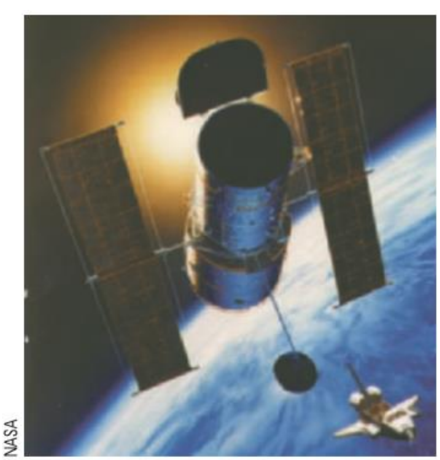
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\approx -0.684853$$

និង $$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{3}-2\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 6.968039$$

តម្លៃនៃ f ត្រង់ចំណុចចុងគឺ

$f(0)=0$ និង $f(2\pi)=2\pi\approx 6.28$

បើប្រៀបធៀបចំនួនទាំងបួននេះ និងប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រដោយប្រើចន្លោះបិទ (The closed Interval Method) យើងឃើញថាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតគឺ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ ហើយតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាតគឺ $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$ ។ តម្លៃដែលបានរកពីផ្នែក (a) អាចយកមកប្រើការជាការពិនិត្យលើការងាររបស់យើង។



ឧទាហរណ៍ទី 10 : កែវយឺតអវកាស Hubble ត្រូវបានលាតត្រដាងនៅថ្ងៃទី 24 ខែ មេសា ឆ្នាំ 1990

ដោយរបេកគំហើញយានអវកាស។ គម្រូល្បឿន

នៃយានក្នុងកំឡុងពេលធ្វើបេសកកម្ម ពីការលើក

ចេញនៅរយៈពេល $t=0$ រហូតដល់កាំជ្រួចរឹងរបស់

យានត្រូវបានបញ្ចេញចោលនៅរយៈពេល $t=126$

វិនាទី ត្រូវបានផ្តល់ឱ្យដោយអនុគមន៍

$v(t)=0.001302t^3-0.09029t^2+23.61t-3.083$ (គិតជាហ្វីតក្នុងមួយវិនាទី)។ ប្រើអនុគមន៍នេះ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត និងតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាតនៃសំទុះរបស់យាន រវាងការលើកចេញ និងបញ្ចេញចោលនូវកាំជ្រួចរបស់យាន។

ចម្លើយៈ គេមិនបានសួររកតម្លៃបរមាដោយប្រើអនុគមន៍ល្បឿនដែលគេឱ្យនោះទេ ប៉ុន្តែដោយប្រើអនុគមន៍សំទុះ។ ដូច្នេះ ដំបូងយើងត្រូវធ្វើដេរីវេដើម្បីរកសំទុះបានៈ

$$\begin{aligned}a(t)=v'(t)&=\frac{d}{dt}\left(0.001302t^3-0.09029t^2+23.61t-3.083\right)\\&=0.003906t^2-0.18058t+23.61\end{aligned}$$

ឥឡូវយើងដេរីវេអនុគមន៍ a ដែលជាប់លើចន្លោះ $0\le t\le 126$ ដោយប្រើប្រាស់វិធីសាស្ត្រដោយប្រើចន្លោះបិទ នោះយើងបាន $a'(t)=0.007812t-0.18058$

ចំណុចពិសេសតែមួយគត់ដែលអាចកើតឡើងនៅពេល $a'(t)=0$:

$$t_1=\frac{0.18058}{0.007812}\approx 23.12$$

ប៉ាន់ស្មាន $a(t)$ ត្រង់ចំណុចពិសេស និងត្រង់ចំណុចចុង

យើងបាន $a(0)=23.61 \qquad a(t_1)\approx 21.52 \qquad a(126)\approx 62.87$

ដូចនេះសំទុះអតិបរមាគឺប្រហែល $62.87\ ft/s^2$ និងសំទុះអប្បបរមាគឺប្រហែល $21.52\ ft/s^2$ ។

២.២.ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (The Mean Value Theorem)

យើងនឹងឃើញថាលទ្ធផលជាច្រើននៃជំពូកនេះគឺអាស្រ័យលើការពិតដែលសំខាន់តែមួយគត់ ដែលត្រូវបានគេហៅថាទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល (the Mean Value Theorem) ។ ប៉ុន្តែដើម្បីទៅដល់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល យើងត្រូវការលទ្ធផលខាងក្រោមជាមុនសិន។

ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle's Theorem) : គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមសម្មតិកម្មបីដូចខាងក្រោម:

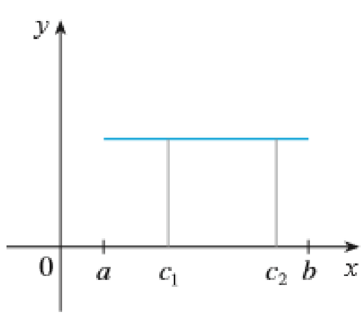
1. f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។

2. f មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) ។

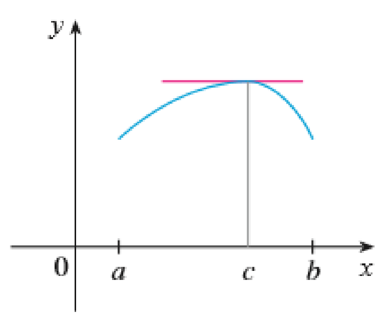
3. $f(a)=f(b)$

នោះមានចំនួន c មួយក្នុង (a,b) ដែល $f'(c)=0$ ។

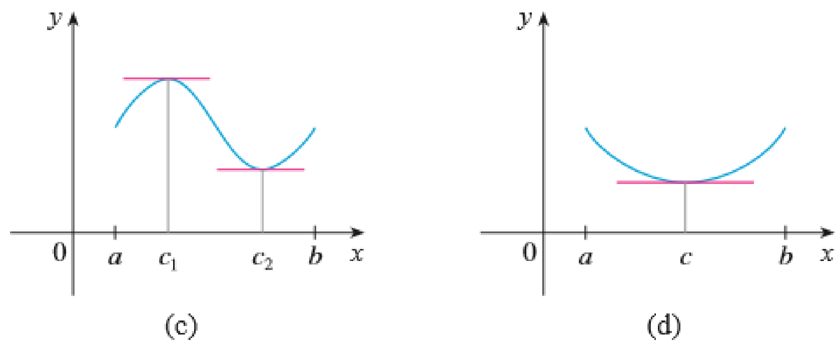
មុនចូលដល់ការស្រាយបញ្ជាក់ យើងក្រឡេកទៅមើលក្រាបនៃអនុគមន៍ប្រភេទមួយចំនួនដែលត្រឹមត្រូវទៅថាមសម្មតិកម្មទាំងបី។ រូបទី 1 បង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍បួន។ ក្នុងករណីនីមួយៗ វាបង្ហាញឱ្យឃើញថាមានចំណុចមួយយ៉ាងតិច $(c,f(c))$ នៅលើក្រាបដែលមានបន្ទាត់ប៉ះដេក ដូច្នេះហើយ $f'(c)=0$ ។ ដូច្នេះហើយ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូលអាចជឿទុកចិត្តបាន។



(a)



(b)



រូបទី 1

ស្រាយបញ្ជាក់: មានបីករណីគឺ:

ករណីទី 1 : $f(x)=k$ ជាចំនួនថេរ

នោះ $f'(x)=0$ ដូច្នេះចំនួន c អាចត្រូវបានយកធ្វើជាចំនួនណាមួយក្នុង (a,b) ។

ករណីទី 2 : $f(x)>f(a)$ ចំពោះ x មួយចំនួននៅក្នុង (a,b) [ដូចក្នុងរូបទី 1(b) ឬ (c)]

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (the Extreme Value Theorem) (ដែលយើងអាចប្រើតាមសម្មតិកម្មទី 1) នោះ f មានតម្លៃអតិបរមាមួយត្រង់កន្លែងណាមួយកក្នុង $[a,b]$ ។ ដោយសារតែ $f(a)=f(b)$ វាត្រូវតែទទួលបានតម្លៃអតិបរមានេះត្រង់ចំនួន c ក្នុងចន្លោះបើក (a,b) ។ បន្ទាប់មក f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ c ហើយតាមសម្មតិកម្មទី 2 f មានដេរីវេត្រង់ c ។ ដូច្នេះ $f'(c)=0$ តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ាត (the Fermat's Theorem) ។

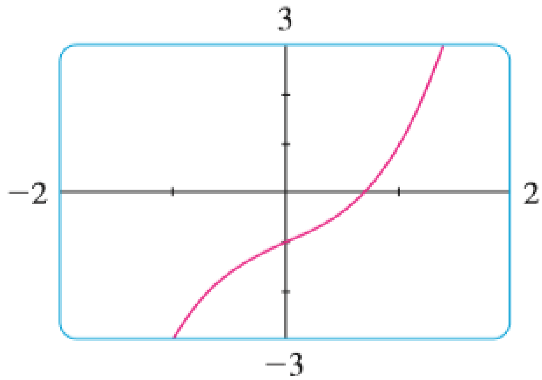
ករណីទី 3 : $f(x)<f(a)$ ចំពោះ x មួយចំនួននៅក្នុង (a,b) [ដូចក្នុងរូបទី 1(c) ឬ (d)]

តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃបរមា (the Extreme Value Theorem) f មានតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយក្នុង $[a,b]$ ហើយដោយសារតែ $f(a)=f(b)$ វាទទួលបានតម្លៃអប្បបរមានេះត្រង់ចំនួន c ក្នុង (a,b) ។ ជាថ្មីម្តងទៀត $f'(c)=0$ តាមទ្រឹស្តីបទហ្វែម៉ាត (the Fermat's Theorem) ។

ឧទាហរណ៍ទី 1 : យើងអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទរ៉ូលទៅអនុគមន៍ទីតាំង $s=f(t)$ នៃវត្ថុមួយដែលផ្លាស់ទី។ បើវត្ថុនោះស្ថិតនៅទីតាំងដដែល ត្រង់ខណៈពេលខុសគ្នាពីរគឺ $t=a$ និង $t=b$ នោះ $f(a)=f(b)$ ។ ទ្រឹស្តីបទរ៉ូលនិយាយថា មានខណៈពេលខ្លះនៃរយៈពេល $t=c$ រវាង a និង b នៅពេល $f'(c)=0$

ល្បឿនរបស់វាស្មើនឹង 0 ។ (ជាពិសេស អ្នកអាចឃើញថាវាជាការពិតជាក់ស្តែង នៅពេលបាល់មួយត្រូវបានបោះឡើងទៅលើដោយផ្ទាល់។)

ឧទាហរណ៍ទី 2 : ស្រាយបញ្ជាក់ថាសមីការ $x^3+x-1=0$ មានឫសមួយជាចំនួនពិត។



រូបទី 2

ចម្លើយ: ដំបូងយើងប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem) (2.5.10) ដើម្បីបង្ហាញថាវាមានឫស។ តាង $f(x)=x^3+x-1$ នោះ $f(0)=-1<0$ ហើយ $f(1)=1>0$ ។ ដោយសារតែ f ជាពហុធា នោះវាជាអនុគមន៍ជាប់ ដូច្នេះទ្រឹស្តីបទ តម្លៃកណ្តាល (Intermediate Value Theorem)

បង្ហាញថា មានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ 0 និង 1 ដែល $f(c)=0$ ។ ដូចនេះសមីការដែលគេឱ្យនេះមានឫសមួយ។

ដើម្បីបង្ហាញថាសមីការនេះគ្មានឫសផ្សេងទៀត យើងប្រើទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle's Theorem) ហើយពិភាក្សាពីភាពផ្ទុយគ្នារបស់វា។ សន្មតថាវាមានឫសពីរគឺ a និង b ។ នោះ $f(a)=0=f(b)$ ហើយដោយសារតែ f ជាអនុគមន៍ពហុធា វាមានដេរីវេលើ (a,b) ហើយជាប់លើ $[a,b]$ ។ ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle's Theorem) នាំឱ្យមានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ a និង b

ដែល $f'(c)=0$ ។ ប៉ុន្តែ $f'(x)=3x^2+1 \ \geq 1 \quad \forall x$ (ដោយសារតែ $x^2 \geq 0$) ដូច្នេះ $f'(x)$ មិនអាចស្មើ 0 បានទេ។ នេះបង្ហាញពីភាពផ្ទុយគ្នា។ ដូច្នេះ សមីការនេះមិនអាចមានឫសពីរជាចំនួនពិតបានទេ។

យើងប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle´s Theorem) ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទសំខាន់ខាងក្រោម ដែលត្រូវបានសរសេរដោយគណិតវិទូជនជាតិបារាំងផ្សេងទៀត គឺលោក Joseph-Louis Lagrange។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (The Mean Value Theorem) គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមសម្មតិកម្មខាងក្រោម:

1. f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ។

2. f មានដេរីវេលើចន្លោះបើក (a,b) ។

នោះមានចំនួន c មួយក្នុង (a,b) ដែល

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ឬសមមូលនឹង

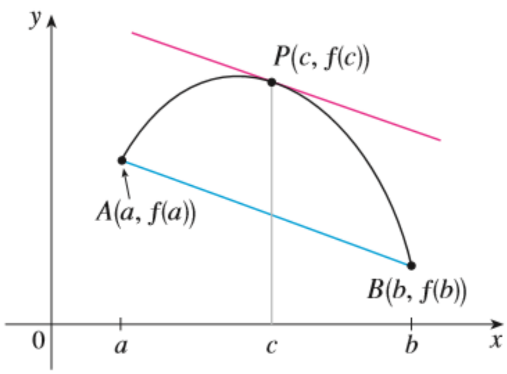
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

មុនពេលស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទនេះ យើងអាចឃើញថាវាពិតជាសមហេតុផល តាមរយៈការបកស្រាយវាតាមរូបធរណីមាត្រ។ រូបទី 3 និង 4 បង្ហាញពីចំណុច $A(a,f(a))$ និង $B(b,f(b))$ នៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ចំនួនពីរដែលអាចដេរីវេបាន។ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់សេកង់ (secant line) AB គឺ

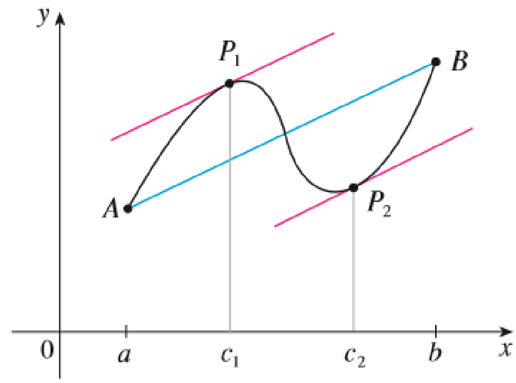
$$m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ដែលជាកន្សោមដែលដូចគ្នាទៅនឹងខាងស្តាំនៃសមីការ 1 ។ ដោយសារតែ $f'(c)$ ជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុច $(c,f(c))$ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) ក្នុងទម្រង់ដែលឱ្យដោយសមីការ 1 និយាយថាយ៉ាងតិចមានចំណុច $P(c,f(c))$ មួយនៅលើក្រាបដែលមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាប់ប៉ះគឺដូចគ្នាទៅនឹងមេគុណនៃបន្ទាត់សេកង់ (secant line) AB ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀត មានចំណុច P មួយដែលបន្ទាប់ប៉ះស្របទៅនឹងបន្ទាត់សេកង់ (secant line) AB ។ (

ស្រមៃថាបន្ទាប់មួយដែលស្របទៅនឹង AB ចាប់ផ្តើមឆ្ងាយទៅៗ ហើយផ្លាស់ទីស្របទៅនឹងខ្លួនវារហូតដល់វាប៉ះនឹងក្រាបជាលើកទីមួយ។)



រូបទី 3

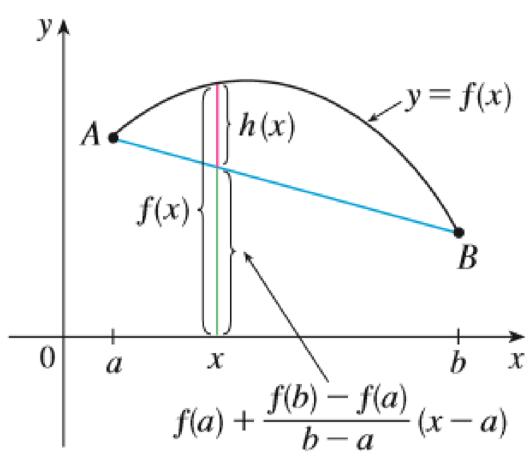


រូបទី 4

ស្រាយបញ្ជាក់: យើងអនុវត្តទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle′s Theorem) ទៅលើអនុគមន៍ h មួយដែលកំណត់ថាជាផលដករវាង f និងអនុគមន៍ដែលក្រាបរបស់វាជាបន្ទាត់សេកង់ (secant line) AB ។ ដោយប្រើសមីការទី 3 យើងឃើញថាសមីការនៃបន្ទាត់ AB អាចសរសេរជា $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ឬសរសេរជា $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

ដូច្នេះ ដូចដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី 5

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



រូបទី 5

ជាដំបូង យើងត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ថា h ត្រឹមត្រូវទៅតាមសម្មតិកម្មនៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូល។

1.អនុគមន៍ h ជាប់លើ $[a,b]$ ពីព្រោះវាជាផលបូកនៃ f និងអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទីមួយ ហើយអនុគមន៍ទាំងពីរនេះសុទ្ធតែជាអនុគមន៍ជាប់។

2.អនុគមន៍ h មានដេរីវេលើ (a,b) ពីព្រោះទាំង f ហើយអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទីមួយសុទ្ធតែអាចដេរីវេបាន។ តាមការពិត យើងអាចគណនា h' ដោយផ្ទាល់ពីសមីការទី 4 : $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (ចំណាំថា $f(a)$ និង $\left[f(b)-f(a)\right]/(b-a)$ ជាចំនួនថេរ។)

3. $h(a)=f(a)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$

$$h(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(b)-f(a)-\left[f(b)-f(a)\right]=0$$

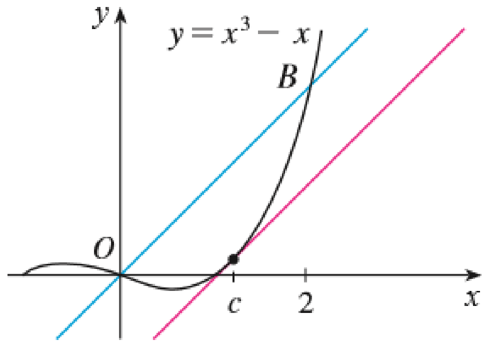
ដូច្នេះ $h(a)=h(b)$ ។

ដោយសារតែ h ត្រឹមត្រូវទៅតាមសម្មតិកម្មនៃទ្រឹស្តីបទរ៉ូល (Rolle′s Theorem) ទ្រឹស្តីបទនោះនិយាយថាមានចំនួន c មួយនៅក្នុង (a,b) ដែល $h'(c)=0$ ។ ដូចនេះ $0=h'(c)=f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ដូច្នេះហើយ $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ឧទាហរណ៍ទី 3 : ដើម្បីបង្ហាញទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Mean Value Theorem) ជាមួយអនុគមន៍ពិសេសមួយ យើងពិនិត្យមើលទៅលើ $f(x)=x^3-x,\ a=0,\ b=2$ ។ ដោយសារតែ f ជាអនុគមន៍ពហុធា នោះវាជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយមានដេរីវេគ្រប់តម្លៃ x ដូច្នេះវាប្រាកដជាជាប់លើ $[0,2]$ ហើយមានដេរីវេលើ $(0,2)$ ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (Mean Value Theorem) នាំឱ្យមានចំនួន c មួយក្នុង $(0,2)$ ដែល $f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)$

ហើយ $f(2)=6, f(0)=0$ និង $f'(x)=3x^2-1$ ដូច្នេះសមីការទៅជា $6=\left(3c^2-1\right)2=6c^2-2$

នាំឱ្យ $c^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow c=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ។ ប៉ុន្តែ c ត្រូវស្ថិតនៅលើ $(0,2)$ ដូច្នេះ $c=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ។ រូបទី 6 បង្ហាញពីការគណនានេះ : បន្ទាត់ប៉ះត្រង់តម្លៃ c នេះ ស្របទៅនឹងបន្ទាត់សេកង់ (secant line) OB ។



រូបទី 6

ឧទាហរណ៍ទី 4 : បើវត្ថុមួយផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ត្រង់មួយជាមួយអនុគមន៍ទីតាំង $s = f(t)$ នោះល្បឿនមធ្យមរវាង $t = a$ និង $t = b$ គឺ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ហើយល្បឿនត្រង់ $t = c$ គឺ $f'(c)$ ។ ដូចនេះ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) (ក្នុងទម្រង់សមីការទី 1) បង្ហាញថា នៅខណៈពេល $t = c$ នៅចន្លោះ a និង b នោះល្បឿនខណៈ $f'(c)$ ស្មើនឹងល្បឿនមធ្យម។ ឧទាហរណ៍ៈ បើឡានមួយធ្វើដំណើរបានចម្ងាយ 180 km ក្នុងរយៈពេល 2 ម៉ោង។ នោះទ្រនិចកុងទ័រល្បឿនត្រូវតែបានចង្អុលត្រង់ល្បឿន 90km/h យ៉ាងតិចម្តង។

ជាទូទៅ ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) អាចត្រូវបានបកស្រាយដោយនិយាយថា មានចំនួនមួយដែលអត្រាបម្រែបម្រួលខណៈ ស្មើគ្នាទៅនឹងអត្រាបម្រែបម្រួលមធ្យម នៅលើចន្លោះមួយ។

សារៈសំខាន់នៃទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (The Mean Value Theorem) គឺ វាអាចធ្វើឱ្យយើងទទួលបានព័ត៌មាននៃអនុគមន៍មួយ ពីព័ត៌មាននៃដេរីវេរបស់វា។ ឧទាហរណ៍បន្ទាប់ ផ្តល់អំណះអំណាងដល់គោលការណ៍នេះ។

ឧទាហរណ៍ទី 5 : សន្មតថា $f(0) = -3$ ហើយ $f'(x) \le 5$ គ្រប់តម្លៃ x ។ តើ $f(2)$ អាចមានតម្លៃធំប៉ុណ្ណា ?

ចម្លើយៈ គេឱ្យ f មានដេរីវេ (នោះវាជាអនុគមន៍ជាប់) ជានិច្ច។ ជាពិសេស យើងអាចប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) លើចន្លោះ $[0,2]$ ។ វាមានចំនួន c មួយដែល $f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$ ដូច្នេះ $f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$

យើងមាន $f'(x)\le 5\ \ \forall x$ នោះយើងបាន $f'(c)\le 5$ ។ គុណអង្គទាំងសងខាងនៃវិសមីការនេះនឹង 2 យើងបាន $2f'(c)\le 10$ ដូច្នេះ $f(2)=-3+2f'(c)\le -3+10=7$

តម្លៃធំបំផុតដែល $f(2)$ អាចមានគឺ 7 ។

ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) អាចត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្កើតនូវការពិតជាមូលដ្ឋានមួយចំនួននៃការគណនាឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ ការពិតជាមូលដ្ឋានមួយគឺនៅទ្រឹស្តីបទខាងក្រោម។ ហើយការពិតផ្សេងទៀត នឹងត្រូវបានរកឃើញក្នុងផ្នែកផ្សេងៗខាងក្រោម។

ទ្រឹស្តីបទ: បើ $f'(x)=0$ គ្រប់តម្លៃ x លើចន្លោះ (a,b) នោះ f ជាអនុគមន៍ថេរលើ (a,b) ។

ស្រាយបញ្ជាក់: គេឱ្យ x_1 និង x_2 ជាចំនួនពីរណាក៏ដោយនៅក្នុង (a,b) ដែល $x_1<x_2$ ។ ដោយសារតែ f មានដេរីវេលើ (a,b) នោះវាត្រូវតែមានដេរីវេលើ (x_1,x_2) និងជាប់លើ $[x_1,x_2]$ ។ ដោយអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) ទៅលើ f លើចន្លោះ $[x_1,x_2]$ យើងទទួលបានចំនួន c មួយដែល $x_1<c<x_2$ ហើយ

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

ដោយសារតែ $f'(x)=0\ \forall x$ យើងបាន $f'(c)=0$ ដូច្នេះហើយសមីការទី 6 ទៅជា $f(x_2)-f(x_1)=0$ ឬ $f(x_2)=f(x_1)$

ដូច្នេះ f មានតម្លៃដូចគ្នាត្រង់ចំនួនពីរណាក៏ដោយ x_1 និង x_2 ក្នុង (a,b) ។ នេះមានន័យថា f ជាអនុគមន៍ថេរលើ (a,b) ។

កូរ៉ូលែ : បើ $f'(x)=g'(x)$ គ្រប់តម្លៃ x លើចន្លោះ (a,b) នោះ $f-g$ ជាអនុគមន៍ថេរលើ (a,b) មានន័យថា $f(x)=g(x)+c$ ដែល c ជាចំនួនថេរ។

ស្រាយបញ្ជាក់: គេឱ្យ $F(x)=f(x)-g(x)$ ។ នោះ $F'(x)=f'(x)-g'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ ។ ដូចនេះ តាមទ្រឹស្តីបទទី 5 F ជាអនុគមន៍ថេរ មានន័យថា $f-g$ ជាអនុគមន៍ថេរ។

សម្គាល់: យើងត្រូវតែយកចិត្តទុកដាក់ក្នុងការប្រើទ្រឹស្តីបទទី 5 ។ គេឱ្យ

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & if\ \ x>0\\ -1 & if\ \ x<0\end{cases}$$

ដែនកំណត់នៃ f គឺ $D=\{x \mid x\neq 0\}$ ហើយ $f'(x)=0\ \forall x\in D$ ។ ប៉ុន្តែតាមជាក់ស្តែង f មិនមែនជាអនុគមន៍ថេរទេ។ នេះមិនមែនផ្ទុយពីទ្រឹស្តីបទទី 5 ទេពីព្រោះ D មិនមែនជាចន្លោះ ។ ចំណាំថា f ជាអនុគមន៍ថេរលើចន្លោះ $(0,\infty)$ ហើយក៏ថេរលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ ។

ឧទាហរណ៍ទី 6 : ស្រាយបញ្ជាក់រូបមន្ត $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

ចម្លើយ: ទោះជាការស្រាយបញ្ជាក់នេះមិនត្រូវការការគណនាក៏ដោយ ក៏ការស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើការគណនាជារឿងដែលសាមញ្ញ។ បើ $f(x)=\tan^{-1}x+\cot^{-1}x$ នោះ $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$ គ្រប់តម្លៃ x ។ ដូច្នេះ $f(x)=C$ ជាអនុគមន៍ថេរ។ ដើម្បីកំណត់តម្លៃ C យើងយក $x=1$ (ព្រោះយើងអាចរកតម្លៃប្រាកដនៃ $f(1)$ បាន) នោះ $C=f(1)=\tan^{-1}1+\cot^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

ដូចនេះ $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

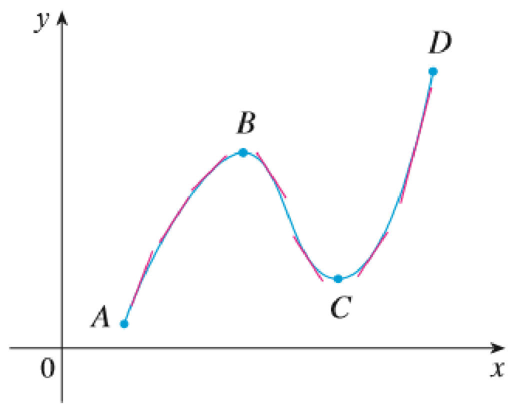
២.៣. របៀបដែលដេរីវេមានឥទ្ធិពលលើរូបរាងនៃក្រាប (How Derivatives Affect the Shapes of a Graph)

ការប្រើប្រាស់ការគណនាជាច្រើន ពឹងផ្អែកលើសមត្ថភាពរបស់យើងក្នុងការទាញបញ្ជាក់ពីការពិតអំពីអនុគមន៍ f មួយពីព័ត៌មានដែលទាក់ទងទៅនឹងដេរីវេរបស់វា។ ដោយសារតែ $f'(x)$ តំណាងឱ្យមេគុណប្រាប់ទិសនៃខ្សែកោង $y=f(x)$ ត្រង់ចំណុច $(x,f(x))$ ទើបវាប្រាប់យើងពីទិសដៅដែលក្នុងនោះខ្សែកោងបន្តត្រង់ចំណុចនីមួយៗ។ ដូច្នេះវាសមហេតុផលក្នុងការរំពឹងថាព័ត៌មានអំពី $f'(x)$ នឹងផ្តល់ឱ្យយើងនូវព័ត៌មានអំពី $f(x)$ ។

តើ f' ថាយ៉ាងណាអំពី f ?

ដើម្បីឱ្យឃើញថាតើដេរីវេនៃ f អាចប្រាប់យើងពីកន្លែងដែលអនុគមន៍មួយកើន ឬចុះដោយរបៀបណានោះ ចូរមើលរូបទី 1 ។ (អនុគមន៍កើន និងអនុគមន៍ចុះ ត្រូវបានកំណត់ក្នុងផ្នែក 1.1 ។) នៅចន្លោះ A និង B និងចន្លោះ C និង D បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសវិជ្ជមាន ដូច្នេះហើយ $f'(x)>0$ ។ នៅចន្លោះ B និង C បន្ទាត់ប៉ះមានមេគុណប្រាប់ទិសអវិជ្ជមាន ដូច្នេះហើយ $f'(x)<0$ ។ ដូចនេះវាបង្ហាញ

ឱ្យឃើញថា f កើននៅពេល $f'(x)$ វិជ្ជមាន និងចុះនៅពេល $f'(x)$ អវិជ្ជមាន។ ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ថាវាតែងតែមានករណីបែបនេះ យើងប្រើទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem)។



រូបទី 1

Increasing/Decreasing Test

(a) បើ $f'(x)>0$ លើចន្លោះមួយ នោះ f កើនលើចន្លោះនោះ។

(b) បើ $f'(x)<0$ លើចន្លោះមួយ នោះ f ចុះលើចន្លោះនោះ។

ស្រាយបញ្ជាក់:

(a) គេឱ្យ x_1 និង x_2 ជាចំនួនពីរណាក៏ដោយនៅក្នុងចន្លោះដែល $x_1<x_2$ ។ តាមនិយមន័យនៃអនុគមន៍កើន (ទំព័រទី 19) យើងបានបង្ហាញថា $f(x_1)<f(x_2)$ ។

ដោយសារតែគេឱ្យ $f'(x)>0$ យើងដឹងថា f មានដេរីវេលើ $[x_1,x_2]$ ។ ដូច្នេះ តាមទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) នាំឱ្យមានចំនួន c មួយនៅចន្លោះ x_1 និង x_2 ដែល

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$$

ឥឡូវនេះ $f'(c)>0$ ដោយការប៉ាន់ស្មាន ហើយ $x_2-x_1>0$ ពីព្រោះ $x_1<x_2$ ។ ដូចនេះ ខាងស្តាំនៃសមីការទី 1 គឺវិជ្ជមាន ដូច្នេះហើយ $f(x_2)-f(x_1)>0$ ឬ $f(x_1)<f(x_2)$

នេះបង្ហាញថា f កើន។

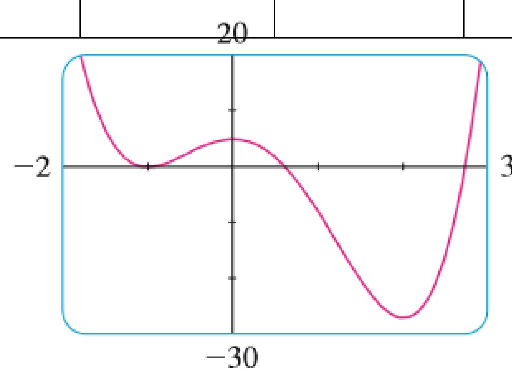
ផ្នែក (b) ត្រូវបានស្រាយបញ្ជាក់ស្រដៀងគ្នាដែរ។

ឧទាហរណ៍ទី 1: រកកន្លែងដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$ កើន និងកន្លែងដែលធ្វើឱ្យអនុគមន៍នេះចុះ។

ចម្លើយ: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x-2)(x+1)$

ក្នុងការប្រើ I/D Test យើងត្រូវតែដឹងថាតើ $f'(x)>0$ នៅកន្លែងណា ហើយ $f'(x)<0$ នៅកន្លែងណា។ វាអាស្រ័យលើសញ្ញានៃអនុគមន៍បីនៃ $f'(x)$ ដែលមាន $12x$, $x-2$ និង $x+1$ ។ យើងបែងចែកបន្ទាត់ចំនួនពិត (real line) ជាចន្លោះៗដែលចំណុចចុងរបស់វាគឺជាចំណុចពិសេស (critical numbers) -1, 0, និង 2 ហើយយើងរៀបចំការងារនេះក្នុងតារាងមួយ។ សញ្ញាបូកបញ្ជាក់ថាការបង្ហាញដែលគេឱ្យនេះ វិជ្ជមាន ហើយសញ្ញាដកបញ្ជាក់ថាវាអវិជ្ជមាន។ ជួរឈរចុងក្រោយនៃតារាងគឺជាសេចក្តីសន្និដ្ឋានផ្អែកលើ I/D Test។ ឧទាហរណ៍: $f'(x)<0$ ចំពោះ $0<x<2$ ដូច្នេះ f ចុះលើ $(0,2)$ ។ (វាក៏អាចត្រឹមត្រូវដែរបើយើងនិយាយថា f ចុះលើចន្លោះបិទ $[0,2]$)

ចន្លោះ	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	ចុះលើ $(-\infty,-1)$
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	កើនលើ $(-1,0)$
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	ចុះលើ $(0,2)$
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	កើនលើ $(2,\infty)$



រូបទី 2

ក្រាបនៃ f បានបង្ហាញក្នុងរូបទី 2 បញ្ជាក់ថាព័ត៌មានក្នុងតារាងនេះពិតជាត្រឹមត្រូវមែន។

ត្រឡប់ទៅមើលផ្នែក 4.1 វិញ បើ f មានអតិបរមាធៀប ឬអប្បបរមាធៀបត្រង់ c នោះ c ត្រូវតែជាចំណុចពិសេស (critical number) នៃ f (ដោយទ្រឹស្តី បទហ្វឺម៉ាត (Fermat's Theorem)) ប៉ុន្តែមិនមែនគ្រប់ចំណុចពិសេសសុទ្ធតែអាចធ្វើឱ្យអនុគមន៍មានអតិបរមាមួយ ឬអប្បបរមាមួយទេ។ ដូច្នេះ យើងត្រូវការតេស្តមួយដែលនឹងប្រាប់យើងថាតើ f មានអតិបរមាធៀបមួយ ឬអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ចំណុចពិសេសឬអត់។

អ្នកអាចមើលឃើញក្នុងរូបទី 2 ថា $f(0)=5$ គឺជាតម្លៃអតិបរមាធៀបនៃ f ព្រោះ f កើនលើ $(-1,0)$ ហើយចុះលើ $(0,2)$ ។ ឬ បើតាមដេរីវេ $f'(x)>0$ ចំពោះ $-1<x<0$ ហើយ $f'(x)<0$ ចំពោះ $0<x<2$ ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀត សញ្ញានៃ $f'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ 0 ។ ការសង្កេតនេះគឺជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃតេស្តខាងក្រោម។

តេស្តដេរីវេទី 1 (The First Derivative Test) : សន្មតថា c ជាចំណុចពិសេសមួយ (critical number)នៃអនុគមន៍ f មួយដែលជាអនុគមន៍ជាប់។

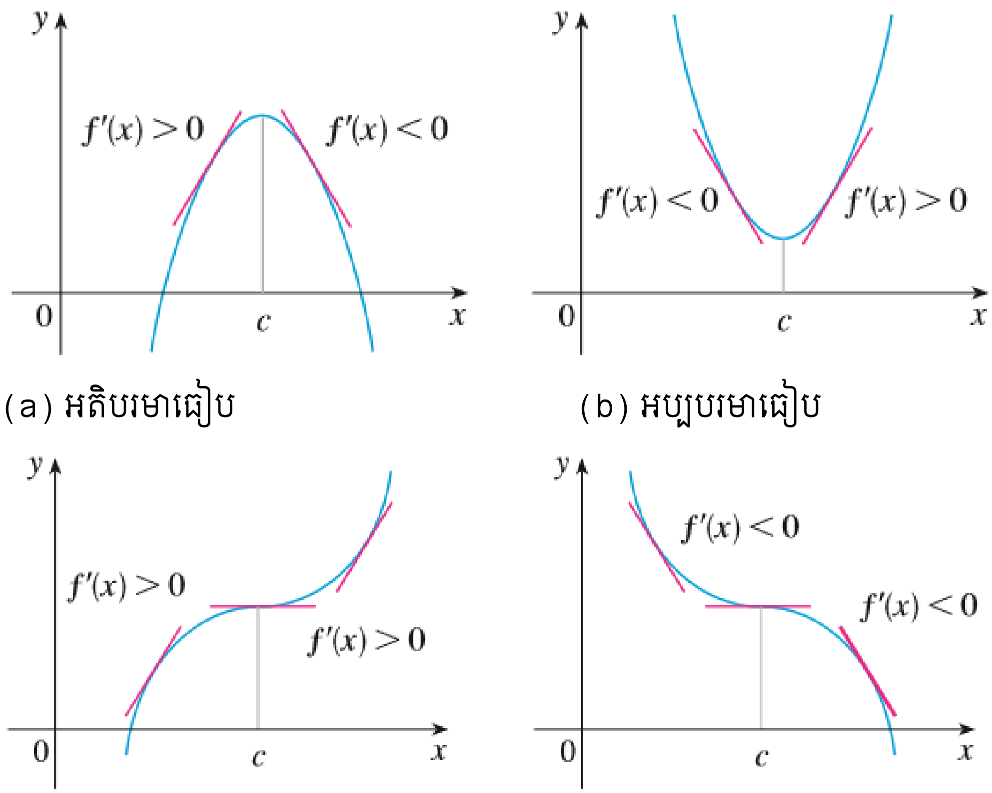
(a) បើ f' ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ c នោះ f មានអតិបរមាធៀបមួយត្រង់ c ។

(b) បើ f' ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ c នោះ f មានអប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ c ។

(c) បើ f' មិនប្តូរសញ្ញាត្រង់ c (ឧទាហរណ៍ៈ បើ f' វិជ្ជមានទាំងសងខាងនៃចំនួន c ឬអវិជ្ជមានទាំងសងខាង) នោះ f គ្មានអតិបរមាធៀប ឬអប្បបរមាធៀបត្រង់ c ទេ។

តេស្តដេរីវេទី 1 (The First Derivative Test) គឺជាវិបាកនៃ I/D Test ។ ក្នុងផ្នែក (a) ឧទាហរណ៍ថា ដោយសារតែសញ្ញានៃ $f'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ c នោះ f កើនទៅខាងឆ្វេង c ហើយចុះទៅខាងស្តាំ c។ វាបង្ហាញថា f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c ។

វាមានភាពងាយស្រួលក្នុងការចងចាំតេស្តដេរីវេទី 1 (The First Derivative Test) នេះ ដោយបង្ហាញឱ្យឃើញពីដ្យាក្រាមដែលបង្ហាញក្នុងរូបទី 3 ។



(a) អតិបរមាធៀប (b) អប្បបរមាធៀប

(c) គ្មានអតិបរមា ឬអប្បបរមា (d) គ្មានអតិបរមា ឬអប្បបរមា

រូបទី 3

ឧទាហរណ៍ទី 2 : រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និងតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ក្នុងឧទាហរណ៍ទី 1 ។

ចម្លើយ: តាមតារាងក្នុងដំណោះស្រាយឧទាហរណ៍ទី 1 យើងឃើញថា $f'(x)$ ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជាមានត្រង់ -1 ដូច្នេះ $f(-1)=0$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបតាមតេស្តដេរីវេទី 1 (The First Derivative Test) ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ f' ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ 2 ដូច្នេះ $f(2)=-27$ ក៏ជាតម្លៃអប្បបរមាធៀបមួយដែរ។ ដូចដែលបានសម្គាល់ពីមុន $f(0)=5$ គឺជាតម្លៃអតិបរមាធៀបមួយ ព្រោះ $f'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ 0 ។

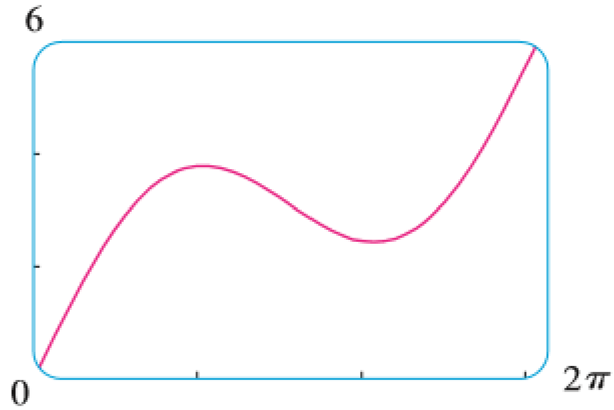
ឧទាហរណ៍ទី 3 : រកតម្លៃអតិបរមាធៀប និងតម្លៃអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ $g(x)=x+2\sin x \quad 0\le x\le 2\pi$

ចម្លើយ: ដើម្បីរកចំណុចពិសេសនៃ g យើងធ្វើដេរីវេ $g'(x)=1+2\cos x$

ដូច្នេះ $g'(x)=0$ ពេល $\cos x=-\frac{1}{2}$ ។ ដំណោះស្រាយនៃសមីការនេះគឺ $\frac{2\pi}{3}$ និង $\frac{4\pi}{3}$ ។ ដោយសារ g មានដេរីវេជានិច្ច នោះចំណុចពិសេសមានតែ $\frac{2\pi}{3}$ និង $\frac{4\pi}{3}$ ដូច្នេះហើយយើងវិភាគ g ក្នុងតារាងខាងក្រោម:

ចន្លោះ	$g'(x)=1+2\cos x$	g
$0<x<2\pi/3$	$+$	កើនលើ $(0,2\pi/3)$
$2\pi/3<x<4\pi/3$	$-$	ចុះលើ $(2\pi/3,4\pi/3)$
$4\pi/3<x<2\pi$	$+$	កើនលើ $(4\pi/3,2\pi)$

ដោយសារតែ $g'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ $\frac{2\pi}{3}$ តេស្តដេរីវេទី 1 (The First Derivative Test) ប្រាប់យើងថាមានអតិបរមាធៀបត្រង់ $\frac{2\pi}{3}$ ហើយតម្លៃអតិបរមាធៀបគឺ $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.83$

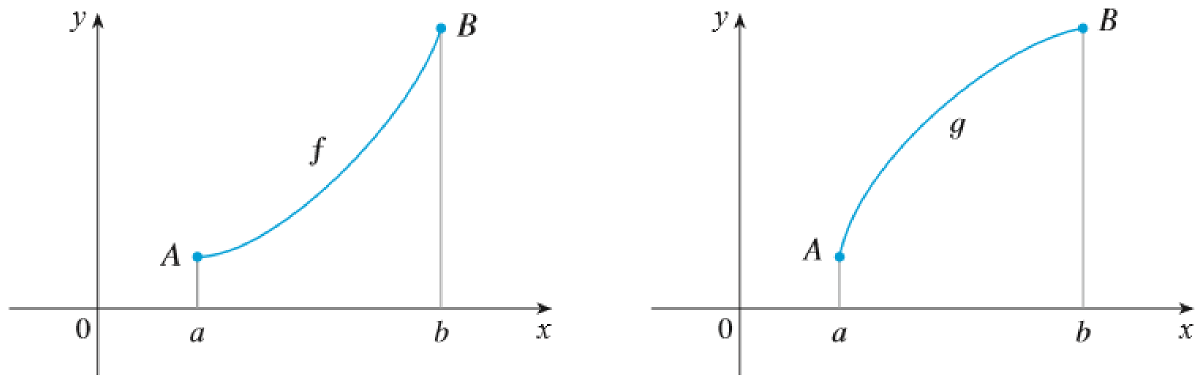


រូបទី 4

លើសពីនេះ $g'(x)$ ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ $\frac{4\pi}{3}$ ដូច្នេះហើយ $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\approx 2.46$ គឺជាតម្លៃអប្បបរមាធៀប។ ក្រាបនៃ g ក្នុងរូបទី 4 គាំទ្រនូវសេចក្តីសន្និដ្ឋានរបស់យើង។

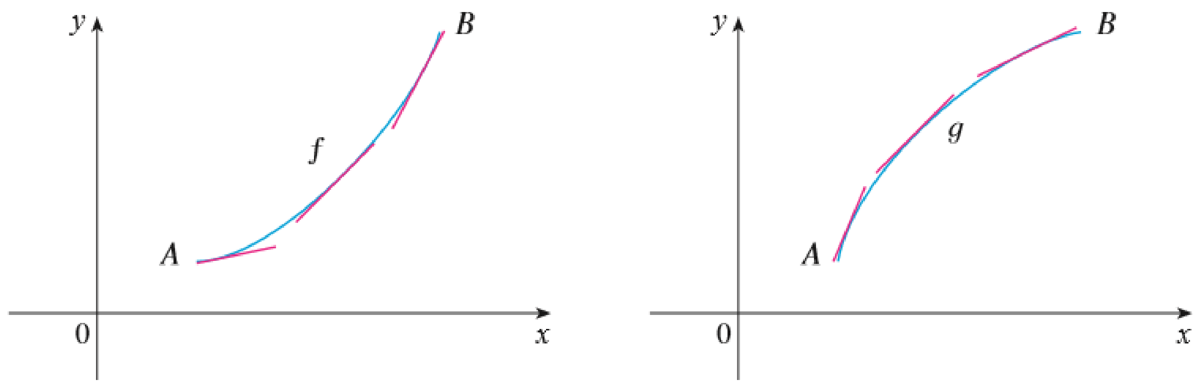
តើ f'' ថាយ៉ាងណាចំពោះ f ?

រូបទី 5 បង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍ពីដែលកើនលើ (a,b) ។ ក្រាបទាំងពីរភ្ជាប់ពីចំណុច A និងចំណុច B ប៉ុន្តែពួកគេមានរាងខុសគ្នា ព្រោះពួកគេបត់បែនក្នុងទិសដៅខុសគ្នា។ តើយើងអាចប្រាប់ពីភាពផ្សេងគ្នារវាងប្រភេទទាំងពីរនេះយ៉ាងដូចម្តេច? ក្នុងរូបទី 6 បន្ទាត់ដែលប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង have been drawn ត្រង់ចំណុចជាច្រើន។ ក្នុង (a) ខ្សែកោងស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ប៉ះ ហើយ f ត្រូវបានគេហៅថា បែរភាពផតឡើងលើ (concave upward) លើ (a,b) ។ ក្នុង (b) ខ្សែកោងស្ថិតនៅខាងក្រោមបន្ទាត់ប៉ះ ហើយ g ត្រូវបានគេហៅថា បែរភាពផតចុះក្រោម (concave downward) លើ (a,b)។



(a) (b)

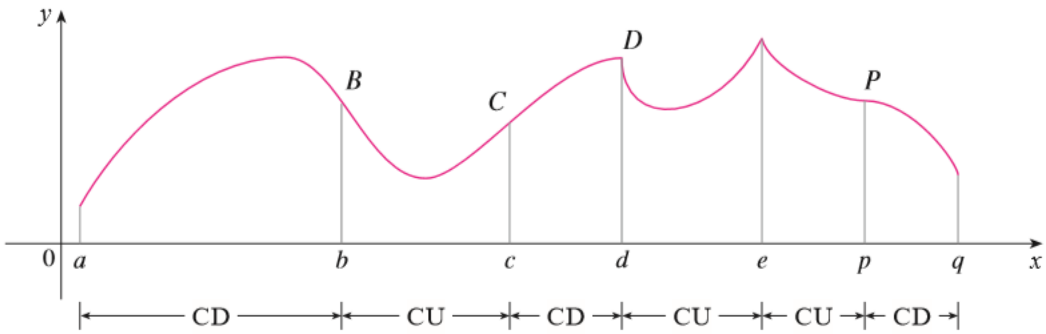
រូបទី 5



រូបទី 6

និយមន័យៈ បើក្រាបនៃ f ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់លើចន្លោះ I នោះវាត្រូវបានគេហៅថា បែរភាពផតឡើងលើ លើ I ។ បើក្រាបនៃ f ស្ថិតនៅក្រោមបន្ទាត់ប៉ះទាំងអស់លើចន្លោះ I នោះវាត្រូវបានគេហៅថា បែរភាពផតចុះក្រោម លើ I ។

រូបទី 7 បង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍មួយដែល បែរភាពផតឡើងលើ (សរសេរកាត់ដោយ CU) លើចន្លោះ $(a,b),(d,e),$ និង (e,p) ហើយ បែរភាពផតចុះក្រោម (CD) លើចន្លោះ $(a,b),(c,d),$ និង (p,q) ។



7

(រូបទី7)

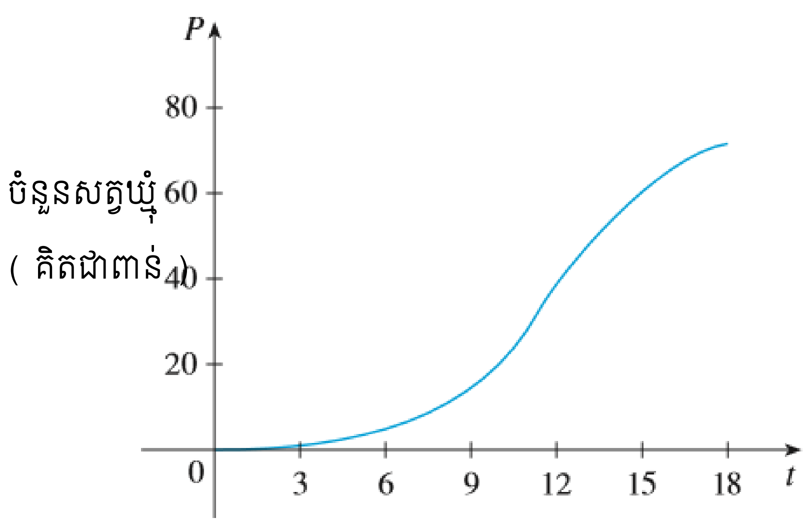
ឥឡូវយើងមកមើលពីរបៀបកំណត់ចន្លោះនៃភាពផត ដោយប្រើដេរីវេទី 2 ។ បើយើងមើលរូបទី 6 (a) អ្នកអាចឃើញថា ពេលអនុគមន៍ឡើងពីឆ្វេងទៅស្តាំ ធ្វើឱ្យមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះកើនឡើង។ មានន័យថា ដេរីវេ f' ជាអនុគមន៍កើនមួយ ដូច្នេះហើយ ដេរីវេ f'' របស់វាវិជ្ជមាន។ លើសពីនេះ ក្នុងរូបទី 6 (b) មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះចុះពីឆ្វេងមកស្តាំ ដូច្នេះ f' ចុះ ដូចនេះ f'' អវិជ្ជមាន។ មូលហេតុនេះអាចបញ្ជាក់ ហើយណែនាំថាទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមពិតជាត្រឹមត្រូវ។ ការស្រាយបញ្ជាក់មួយត្រូវបានឱ្យនៅក្នុង Appendix F ដែលប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទតម្លៃមធ្យម (the Mean Value Theorem) ។

តេស្តភាពផត (Concavity Test)

(a) បើ $f''(x) > 0 \ \forall x$ លើ I នោះក្រាបនៃ f បែរភាពផតឡើងលើ លើ I ។

(b) បើ $f''(x) < 0 \ \forall x$ លើ I នោះក្រាបនៃ f បែរភាពផតចុះក្រោម លើ I ។

ឧទាហរណ៍ទី 4 : រូបទី 8 បង្ហាញពីក្រាបនៃចំនួននៃការចិញ្ចឹមសត្វឃ្មុំ Cyprian ក្នុងកន្លែងដែលមានសំបុកឃ្មុំ។ តើអត្រានៃការកើនឡើងចំនួនសត្វឃ្មុំ មានការផ្លាស់ប្តូរតាមពេលវេលាដោយរបៀបណា? តើនៅពេលណាដែលមានអត្រាខ្ពស់បំផុត? តើនៅចន្លោះណាដែល P បែរភាពផតឡើងលើ ឬបែរភាពផតចុះក្រោម?



រូបទី 8 រយៈពេល (គិតជាសប្តាហ៍)

ចម្លើយៈ ដោយមើលទៅលើមេគុណប្រាប់ទិសនៃខ្សែកោងពេល t កើនឡើង យើងឃើញថាអត្រានៃការកើនឡើងនៃចំនួនសត្វឃ្មុំ មានចំនួនតិចណាស់ពេលដំបូង បន្ទាប់មកក៏ធំជាងមុនជាបន្តបន្ទាប់រហូតឈានដល់អតិបរមាប្រហែលនៅត្រង់ $t=12$ សប្តាហ៍ ហើយថយចុះពេលចំនួនសត្វឃ្មុំចាប់ផ្តើមនៅកម្រិតថេរ។ នៅពេលចំនួនសត្វឃ្មុំខិតជិតតម្លៃអតិបរមាប្រហែល 75000 (គេហៅថា the carrying capacity) អត្រានៃការកើនឡើង $P'(t)$ ខិតជិត 0 ។ ខ្សែកោងបង្ហាញឱ្យឃើញថាវាបែរភាពផតឡើងលើ លើ $(0,12)$ ហើយបែរភាពផតចុះក្រោមលើ $(12,18)$ ។

ក្នុងឧទាហរណ៍ទី 4 ខ្សែកោងនៃចំនួនសត្វឃ្មុំបានប្តូរពី បែរភាពផតឡើងលើ ទៅជាបែរភាពផតចុះក្រោមត្រង់ចំណុច $(12,38,000)$ ។ ចំណុចនេះត្រូវបានគេហៅថា ចំណុចរបត់ (inflection point) នៃខ្សែកោង ។ សារៈសំខាន់នៃចំណុចនេះគឺ អត្រានៃការកើនឡើងចំនួនសត្វឃ្មុំ មានតម្លៃអតិបរមារបស់វាត្រង់ចំណុចនោះ។ ជាទូទៅ ចំណុចរបត់គឺជាចំណុចដែលខ្សែកោងប្តូរទិសដៅភាពផតរបស់វា។

និយមន័យៈ ចំណុច P មួយនៅលើខ្សែកោង $y=f(x)$ ត្រូវបានគេហៅថាចំណុចរបត់ បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះនោះ ហើយខ្សែកោងប្តូរពីបែរភាពផតទៅលើ ទៅបែរភាពផតចុះក្រោម ឬប្តូរពីបែរភាពផតចុះក្រោម ទៅបែរភាពផតឡើងលើត្រង់ P ។

ឧទាហរណ៍ ក្នុងរូបទី 7 ចំណុច B,C,D និង P សុទ្ធតែជាចំណុចរបត់។ ចំណាំថា បើក្រាបមួយមានបន្ទាត់ប៉ះត្រង់ចំណុចរបត់ នោះខ្សែកោងកាត់បន្ទាត់ប៉ះរបស់វាត្រង់ចំណុចនោះ។

បើយើងមើលទៅលើតេស្តភាពផត (Concavity Test) គឺមានចំណុចរបត់មួយត្រង់ចំណុចទាំងឡាយណាដែលដេរីវេទី 2 ប្តូរសញ្ញា។

ឧទាហរណ៍ទី 5 : គូសក្រាបដែលអាចគូសបាននៃអនុគមន៍ f ដែលត្រឹមត្រូវទៅតាមលក្ខខណ្ឌខាងក្រោមៈ

(i) $f'(x)>0$ លើ $(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ លើ $(1,\infty)$

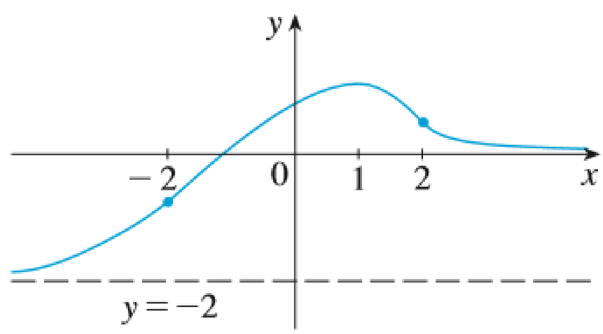
(ii) $f''(x)>0$ លើ $(-\infty,-2)$ និង $(2,\infty)$, $f''(x)<0$ លើ $(-2,2)$

$(iii)\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

ចម្លើយ: លក្ខខណ្ឌ (i) ប្រាប់យើងថា f កើនលើ $(-\infty,1)$ ហើយចុះលើ $(1,\infty)$ ។ លក្ខខណ្ឌ (ii) និយាយថា f បែរភាពផតឡើងលើ លើ $(-\infty,-2)$ និង $(2,\infty)$ ហើយបែរភាពផតចុះក្រោម លើ $(-2,2)$ ។ ពីលក្ខខណ្ឌ (iii) យើងដឹងថាក្រាបនៃ f មានអាស៊ីមតូតដេកពីរគឺ $y=-2$ និង $y=0$ ។

ដំបូងយើងគូរអាស៊ីមតូតដេក $y=-2$ ជាបន្ទាត់ដាច់ (dashed line) (មើលរូបទី 9) ។ បន្ទាប់មកយើងគូរក្រាបនៃ f ខិតជិតអាស៊ីមតូតនៅខាងឆ្វេងពីចម្ងាយ ហើយឱ្យវាកើនដល់

ចំណុចអតិបរមារបស់វាត្រង់ $x=1$ ហើយឱ្យវាចុះទៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសនៅខាងស្តាំពីចម្ងាយ។ យើងក៏ធ្វើឱ្យប្រាកដថា ក្រាបមានចំណុចរបត់នៅពេល $x=-2$ និង 2 ។ ចំណាំថាយើងធ្វើឱ្យខ្សែកោងបត់ឡើងលើចំពោះ $x<-2$ និង $x>2$ ហើយបត់ចុះក្រោមនៅពេល x នៅចន្លោះ -2 និង 2 ។



រូបទី 9

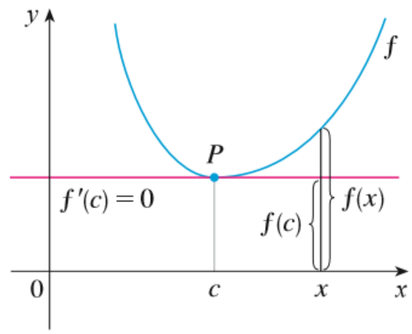
ការអនុវត្តន៍ផ្សេងទៀតនៃដេរីវេទី 2 គឺតេស្តខាងក្រោមសម្រាប់តម្លៃអតិបរមា និងតម្លៃអប្បបរមា។ វាគឺជាវិបាកនៃតេស្តភាពផត (Concavity Test) ។

តេស្តដេរីវេទី 2 (The Second Derivative Test) : សន្មតថា f'' ជាអនុគមន៍ជាប់ដែលនៅជិត c ។

(a) បើ $f'(c)=0$ ហើយ $f''(c)>0$ នោះ f មានអប្បបរមាធៀបត្រង់ c ។

(b) បើ $f'(c)=0$ ហើយ $f''(c)<0$ នោះ f មានអតិបរមាធៀបត្រង់ c ។

ឧទាហរណ៍: ផ្នែក (a) ពិត ព្រោះ $f''(x)>0$ នៅជិត c ដូច្នេះហើយ f បែរភាពផត ឡើងលើ នៅជិត c ។ នេះមានន័យថា ក្រាបនៃ f ស្ថិតនៅលើបន្ទាត់ប៉ះដេករបស់វា ដូច្នេះហើយ f មាន អប្បបរមាធៀបមួយត្រង់ c ។ (មើលរូបទី 10)



រូបទី 10

ឧទាហរណ៍ទី 6 : ពិភាក្សាខ្សែកោង $y = x^4 - 4x^3$ ទៅលើភាពផត ចំណុចរបត់ និងអតិបរមាធៀប និងអប្បបរមាធៀប។ ប្រើព័ត៌មាននេះដើម្បីគូសខ្សែកោង។

ចម្លើយ: បើ $f(x) = x^4 - 4x^3$ នោះ

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ ហើយ $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

ដើម្បីរកចំណុចពិសេស យើងឱ្យ $f'(x) = 0$ នាំឱ្យ $x = 0$ និង $x = 3$ ។ ដើម្បីប្រើតេស្តដេរីវេទី 2 (the Second Derivative Test) យើងរកតម្លៃ f'' ត្រង់ចំណុចពិសេសទាំងនេះ :

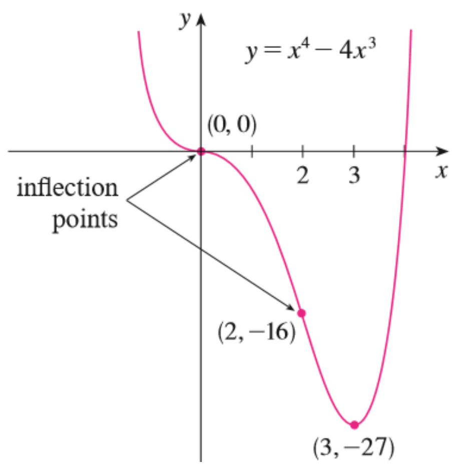
$f''(0) = 0$ $\qquad\qquad f''(3) = 36 > 0$

ដោយសារតែ $f'(3) = 0$ និង $f''(3) > 0$ នោះ $f(3) = -27$ ជាអប្បបរមាធៀប។ ដោយសារតែ $f''(0) = 0$ តេស្តដេរីវេទី 2 (the Second Derivative Test) មិនបានឱ្យព័ត៌មានអំពីចំណុចពិសេស ដែលស្មើ 0 ឡើយ។ ប៉ុន្តែដោយសារតែ $f'(x) < 0$ ចំពោះ $x < 0$ និង $0 < x < 3$ តេស្តដេរីវេទី 2 (the Second Derivative Test) ប្រាប់យើងថា f គ្មានអតិបរមាធៀប ឬអប្បបរមាធៀបត្រង់ 0 ទេ។ [តាមការពិត ការបង្ហាញពី $f'(x)$ បញ្ជាក់ថា f ជាអនុគមន៍ចុះ ត្រង់ខាងឆ្វេង 3 ហើយកើន ត្រង់ខាងស្តាំ 3] ។

ដោយសារតែ $f''(x) = 0$ ពេល $x = 0$ ឬ 2 យើងបែងចែកបន្ទាត់ចំនួនពិត ជាចន្លោះដែលមានចំនួនទាំងនេះ ដែលជាចំណុចចុង ហើយយើងបំពេញក្នុងតារាងខាងក្រោម។

ចន្លោះ	$f''(x)=12x(x-2)$	ភាពផត
$(-\infty,0)$	$+$	ឡើងលើ
$(0,2)$	$-$	ចុះក្រោម
$(2,\infty)$	$+$	ឡើងលើ

ចំណុច $(0,0)$ ជាចំណុចរបត់មួយ ដោយសារតែខ្សែកោងប្តូរពី បែរភាពផតឡើងលើ ទៅបែរភាពផតចុះក្រោមត្រង់ចំណុចនោះ។ ចំណុច $(2,-16)$ ក៏ជាចំណុចរបត់ដែរ



រូបទី 11

ដោយសារតែខ្សែកោងប្តូរពី បែរភាពផតចុះក្រោម ទៅបែរភាពផតឡើងលើ។

ក្នុងការប្រើអប្បបរមាធៀប ចន្លោះនៃភាពផង និងចំណុចរបត់ យើងគូសខ្សែកោងក្នុងរូបទី 11 ។

សម្គាល់: តេស្តដេរីវេទី 2 (The Second Derivative Test) មិនអាចសន្និដ្ឋានបានទេនៅពេល $f''(c)=0$ ។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀត ត្រង់ចំណុចមួយនោះ ប្រហែលជាមានអតិបរមា ឬអប្បបរមា ឬ

ប្រហែលជាគ្មានអតិបរមា ឬអប្បបរមា (ដូចក្នុងឧទាហរណ៍ទី 6) ។ តេស្តនេះក៏មិនអាចប្រើការបានដែរ នៅពេល $f''(c)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបាន។ ក្នុងករណីបែបនេះ តេស្តដេរីវេទី 1 (the First Derivative Test) ត្រូវតែត្រូវបានយកមកប្រើ។ តាមការពិត សូម្បីនៅពេលយកតេស្តទាំងពីរមកប្រើ ក៏ តេស្តដេរីវេទី 1 (the First Derivative Test) មានភាពងាយស្រួលក្នុងការប្រើជាង។

ឧទាហរណ៍ទី 7 : គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

ចម្លើយ: គណនាដេរីវេទី 2 នៃអនុគមន៍ គេបាន

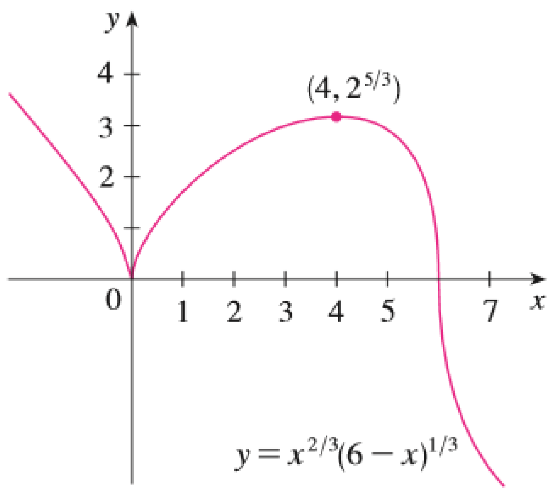
$$f'(x)=\frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x)=\frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

ដោយសារតែ $f'(x)=0$ ពេល $x=4$ ហើយ $f'(x)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបាន ពេល $x=0$ ឬ $x=6$ នោះចំណុចពិសេសគឺ $0,4,$ និង 6 ។

ចន្លោះ	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x<0$ $0<x<4$ $4<x<6$ $x>6$	$+$ $+$ $-$ $-$	$-$ $+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$ $+$	$-$ $+$ $-$ $-$	ចុះ លើ $(-\infty,0)$ កើនលើ $(0,4)$ ចុះ លើ $(4,6)$ កើនលើ $(6,\infty)$

ក្នុងការរកតម្លៃបរមាធៀប យើងប្រើតេស្តដេរីវេទី 1 (the First Derivative Test) ។ ដោយសារតែ f' ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមានត្រង់ 0 នោះ $f(0)=0$ ជាអប្បបរមាធៀប។ ដោយសារតែ f' ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមានត្រង់ 4 នោះ $f(4)=2^{5/3}$ ជាអតិបរមាធៀប។ សញ្ញានៃ f' មិនប្តូរត្រង់ 6 ទេ ដូច្នេះហើយ គ្មានអប្បបរមា ឬអតិបរមាត្រង់ចំណុចនោះទេ។ (តេស្តដេរីវេទី 2 (the Second Derivative Test) អាចត្រូវបានគេយកមកប្រើត្រង់ 4 ប៉ុន្តែមិនមែនត្រង់ 0 ឬ 6 ទេ ដោយសារតែ f'' មិនអាចកំណត់តម្លៃបានត្រង់ចំណុចទាំងនេះ។)

ពិនិត្យមើលការបង្ហាញពី $f''(x)$ ហើយចំណាំថា $x^{4/3}\ge 0$ គ្រប់តម្លៃ x យើងបាន $f''(x)<0$ ចំពោះ $x<0$ និង $0<x<6$ ហើយ $f''(x)>0$ ចំពោះ $x>6$ ។ ដូច្នេះ f បែរភាពផតចុះក្រោម លើ $(-\infty,0)$ និង $(0,6)$ ហើយបែរភាពផតឡើងលើ លើ $(6,\infty)$ ហើយមាមានចំណុចរបត់តែមួយ គឺ $(6,0)$ ។ ក្រាបរបស់វាត្រូវបានគូសក្នុងរូបទី 12 ។ ចំណាំថាខ្សែកោងមានបន្ទាត់ប៉ះឈរ ត្រង់ $(0,0)$ និង $(6,0)$ ព្រោះ $|f'(x)|\mapsto\infty$ ពេល $x\to 0$ និងពេល $x\to 6$ ។



រូបទី 12

ឧទាហរណ៍ទី 8 : ប្រើដេរីវេទី 1 និងទី 2 នៃ $f(x)=e^{1/x}$ និងប្រើទាំងអាស៊ីមតូត ដើម្បីគូសក្រាបរបស់វា។

ចម្លើយ: ចំណាំថាដែនកំណត់នៃ f គឺ $\{x\,|\,x\neq 0\}$ ដូច្នេះយើងឆែកមើកអាស៊ីមតូតឈរដោយគណនារកលីមីតឆ្វេង និងស្តាំពេល $x\to 0$ ។ ពេល $x\to 0^+$ យើងដឹងថា $t=1/x\to\infty$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}=\lim\limits_{t\to\infty} e^{t}=\infty$ នោះវាបង្ហាញថា $x=0$ ជាអាស៊ីមតូតឈរ។ ពេល $x\to 0^-$ យើងបាន $t=1/x\to-\infty$ ដូច្នេះ $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{t}=0$ ។

ពេល $x\to\pm\infty$ យើងបាន $1/x\to 0$ ដូច្នេះហើយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=e^{0}=1$

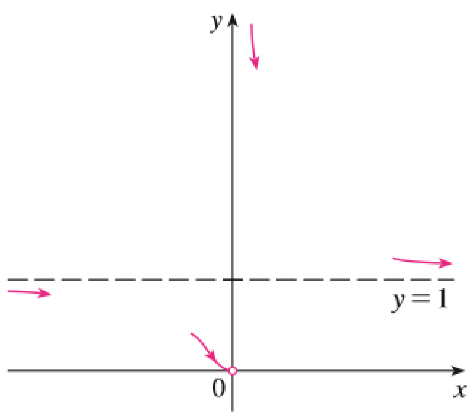
នេះបង្ហាញថា $y=1$ ជាអាស៊ីមតូតដេក។

ឥឡូវយើងគណនាដេរីវេ។ តាម The Chain Rule យើងបាន $f'(x)=-\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

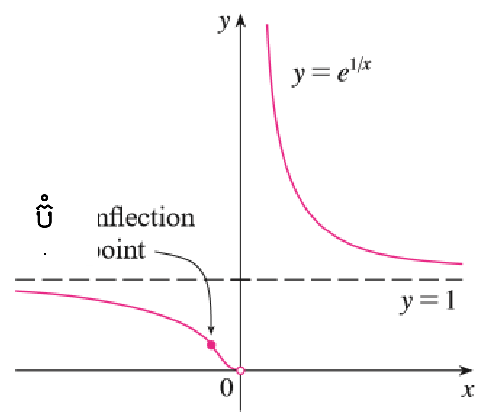
ដោយសារតែ $e^{1/x}>0$ ហើយ $x^2>0\ \forall x\neq 0$ យើងបាន $f'(x)<0\ \forall x\neq 0$ ។ ដូចនេះ f ចុះលើ $(-\infty,0)$ និង $(0,\infty)$ ។ វាគ្មានចំណុចពិសេសទេ ដូច្នេះអនុគមន៍គ្មានអតិបរមា ឬអប្បបរមាទេ។ ដេរីវេទី 2 គឺ $f''(x)=-\dfrac{x^2e^{1/x}\left(-1/x^2\right)-e^{1/x}(2x)}{x^4}=\dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$

ដោយសារតែ $e^{1/x}>0$ ហើយ $x^4>0$ យើងបាន $f''(x)>0$ ពេល $x>-\frac{1}{2}$ $(x\neq 0)$ ហើយ $f''(x)<0$ ពេល $x<-\frac{1}{2}$ ។ ដូច្នេះ ខ្សែកោងបែរភាពផតចុះក្រោម លើ $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ ហើយបែរភាពផតឡើងលើ លើ $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ និង $(0,\infty)$ ។ ចំណុចរបត់គឺ $\left(-\frac{1}{2},e^{-2}\right)$ ។

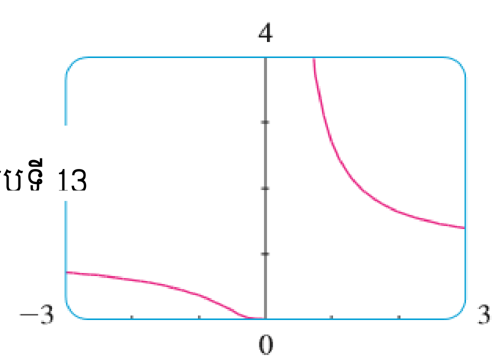
ដើម្បីគូសក្រាបនៃ f ដំបូងយើងគូរអាស៊ីមតូតដេក $y=1$ (ជាបន្ទាត់ដាច់) រួមជាមួយនឹងផ្នែកផ្សេងៗនៃខ្សែកោងដែលនៅជិតអាស៊ីមតូតក្នុងគំនូសព្រាង [រូបទី 13 (a)] ។ ផ្នែកទាំងនេះឆ្លុះបញ្ចាំងពីព័ត៌មានអំពីលីមីត និងការពិតដែល f ចុះលើចន្លោះ $(-\infty,0)$ ផង និង $(0,\infty)$ ផង ។ ចំណាំថា យើងបានបង្ហាញថា $f(x)\to 0$ ពេល $x\to 0^-$ ទោះបីជា $f(0)$ មិនអាចកំណត់តម្លៃបានក៏ដោយ។ ក្នុងរូបទី 13 (b) យើងគូសក្រាបឱ្យរួចរាល់ដោយបញ្ចូលគ្នានូវព័ត៌មានអំពីភាពផត និងចំណុចរបត់។ ក្នុងរូបទី 13 (c) យើងពិនិត្យមើលការងាររបស់យើងជាមួយឧបករណ៍គូសក្រាប។



(a) ការគូសព្រាង



(b) ក្រាបដែលគូសរួចរាល់



រូបទី 13

(c) ការផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយកុំព្យូទ័រ

២.៤.រាងមិនកំណត់ (Indeterminate Forms) និងច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital Rule)

សន្មតថាយើងកំពុងតែព្យាយាមវិភាគពីលក្ខណៈនៃអនុគមន៍ $F(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

ទោះបីជា F មិនកំណត់ ត្រង់ $x=1$ ក៏ដោយ ក៏យើងត្រូវដឹងថា F មានលក្ខណៈយ៉ាងណាពេលនៅក្បែរ 1 ។ ជាពិសេស យើងចង់ដឹងពីតម្លៃនៃលីមីត

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

ក្នុងការគណនារកលីមីតនេះ យើងមិនអាចអនុវត្តន៍ច្បាប់ទី 5 នៃលីមីតបានទេ (លីមីតនៃផលចែកស្មើនឹងផលចែកនៃលីមីត, មើលផ្នែកទី 2.3) ពីព្រោះលីមីតនៃភាគបែងស្មើ 0 ។ តាមការពិតទោះបីជាលីមីតក្នុង កំណត់តម្លៃបានក៏ដោយ ក៏តម្លៃរបស់វាមិនងាយនឹងគណនាដែរ ពីព្រោះទាំងភាគយក និងភាគបែងសុទ្ធតែខិតជិត 0 ហើយ $\dfrac{0}{0}$ មិនកំណត់បានឡើយ។

ជាទូទៅ បើយើងមានលីមីតដែលមានទម្រង់ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ដែល $f(x)\to 0$ និង $g(x)\to 0$ ពេល $x\to a$ នោះលីមីតនេះអាច ឬមិនអាចកំណត់តម្លៃបាន ហើយត្រូវបានគេហៅថា រាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\dfrac{0}{0}$ (indeterminate form of type $\dfrac{0}{0}$) ។ យើងបានជួបលីមីតខ្លះនៃប្រភេទនេះក្នុងជំពូកទី 2 ។ សម្រាប់អនុគមន៍សនិទាន យើងអាចសម្រួលកត្តាដែលដូចគ្នាៈ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

យើងប្រើការបកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រដើម្បីបង្ហាញថា $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

ប៉ុន្តែវិធីទាំងនេះមិនអាចប្រើការបានចំពោះលីមីតខ្លះដូចជា ដូច្នេះក្នុងផ្នែកនេះយើងណែនាំវិធីដោយប្រព័ន្ធ (systematic method) ដែលត្រូវបានគេស្គាល់ថាជា ច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital Rule) សម្រាប់ការវាយតម្លៃរាងដែលមិនកំណត់។

ស្ថានភាពផ្សេងទៀតដែលក្នុងនោះលីមីតមួយមិនងាយនឹងអាចគណនា កើតឡើងនៅពេលដែលយើងរកអាស៊ីមតូតដេកនៃ F ហើយត្រូវការកំណត់តម្លៃលីមីត

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

វាមិនងាយក្នុងការរកតម្លៃលីមីតឡើយ ពីព្រោះទាំងភាគយក និងភាគបែងកាន់តែធំទៅៗគឺ $x\to\infty$ ។ វាមានការប្រយុទ្ធមួយរវាងភាគយក និងភាគបែង។ បើភាគយកឈ្នះ នោះលីមីតនឹងស្មើ ∞ ហើយបើភាគបែងឈ្នះ នោះចម្លើយនឹងស្មើ 0 ។ ឬក៏ប្រហែលជាមានការសម្របសម្រួលខ្លះដែលក្នុងករណីនោះ ចម្លើយនឹងស្មើនឹងចំនួនវិជ្ជមានមានកំណត់។

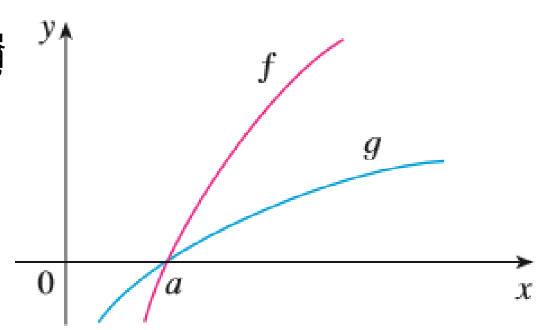
ជាទូទៅ បើយើងមានលីមីតមួយដែលមានរាង $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ដែល $f(x)\to\infty$ (ឬ $-\infty$) និង $g(x)\to\infty$ (ឬ $-\infty$) នោះលីមីតអាច ឬមិនអាចមានលីមីតទេ ហើយត្រូវបានគេហៅថា រាងមិនកំណត់ប្រភេទ ∞/∞ (indeterminate form of type ∞/∞) ។ យើងបានឃើញផ្នែក 2.6 រួចហើយថា លីមីតប្រភេទនេះអាចគណនាបានចំពោះអនុគមន៍ដែលកំណត់បាន ដែលមានដូចជាអនុគមន៍សនិទាន ដោយចែកភាគយក និងភាគបែងដោយស្វ័យគុណដែលធំជាងគេនៃ x ដែលកើតឡើងនៅក្នុងភាគបែង។

ឧទាហរណ៍: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$

វិធីនេះមិនអាចប្រើការបានចំពោះលីមីតខ្លះដូចជា ប៉ុន្តែ ច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital Rule) ក៏អាចអនុវត្តន៍ក្នុងរាងមិនកំណត់ប្រភេទនេះបានដែរ។

ច្បាប់ឡូពីតាល់ (L'Hospital's Rule) : សន្មតថា f និង g មានដេរីវេ ហើយ $g'(x)\neq 0$ លើចន្លោះបើក I ដែលផ្ទុក a (មិនគិតបញ្ចូលត្រង់ a) ។ សន្មតថា $\lim_{x\to a} f(x)=0$ និង $\lim_{x\to a} g(x)=0$ ឬ សន្មតថា $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ និង $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ (ក្នុងន័យផ្សេងទៀត យើងមានរាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\frac{0}{0}$ ឬ ∞/∞ ។) នោះ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ បើលីមីតខាងស្តាំអាចកំណត់តម្លៃបាន (ឬស្មើ ∞ ឬ $-\infty$) ។

រូបទី 1 ណែនាំយើងឱ្យឃើញថាហេតុអ្វី



ច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital's Rule) អាចនឹងពិត។

ក្រាបទីមួយបង្ហាញពីអនុគមន៍ដែលអាចដេរីវេបាន

f និង g ដែលក្រាបនីមួយៗខិតជិត 0 ពេល

$x \to a$ ។ បើយើងពង្រីកឆ្ពោះទៅចំណុច $(a,0)$

នោះក្រាបនឹងចាប់ផ្តើមស្រដៀងនឹងបន្ទាត់ត្រង់។

ប៉ុន្តែបើអនុគមន៍នោះពិតជាបន្ទាត់ត្រង់មែន ដូចក្នុង

ក្រាបទីពីរ នោះផលធៀបរបស់វានឹងស្មើ

$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2}$ ដែលជាផលធៀបនៃដេរីវេរបស់វា។ រូបទី 1

នេះណែនាំថា $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

សម្គាល់ទី 1 : ច្បាប់ឡូពីតាល់ (L'Hospital's Rule) និយាយថា លីមីតនៃផលចែកនៃអនុគមន៍ ស្មើនឹងលីមីតនៃផលចែកនៃដេរីវេរបស់វា ប្រសិនបើលក្ខខណ្ឌដែលគេឱ្យ ត្រូវបានផ្ទៀងផ្ទាត់។ ជាពិសេស វាមានសារៈសំខាន់ក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌចំពោះលីមីតនៃ f និង g មុនពេកប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital's Rule) ។

សម្គាល់ទី 2 : ច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital's Rule) ក៏មានសុពលភាពចំពោះលីមីតតែម្ខាង (one-sided limits) និងចំពោះលីមីតត្រង់អនន្ត ឬដកអនន្ត មានន័យថា "$x \to a$" អាចជំនួសដោយសញ្ញាផ្សេងបានគឺ $x \to a^+, x \to a^-, x \to \infty,$ ឬ $x \to -\infty$ ។

សម្គាល់ទី 3 : សម្រាប់ករណីពិសេសដែលក្នុងនោះ $f(a) = g(a) = 0,$ f' និង g' ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ $g'(a) \neq 0$ វាងាយស្រួលក្នុងការមើលឃើញពីមូលហេតុដែលបញ្ជាក់ថាច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital's Rule) ពិតជាត្រឹមត្រូវមែន។ តាមការពិត ក្នុងការប្រើរាងផ្សេងទៀតពីនិយមន័យដេរីវេ យើងបាន

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

វាមានការពិបាកជាងនេះទៅទៀតក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ទម្រង់ទូទៅនៃច្បាប់ឡូពីតាល់ (l'Hospital's Rule) ។ មើល Appendix F។

ឧទាហរណ៍ទី 1 : រក $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ។

ចម្លើយ: ដោយសារតែ $\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ ហើយ $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$

យើងអាចអនុវត្តន៍ច្បាប់ឡូពីតាល់:

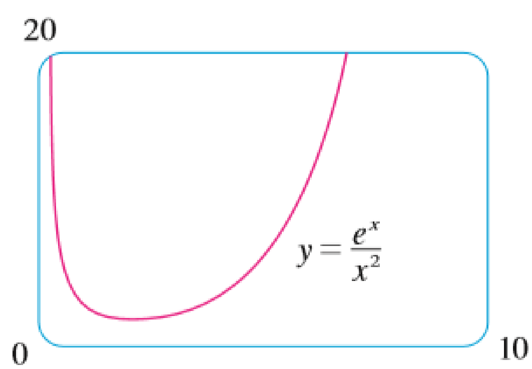
$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

ឧទាហរណ៍ទី 2 : គណនា $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$ ។

ចម្លើយ: យើងមាន $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ ហើយ $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$

ដូច្នេះតាមច្បាប់ឡូពីតាល់យើងបាន

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$



រូបទី 2

ដោយសារតែ $e^x \to \infty$

ហើយ $2x \to \infty$ ពេល $x \to \infty$ ទើបលីមីតនៅខាងស្តាំក៏មិនអាចកំណត់បាន ប៉ុន្តែការអនុវត្តន៍លើកទី 2 នៃច្បាប់ឡូពីតាល់យើងបាន $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$

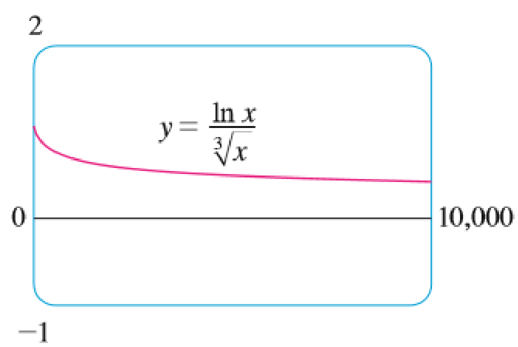
ឧទាហរណ៍ទី 3 : គណនា $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ។

ចម្លើយ: ដោយសារតែ $\ln x \to \infty$ ហើយ $\sqrt[3]{x} \to \infty$ ពេល $x \to \infty$, តាមច្បាប់ឡូពីតាល់:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

ចំណាំថា ឥឡូវនេះលីមីតខាងស្តាំមានរាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\frac{0}{0}$ ប៉ុន្តែជំនួសឱ្យការអនុវត្តន៍ច្បាប់ឡូពីតាល់ជាលើកទី 2 ដូចដែលយើងបានធ្វើក្នុងឧទាហរណ៍ទី 2 យើងបង្ហាញតាមធម្មតាវិញ ហើយឃើញថាការអនុវត្តន៍ជាលើកទី 2 មិនមានសារៈសំខាន់ឡើយ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0$$



រូបទី 3

ឧទាហរណ៍ទី 4 : រក $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$ ។ (មើលលំហាត់ទី 44 ក្នុងផ្នែក 2.2 ។)

ចម្លើយ: ចំណាំថាទាំង $\tan x - x \to 0$ ហើយ $x^3 \to 0$ ពេល $x \to 0$ យើងប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

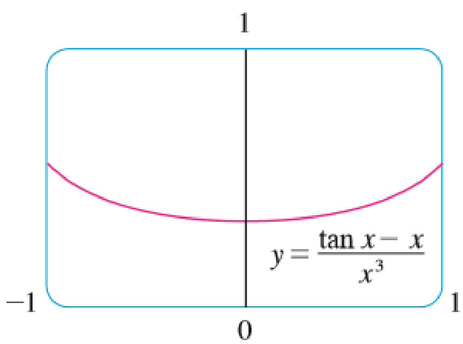
ដោយសារតែលីមីតនៅខាងស្តាំនៅតែមានរាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\frac{0}{0}$ យើងអនុវត្តន៍ច្បាប់ឡូពីតាល់ម្តងទៀត: $\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$

ព្រោះតែ $\lim_{x\to 0}\sec^2 x = 1$ យើងគណនាតាមធម្មតាដោយសរសេរទៅជា

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\sec^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

យើងក៏អាចកំណត់តម្លៃនៃលីមីតនេះដោយប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ជាលើកទី 3 បានដែរ ឬដោយសរសេរ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ហើយប្រើប្រាស់ចំណេះដឹងរបស់យើងអំពីលីមីតត្រីកោណមាត្រ។ យកជំហានទាំងអស់មករួមបញ្ចូលគ្នា យើងបាន

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}$$



រូបទី 4

ឧទាហរណ៍ទី 5 : រក $\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}$ ។

ចម្លើយ: បើយើងចង់ប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ដោយឥតពីចារណា យើងនឹងទទួលបាន

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

ធ្វើបែបនេះមិនត្រឹមត្រូវទេ! ទោះបីជាភាគយក $\sin x \to 0$ ពេល $x \to \pi^-$ ក៏ដោយ ក៏យើងត្រូវចំណាំថាភាគបែង $(1-\cos x)$ មិនខិតជិត 0 ដូច្នេះច្បាប់ឡូពីតាល់មិនត្រូវបានយកមកអនុវត្តន៍នៅទៅនេះឡើយ។

តាមការពិត លីមីតដែលគេចង់បាន គឺពិតជាងាយស្រួលរកណាស់ ពីព្រោះអនុគមន៍នេះជាប់ត្រង់ π ហើយភាគបែងគឺមិនស្មើសូន្យទេនៅត្រង់នោះ :

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{\sin\pi}{1-\cos\pi}=\frac{0}{1-(-1)}=0$$

ឧទាហរណ៍ទី 5 បង្ហាញពីអ្វីដែលអាចធ្វើឱ្យអ្នកខុស បើអ្នកប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ដោយមិនបានគិត។ លីមីតផ្សេងទៀតអាចត្រូវបានរកឃើញដោយប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ ប៉ុន្តែវាកាន់តែងាយស្រួលរកជាងនេះទៅទៀតដោយប្រើវិធីផ្សេងទៀត។ (មើលឧទាហរណ៍ទី 3 និង 5 ក្នុងផ្នែក 2.3, ឧទាហរណ៍ទី 3 ក្នុងផ្នែក 2.6 និងការពិភាក្សានៅខាងដើមនៃផ្នែកនេះ។) ដូច្នេះហើយ នៅពេលរកតម្លៃលីមីតណាក៏ដោយ អ្នកគួរតែពិចារណាលើវិធីផ្សេងទៀត មុនពេលប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់។

ផលគុណដែលមិនអាចកំណត់បាន (Indeterminate Products)

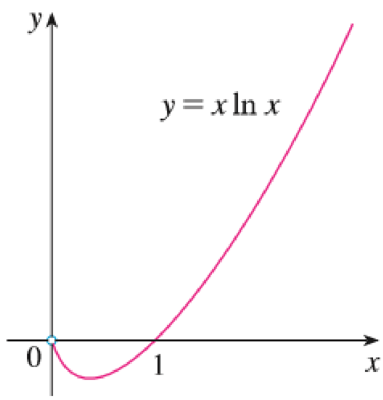
បើ $\lim_{x\to a} f(x)=0$ ហើយ $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ (ឬ $-\infty$) នោះវាមិនច្បាស់លាស់ទេថាតម្លៃនៃ $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]$ ស្មើប៉ុន្មាន, if any, will be. វាមានការប្រយុទ្ធមួយរវាង f និង g ។ បើ f ឈ្នះ នោះចម្លើយនឹងស្មើ 0 តែបើ g ឈ្នះវិញ នោះចម្លើយនឹងស្មើ ∞ (ឬ $-\infty$) ។ ឬអាចនឹងមានការសម្របសម្រួលមួយដែលចម្លើយអាចស្មើនឹងចំនួនកំណត់ដែលមិនសូន្យ។ លីមីតប្រភេទនេះត្រូវបានគេហៅថា រាងមិនកំណត់ប្រភេទ $0\cdot\infty$ ។ យើងអាចយល់ព្រមជាមួយវាដោយសរសេរផលគុណ fg ទៅជាផលចែក: $fg=\dfrac{f}{1/g}$ ឬ $fg=\dfrac{g}{1/f}$

វាបម្លែងលីមីតដែលគេឱ្យ ទៅជារាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\dfrac{0}{0}$ ឬ ∞/∞ ដូច្នេះហើយ យើងអាចប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់បាន។

ឧទាហរណ៍ទី 6 : រកតម្លៃ $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ ។

ចម្លើយៈ លីមីតដែលគេឱ្យមិនអាចកំណត់បាន ពីព្រោះ ពេល $x \to 0^{+}$ នោះកត្តាទីមួយ (x) ខិតជិត 0 ក្នុងពេលដែលកត្តាទីពីរ $(\ln x)$ ខិតជិត $-\infty$ ។ ក្នុងការសរសេរ $x = 1/(1/x)$ យើងបាន $1/x \to \infty$ ពេល $x \to 0^{+}$ ដូច្នេះ ដោយប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ យើងបាន

$$\lim_{x \to 0^{+}} x \ln x = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{1/x}{-1/x^{2}} = \lim_{x \to 0^{+}} (-x) = 0$$



រូបទី 5

សម្គាល់ៈ ក្នុងការដោះស្រាយឧទាហរណ៍ទី 6 ជម្រើសដែលអាចធ្វើបានផ្សេងទៀតនឹងត្រូវបានសរសេរទៅជា $\lim_{x \to 0^{+}} x \ln x = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{x}{1/\ln x}$

វាឱ្យជារាងមិនកំណត់ប្រភេទ $0/0$ ប៉ុន្តែបើយើងប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ យើងនឹងទទួលបានការបង្ហាញដែលពិបាកជាងវិធីដែលយើងប្រើមុនដំបូង។ ជាទូទៅ នៅពេលដែលយើងសរសេរម្តងទៀតនូវផលគុណដែលមិនអាចកំណត់បាន យើងត្រូវព្យាយាមជ្រើសរើសជម្រើសដែលអាចនាំយើងទៅកាន់លីមីតដែលងាយជាងនេះបាន។

ផលដកដែលមិនអាចកំណត់បាន (Indeterminate Differences)

បើ $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ ហើយ $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ នោះលីមីត $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$ ត្រូវបានគេហៅថា រាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\infty - \infty$ ។ ម្តងទៀតហើយ គឺមានការប្រយុទ្ធមួយរវាង f និង g ។ តើចម្លើយនឹងស្មើ ∞ (f ឈ្នះ) ឬស្មើ $-\infty$ (g ឈ្នះ) ឬពួកគេនឹងធ្វើការសម្របសម្រួលលើចំនួនកំណត់មួយ? ដើម្បីស្វែងរកការពិត យើងព្យាយាមបម្លែងពីផលដកឱ្យទៅជាផលធៀប (ឧទាហរណ៍ៈ ដោយប្រើការតម្រូវភាគបែង ឬសនិទានកម្ម ឬដាក់កន្សោមដែលដូចគ្នាជាកត្តា) ដូច្នេះហើយ យើងបានរាងមិនកំណត់ប្រភេទ $\frac{0}{0}$ ឬ ∞/∞ ។

ឧទាហរណ៍ទី 7 : គណនា $\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)$ ។

ចម្លើយ: ដំបូងត្រូវចំណាំថា $\sec x\to\infty$ ហើយ $\tan x\to\infty$ ពេល $x\to(\pi/2)^-$ ដូច្នេះលីមីតនេះមិនអាចកំណត់បានទេ។ ឥឡូវយើងប្រើការតម្រូវភាគបែង:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

ចំណាំថា ការប្រើប្រាស់ច្បាប់ឡូពីតាល់គឺសមហេតុផល ពីព្រោះ $1-\sin x\to 0$ ហើយ $\cos x\to 0$ ពេល $x\to(\pi/2)^-$ ។

ស្វ័យគុណដែលមិនអាចកំណត់បាន (Indeterminate Powers)

រាងមិនកំណត់មួយចំនួនកើតឡើងពីលីមីត $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$

1. $\lim_{x\to a}f(x)=0$ ហើយ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ ប្រភេទ 0^0

2. $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ ហើយ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ ប្រភេទ ∞^0

3. $\lim_{x\to a}f(x)=1$ ហើយ $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ ប្រភេទ 1^∞

ករណីទាំងបីនីមួយៗអាចត្រូវបានពិភាក្សាដោយយកតាមឡូការីតធម្មជាតិ (natural logarithm) :

តាង $y=[f(x)]^{g(x)}$ នោះ $\ln y=g(x)\ln f(x)$

ឬដោយសរសេរជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល: $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

(រំឭកឡើងវិញថា វិធីទាំងពីរនេះត្រូវបានប្រើក្នុងការដេរីវេអនុគមន៍ប្រភេទនេះ។) ក្នុងវិធីនេះដែរ យើងទទួលបានផលគុណដែលមិនកំណត់ $g(x)\ln f(x)$ ដែលជាប្រភេទ $0\cdot\infty$ ។

ឧទាហរណ៍ទី 8 : គណនា $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$ ។

ចម្លើយ: ដំបូងត្រូវចំណាំថា ពេល $x\to 0^+$ យើងបាន $1+\sin 4x\to 1$ ហើយ $\cot x\to\infty$ ដូច្នេះលីមីតដែលគេឱ្យ គឺមិនអាចកំណត់បានទេ។ តាង $y=(1+\sin 4x)^{\cot x}$

នោះ $\ln y=\ln\left[(1+\sin 4x)^{\cot x}\right]=\cot x\ln(1+\sin 4x)$ ដូច្នេះ ដោយប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ នោះ

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

ឥឡូវនេះយើងបានគណនាលីមីតនៃ $\ln y$ រួចមកហើយ ប៉ុន្តែយើងអ្វីដែលយើងចង់បានគឺលីមីតនៃ y ។ ដើម្បីរកលីមីតនេះបាន យើងប្រើការពិតមួយដែល $y = e^{\ln y}$:

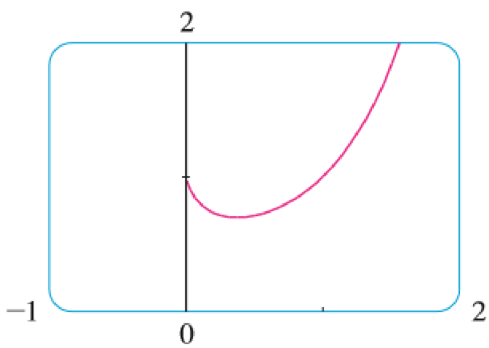
$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

ឧទាហរណ៍ទី 9 : រក $\lim_{x\to 0^+} x^x$ ។

ចម្លើយ: ចំណាំថាលីមីតនេះមិនអាចកំណត់បានទេ ដោយសារតែ $o^x = 0$ ចំពោះ $x > 0$ ប៉ុន្តែ $x^0 = 1$ ចំពោះ $x \neq 0$ ។ យើងអាចបន្តធ្វើដូចឧទាហរណ៍ទី 8 ឬដោយសរសេរជាអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល: $x^x = \left(e^{\ln x}\right)^x = e^{x\ln x}$

ក្នុងឧទាហរណ៍ទី 6 យើងបានប្រើច្បាប់ឡូពីតាល់ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ ។



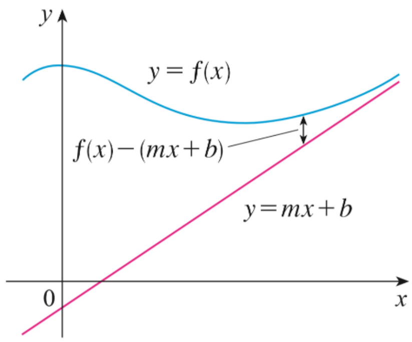
រូបទី 6

២.៥. អាស៊ីមតូតទ្រេត

ក្រាបមួយចំនួនមានអាស៊ីមតូតទ្រេតគ្មានអាស៊ីមតូតដេកនិងអាស៊ីមតូតឈរនោះទេ ។ ប្រសិនបើ $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$ នោះបន្ទាត់ $y = mx + b$ ហៅថាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f

ព្រោះចម្ងាយរវាងក្រាបតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ទៅនឹងបន្ទាត់ $y=mx+b$ មានតម្លៃប្រហាក់ប្រហែលនឹងសូន្យដូចរូប។

(តម្លៃប្រហែលកាលណាយើងឲ្យតម្លៃ $x\to\infty$) ។



ចំពោះអនុគមន៍សិទានមានអាស៊ីមតូតទ្រេតកាលណាដឺក្រេនៅភាគយកធំជាងដឺក្រេនៅភាគបែងចំនួនមួយលេខ។ ដូចនៅក្នុងករណីសមីការអាស៊ីមតូតទ្រេត យើងអាចរកឃើញដោយការចែកពហុធា (យកភាគយកចែកឲ្យភាគបែង) ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ៦</u> : ចូរគូសក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គូសក្រាបតាងអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

A. ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺ $D=\mathbb{R}$ ។

B. អនុគមន៍ f កាត់ត្រង់គល់តម្រុយ $O(0\,,0)$ ។

C. ដោយ $f(-x)=-f(x)$ នោះ f គឺជាអនុគមន៍សេស ហើយក្រាបរបស់វាមានផ្ចិតឆ្លុះត្រង់គល់តម្រុយ។

D. ដោយ $x^2+1\neq 0$ នោះក្រាបតាងអនុគមន៍ f មិនមានអាស៊ីមតូតឈរទេ ។ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ នោះក្រាបតាងអនុគមន៍ f មិនមានអាស៊ីមតូតដេកនោះទេ ប៉ុន្តែបើយើងធ្វើការចែកពហុធាដូចខាងក្រោម

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x^3+x-x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{x}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)=0$$

ដូចនេះ $\boxed{\text{បន្ទាត់ } y=x \text{ គឺជាអាស៊ីមតូតទ្រេតនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ } f}$

E. យើងមាន $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^3\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3x^2\left(x^2+1\right)-2x\left(x^3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

ដោយ $f'(x)>0\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ នោះ f ជាអនុគមន៍កើនលើ$\mathbb{R}$

F. បើទោះបីជា $f'(0)=0$ តែ f មិនប្តូរសញ្ញាត្រង់ $x=0$ នោះអនុគមន៍ f គ្មានតម្លៃបរមាធៀប នោះទេ ។

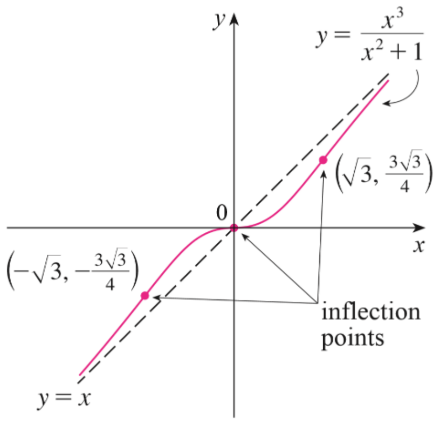
G. យើងមាន $f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{\left(x^4+3x^2\right)'\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)\left(x^4+3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

ដោយ $f''(0)=0\ ,\ f''\left(-\sqrt{3}\right)=0\ ,\ f''\left(\sqrt{3}\right)=0$ គេបានតារាងសញ្ញាដូចខាងក្រោម

Interval	x	$3-x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x<-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CU on $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$
$-\sqrt{3}<x<0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CD on $\left(-\sqrt{3},0\right)$
$0<x<\sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CU on $\left(0,\sqrt{3}\right)$
$x>\sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CD on $\left(\sqrt{3},\infty\right)$

ដូចនេះ $\boxed{\text{ចំណុចរបត់នៃក្រាបគឺ}\,(0\,,0)\,,\left(-\sqrt{3}\,,-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right),\left(\sqrt{3}\,,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$



២.៦. ក្រាហ្វ និងការគណនា

វិធីសង់ក្រាបដែលមាននៅក្នុងមេរៀនខាងលើ គឺមានកម្រិតខ្ពស់សម្រាប់ការសិក្សាមេរៀនគណិតគណនារបស់យើង។ ក្រាបគឺជាចំណុចចុងក្រោយដែលត្រូវធ្វើនិងគូស។ ឥលូវចាប់ផ្តើមដោយការសង់ក្រាបជាមួយនឹងការគណនាដោយម៉ាស៊ីនឬដោយកុំព្យូទ័រហើយបន្ទាប់មកយើងកែច្នៃវាឡើងវិញឲ្យបានស្អាត។ យើងប្រើការគណនាដើម្បីឲ្យបានដឹងអំពីអ្វីសំខាន់ដែលមាននៅក្នុងក្រាបនោះ។ ហើយការប្រើប្រាស់ក្រាបយើងអាចបកស្រាយក្រាបមានលក្ខណៈស្មុគ្រស្មាញដោយមិនប្រើបច្ចេកវិទ្យា។

<u>ឧទាហរណ៍ទី១</u> : ក្រាបនៃអនុគមន៍ពហុធា $f(x)=2x^6+4x^5+3x^3-2x^2$ ។ ប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ដេរីវេ f' និង f'' ដើម្បីរកចំណុចបរមាធៀបនិងចំណុចរបត់នៃខ្សែកោង។

<u>ដំណោះស្រាយ</u> : ប្រសិនបើយើងកំណត់ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ ក្រាបជាច្រើននឹងអាចធ្វើការសន្និដ្ឋានបាននូវតម្លៃមួយពីតម្លៃដែលបានគណនានោះ ។រូបភាពទី១ បង្ហាញពីចំណុចតូចៗ from one such device ប្រសិនបើយើងកំណត់យក $-5\le x\le 5$ ។ បើទោះបីជាviewing rectangle គឺសំខាន់សម្រាបការបង្ហាញថាអាស៊ីមតូតគឺដូចទៅនឹងអនុគមន៍ $y=2x^6$ ក៏ដោយ វាគឺបានលាក់នូវព័ត៌មានមួយចំនួន។ ដូចនេះយើងប្តូរផ្ទៃ $[-3\,,2]$ ដោយដាក់ $[-50\,,100]$ ដូចនបានបង្ហាញក្នុងរូបភាពទី 2 ។

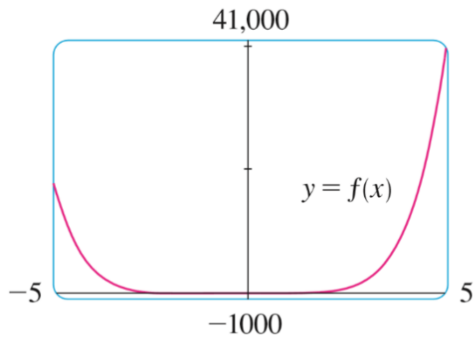


FIGURE 1

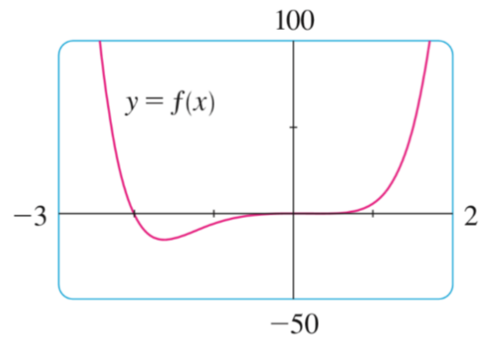
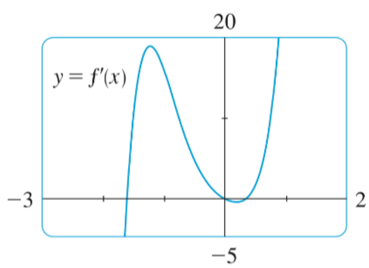
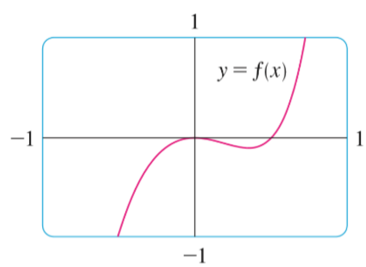


FIGURE 2

តាមរយៈក្រាបនេះវាបានបង្ហាញថាមានតម្លៃអប្បបរមាមួយត្រង់ចំណុច $(-15.33\,,-1.62)$ ហើយអនុគមន៍ f ចុះពីលើចន្លោះ $(-\infty\,,-1.62)$ និងកើនលើចន្លោះ $(-1.62\,,+\infty)$ ។វាក៏បានបង្ហាញអំពីបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនៅត្រង់ចំណុច $x=0$ ហើយដែល x នៅចន្លោះពី -2 និង -1 ។

ឥលូវយើងបញ្ជាក់បានដោយការគណនា យើងបានអនុគមន៍ $f'(x)=12x^5+15x^4+9x^2-4x$ និង $f''(x)=60x^4+60x^3+18x-4$ ។ នៅក្នុងរូបភាពទី៣ យើងឃើញថាក្រាបនៃអនុគមន៍ $f'(x)$ ប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមាននៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=-1.62$ ជាតម្លៃអប្បបរមាដែលយើងបានរកឃើញខាងលើ។ ប៉ុន្តែយើងគួរតែកត់ចំណាំមើលថា ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x=0$ និងប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x=0.35$ ។មានន័យថាអនុគមន៍ f មានចំណុចអតិបរមាត្រង់ $x=0$ និងចំណុចអប្បបរមាត្រង់ $x=0.35$ តែវាបានលាក់នៅក្នុងរូបភាពទី២។ ប្រសិនបើយើងពង្រីកវាឲ្យដូចនៅក្នុងរូបភាពទី៤ យើងប្រាកដជាឃើញថាចំណុចអតិបរមាមាននៅត្រង់ $x=0$ និងចំណុចអប្បបរមាមាននៅត្រង់ $x=0.35$ ។

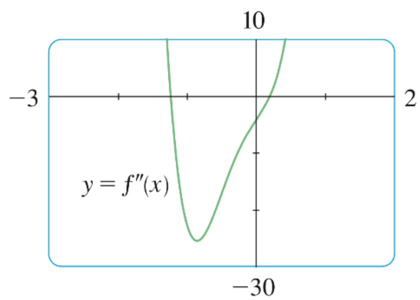




តើចំណុចផតនិងចំណុចដែលពត់មានន័យដូចម្តេច? នៅក្នុងរូបភាពទី ២ និងទី ៤ មានចំណុចរបត់នៅពេលដែល x មានខិតទៅខាងឆ្វេងនៃ -1 និងនៅពេលដែល x មានតម្លៃខិតទៅខាងស្តាំ

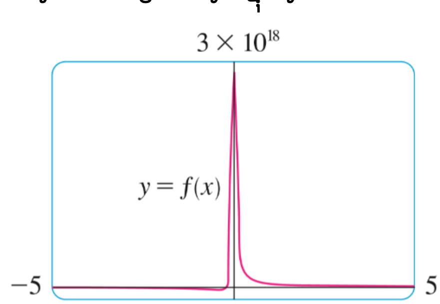
នៃ 0 ។ប៉ុន្តែយើងពិបាកក្នុងការកំណត់ចំណុចរបត់នៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ណាស់។ នោះយើងត្រូវសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ដេរីវេទី២ $f''(x)$ ដូចក្នុងរូបភាពទី ៥ ។ យើងឃើញថាក្រាបនៃអនុគមន៍ដេរីវេទី ២ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x \approx -1.23$ និងប្តូរពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x \approx 0.19$ ។So, correct to two decimal place, ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ផតឡើងលើលើ $(-\infty\,,-1.23)$ និង $(0.19\,,+\infty)$ ហើយផងចុះក្រោមលើ $(-1.23\,,0.19)$ ។ ចំណុចរបត់ $(-1.24\,,-10.18)$ និង $(0.19\,,-0.05)$ ។

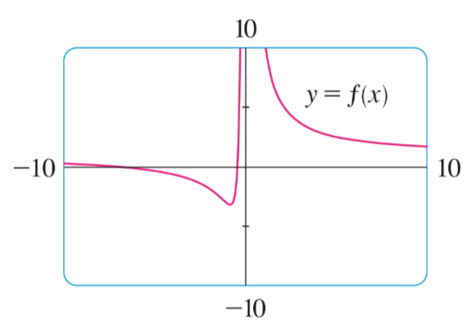
យើងបានរកឃើញថាគ្មានក្រាបមួយណាបង្ហាញអំពីចំណុចសំខាន់ៗតែម្តងបាននោះទេចំពោះអនុគមន៍ពហុធា។ ប៉ុន្តែនៅក្នុងរូបភាពទី ២ និងទី ៤ នៅពេលដែលសរុបចូលគ្នា យើងអាចបែងចែកបាននូវចំណុចដែលសំខាន់និងពិតប្រាកដ។



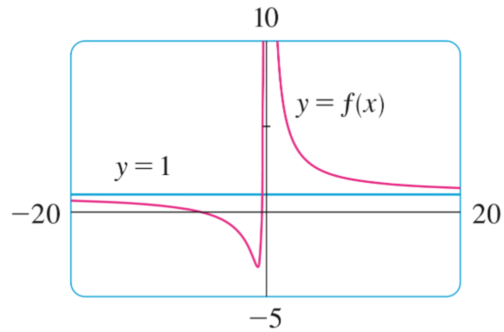
<u>ឧទាហរណ៍ទី២</u> : គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x^2+7x+3}{x^2}$ ។ កំណត់តម្លៃប្រហែលនៃតម្លៃអតិបរមានិងតម្លៃអប្បបរមានៅចម្លោះកន្លែងដែលផត។ បន្ទាប់មកប្រើការគណនាដើម្បីរកតម្លៃពិតប្រាកដ។

<u>ដំណោះស្រាយ</u> : នៅក្នុងរូបភាពទី៦ ការគូសដោយកុំព្យូទ័រដោយមានការក្រិតដោយស្វ័យប្រវត្តិ គឺជា disaster ។ ម៉ាស៊ីនគូសក្រាបមួយចំនួនប្រើ$[-10\,,10]$ ដោយ $[-10\,,10]$ ដូចបង្ហាញក្នុងរូបភាព។ យើងអាចគូសបានក្រាបដូចក្នុងរូបភាពទី៧។



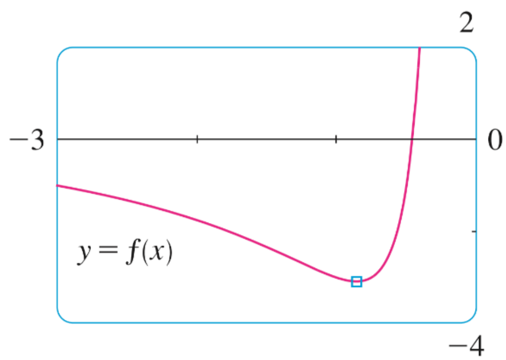


អ័ក្ស y ក្លាយទៅជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបគឺដោយសារតែ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+7x+3}{x^2}$ ។ នៅក្នុងរូបភាពទី៧ ក៏បានឲ្យយើងបានដឹងថាការប៉ាន់ប្រមាណតម្លៃនៃ x ដែលត្រូវបានស្កាត់ប្រហែលជាចន្លោះ -0.5 ទៅ -6.5 ។ តម្លៃពិតប្រាកដដែលយើងអាចរកបានដោយការប្រើរូបមន្តសមីការដឺក្រេទី២ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $x^2+7x+3=0$ យើងបានតម្លៃ $x=\frac{-7\pm\sqrt{37}}{2}$ ។



ដើម្បីឲ្យអាស៊ីមតូតមានលក្ខណៈល្អប្រសើរនិងងាយស្រួលមើលជាងមុន យើងប្តូរ viewing rectangle $[-20, 20]$ ត្រឹម $[-5, 10]$ នៅក្នុងរូបភាពទី៨។ វាបានបញ្ជាក់ថា $y=1$ គឺជាអាស៊ីមតូតដេក និងយើងអាចសរសេរបានថា $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+7x+3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$ ។

ដើម្បីប៉ាន់ប្រមាណដឹងអំពីតម្លៃអប្បបរមាដែលយើងបានពង្រីកនៅផ្ទៃរបស់វាមើល $[-3, 0]$ ដល់ $[-4, 2]$ នៅក្នុងរូបភាពទី៩។



ចំណុចបានចង្អុរបង្ហាញថាតម្លៃប្រហែលនៃតម្លៃអប្បបរមាប្រហែល -3.1 នៅពេលដែល $x\approx -0.9$ ហើយយើងបានឃើញថាអនុគមន៍កើនឡើងចន្លោះ $(-\infty, -0.9)$ និង $(0, +\infty)$ ហើយចុះ

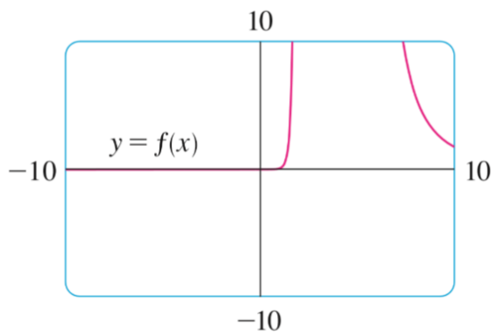
លើចន្លោះ $(-0.9\,,0)$ ។ តម្លៃពិតប្រាកដត្រូវបានញែកឲ្យបានច្បាស់លាសដោយ $f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x+6}{x^3}$ ។

វាបានបង្ហាញថា $f'(x) > 0$ ពេលដែល $-\frac{6}{7} < x < 0$ និង $f'(x) < 0$ នៅពេលដែល $x < -\frac{6}{7}$ និងនៅពេលដែល $x > 0$។ តម្លៃអប្បបរមាពិតប្រាកដគឺ $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$ ។

រូបភាពទី៩ បង្ហាញថាចំណុចរបត់មាននៅត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x = -1$ និង $x = -2$ ។ យើងអាចប៉ាន់ស្មានមើលថាវានៅក្នុងក្រាបដោយការប្រើដេរីវេទី២ ប៉ុន្តែនៅក្នុងករណីវាងាយស្រួលក្នុងការរកតម្លៃពិតប្រាកដ។ ដូចនេះ $f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x+9)}{x^4}$ ។ យើងឃើញថា $f''(x) > 0$ នៅពេលដែល $x > -\frac{9}{7}$ ដែល $x \neq 0$ ។ ដូចនេះ f គឺជាអនុគមន៍កើននៅលើចន្លោះ $\left(-\frac{9}{7}\,,0\right)$ និង $(0\,,+\infty)$ ហើយក្រាបចុះលើចន្លោះ $\left(-\infty\,,-\frac{9}{7}\right)$ ។ ចំណុចរបត់គឺ $\left(-\frac{9}{7}\,,-\frac{71}{27}\right)$ ។ ដេរីវេទី១បង្ហាញថា រូបភាពទី ៨ បង្ហាញពីចំណុចដែលសំខាន់ដែលមាននៅក្នុងក្រាបនៃអនុគមន៍ ។

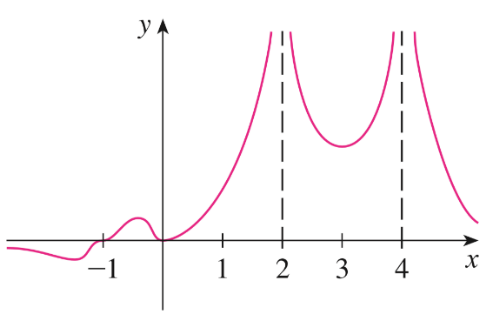
ឧទាហរណ៍ទី៣ : ចូរសង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$ ។

ដំណោះស្រាយ : គូសខ្សែនៃអនុគមន៍ផ្សេងៗដែលយើងបានរកឃើញនៅក្នុងក្រាបនៃអនុគមន៍ដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ទី២ ដោយចាប់ផ្តើមគូសក្រាបតាងអនុគមន៍ f ក្នុងផ្ទៃចន្លោះ $[-10\,,10]$ ដោយ $[-10\,,10]$។ នៅក្នុងរូបភាពទី១០ យើងដឹងថា យើងអាចពង្រីកដើម្បីឲ្យបានដឹងអំពីព័ត៌មានឲ្យបានច្បាស់ជាងមុននិងរូបភាពធំជាងមុន។ ដោយកត្តា $(x-2)^2$ និង $(x-4)^4$ គឺជាភាគបែង នោះយើងទាញបាន $x = 2$ និង $x = 4$ គឺជាអាស៊ីមតូតឈរនៃក្រាបតាងអនុគមន៍ f ។ដោយគេបាន $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$ និង $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty$ ។

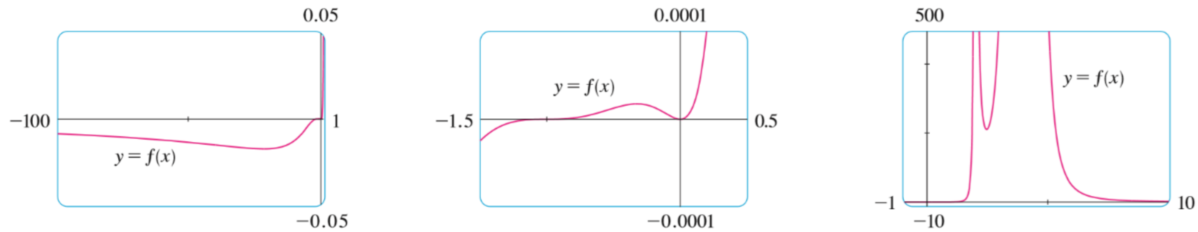


ដើម្បីរកអាស៊ីមតូតដេកបានគេត្រូវចែកកត្តាភាគបែងនឹង x^6 ។

គេបាន
$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\frac{x^2}{x^3}\cdot\frac{(x+1)^3}{x^3}}{\frac{(x-2)^2}{x^2}\cdot\frac{(x-4)^4}{x^4}} = \frac{\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^4}$$
។ នេះបានបង្ហាញថា $f(x)\to 0$ នៅពេលដែល $x\to\pm\infty$ ដូចនេះអ័ក្សអាប់ស៊ីសគឺជាអាស៊ីមតូតដេក។ វាក៏អាចចាត់ទុកជា behavior of the graph near the x-intercepts using an analysis like that in Example 12 in Section 2.6 ។ ដោយ x^2 មានតម្លៃវិជ្ជមាន $f(x)$ មិនប្តូរសញ្ញានៅត្រង់ 0 និង ក្រាបរបស់វាមិនកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ 0 នោះទេ។ ប៉ុន្តែដោយសារតែកត្តា $(x+1)^3$ បានធ្វើឲ្យក្រាបកាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ $x=-1$ ហើយមានបន្ទាត់ប៉ះជាបន្ទាត់ដេកនៅត្រង់នោះ។ ដាក់អ្វីដែលមានទាំងអស់នៅជាមួយគ្នាប៉ុន្តែដោយគ្មានដេរីវេយើងឃើញថាក្រាបមានលក្ខណៈដូចទៅនឹងរូបភាពទី ១១ ។



ឥលូវយើងដឹងថាអ្វីដែលត្រូវរក យើងពង្រួមវាជាច្រើនដង ដើម្បីបង្កើតបានដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១២ និងទី១៣ ហើយពង្រីកវាឲ្យបានដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១៤។



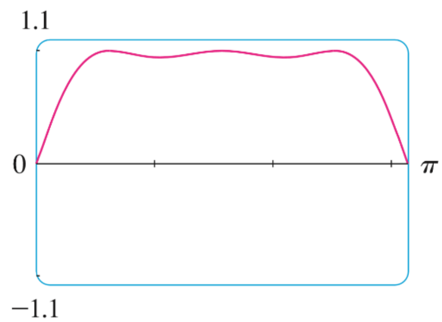
យើងអាចមើលលើក្រាបទាំងនេះ តម្លៃអប្បបរមាគឺ -0.02 នៅពេលដែល $x \approx -20$ ។មានតម្លៃអតិបរមាប្រហែល 0.00002 នៅពេលដែល $x \approx -0.3$ ហើយតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ប្រហែល 211 នៅពេលដែល $x \approx 2.5$ ។ ក្រាបទាំងនេះបានបង្ហាញថាចំណុចរបត់ទាំងបីនៅក្បែរតម្លៃ $-35, -5$ និង -1 ហើយពីរនៅចន្លោះ -1 និង 0 ។ដើម្បីរកចំណុចរបត់ឲ្យបានជាក់លាក់យើងត្រូវធ្វើការដេរីវេទី២ទៅលើអនុគមន៍ f ។

យើងអាចមើលឃើញថា ចំពោះអនុគមន៍នេះ មានក្រាបចំនួនបី គឺ រូបភាពទី ១២ , ១៣ និង ១៤ គឺមានភាពចាំបាច់ដើម្បីបង្ហាញឲ្យឃើញពីព័ត៌មានដែលសំខាន់ៗបាន។ វិធីតែមួយគត់ដើម្បីបង្ហាញពីលក្ខណៈនៃអនុគមន៍នៅលើក្រាបតែមួយ គឺគូសវាដោយដៃរបស់យើងផ្ទាល់។ ថ្វីបើមានការបកស្រាយទៅមានការខុសឆ្គងឬក៏ពន្លើស រូបភាពទី ១១មានការបកស្រាយនូវចំណុចដែលត្រូវការជាចាំបាច់ចំពោះអនុគមន៍រួចជាស្រេចហើយ។

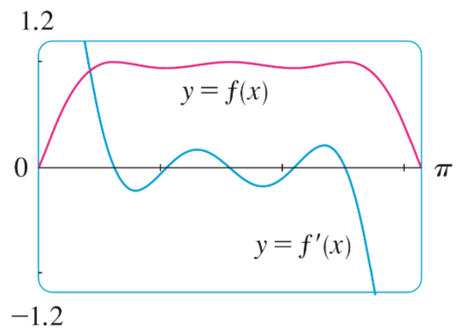
<u>**ឧទាហរណ៍ទី៤**</u> : សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x) = \sin\left(x + \sin 2x\right)$ ។ ចំពោះ $0 \le x \le \pi$ កំណត់តម្លៃអតិបរមានិងតម្លៃអប្បបរមា ចន្លោះដែលធ្វើឲ្យអនុគមន៍កើននិងចុះ និងចំណុចរបត់នៃអនុគមន៍។

ដំណោះស្រាយ

យើងបានកត់ចំណាំបានថា f គឺប្រហែល 2π ។ f ក៏ជាអនុគមន៍សេសហើយ $|f(x)| \le 1$ គ្រប់តម្លៃនៃ x ។ ដូចនេះ ជម្រើសនៃ viewing rectangle គឺមិនមែនជាបញ្ហាសម្រាប់អនុគមន៍នេះនោះទេ។ យើងចាប់ផ្តើមពីចំណុច $[0, \pi]$ ដល់ $[-1.1, 1.1]$ ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១៥។



វាបានបង្ហាញថាមានចំណុចអតិបរមាបីនិងចំណុចអប្បបរមាចំនួនពីរ។ ដើម្បីបញ្ជាក់ឲ្យបានត្រឹមត្រូវយើងអាចគណនា $f'(x)=\cos\left(x+\sin 2x\right)\left(1+2\cos 2x\right)$ និងទាំងក្រាប f និង f' ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១៦។



ប្រើការ Zoom in និងធ្វើការតេស្តដេរីវេទី១ យើងអាចស្វែងរកតម្លៃប្រហែលដូចខាងក្រោម៖

កើនលើចន្លោះ $(0, 0.6)$, $(1 , 1.6)$, $(2.1 , 2.5)$

ចុះលើចន្លោះ $(0.6 , 1)$, $(1.6 , 2.1)$, $(2.5 , \pi)$

ចំណុចតម្លៃអតិបរមាគឺ $f(0.6)\approx 1$, $f(1.6)\approx 1$, $f(2.5)\approx 1$

ចំណុចតម្លៃអប្បបរមាគឺ $f(1)\approx 0.94$, $f(2.1)\approx 0.94$

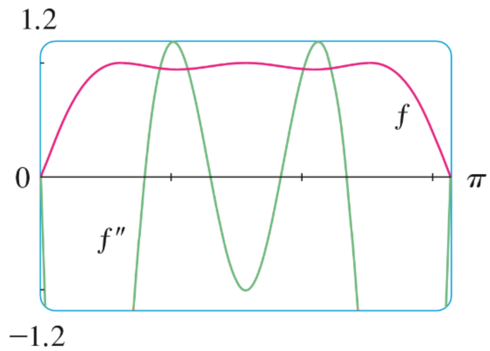
ដេរីវេទី២គឺ $f''(x)=-(1+2\cos 2x)^2\sin\left(x+\sin 2x\right)-4\sin 2x\cos\left(x+\sin 2x\right)$

ក្រាបនៃអនុគមន៍ f និង f'' ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១៧ យើងទទួលបានតម្លៃប្រហែលដូចខាងក្រោម៖

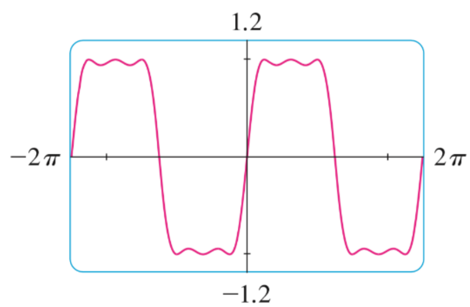
Concave upward on $(0.8 , 1.3)$, $(1.8 , 2.3)$

Concave downward on $(0\,,\,0.8)\,,\,(1.3\,,\,1.8)\,,\,(2.3\,,\,\pi)$

ចំណុចរបត់គឺ $(0\,,\,0)\,,\,(0.8\,,\,0.97)\,,\,(1.8\,,\,0.97)\,,\,(2.3\,,\,0.97)$



មកត្រួតពិនិត្យមើលលើរូបភាពទី១៥ ក៏បានបង្ហាញពីអនុគមន៍ f ដែលត្រូវនឹង $0 \le x \le \pi$, យើងអាច State ដែលលាតសន្ធឹងក្រាបនៅក្នុងរូបភាពទី១៨ ដែលបង្ហាញអនុគមន៍ f លើចន្លោះ $-2\pi \le x \le 2\pi$ ។



<u>ឧទាហរណ៍ទី៥</u> : តើក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+c}$ ប្រែប្រួលដូចម្តេចទៅតាមតម្លៃនៃ c ?

ដំណោះស្រាយ

ក្រាបនៃអនុគមន៍នៅក្នុងរូបភាពទី19 និង 20 ករណីពិសេស $c=2$ និង $c=-2$ បង្ហាញពីភាពខុសគ្នានៃខ្សែកោង។មុនពេលគូសខ្សែកោងផ្សេងទៀត មើលខ្សែកោងមួយណាដែលមាននៅក្នុងចំណុចនេះ។ ដោយ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+c}=0$ ។ ចំពោះតម្លៃផ្សេងទៀត វានៅអ័ក្សអាប់ស៊ីសដូចនឹងអាស៊ីមតូតដេកផងដែរ។ អាស៊ីមតូតឈរនិងកើតមានកាលណា $x^2+2x+c=0$ ។ ការដោះស្រាយសមីការនេះ យើងយក $x=-1\pm\sqrt{1-c}$ ។ ក្រាបនៃអនុគមន៍មានអាស៊ីមតូតឈរ $x=-1$ នៅពេលដែល $c=1$ ពីព្រោះ

$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2+2x+1}=\infty$ ។ នៅពេលដែល $c<1$ មានអាស៊ីមតូតឈរពីរដែល $x=-1\pm\sqrt{1-c}$ ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី២០។ ឥលូវយើងក្រឡេកមើលដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f'(x)=-\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+c\right)^2}$ ។ នេះបានបង្ហាញថា $f'(x)=0$ នៅពេលដែល $x=-1$ ប្រសិនបើ $x\neq 1$ $f'(x)>0$ នៅពេលដែល $x<-1$ហើយ $f'(x)<0$ នៅពេលដែល $x>-1$ ។ចំពោះ $c\geq 1$ មានន័យថា f កើននៅលើចន្លោះ $(-\infty\,,\,-1)$ ហើយចុះលើចន្លោះ $(-1\,,\,\infty)$ ។ ចំពោះ $c>1$ មានតម្លៃអតិបរមានិងចំណុចប្រសព្វនៃចន្លោះកើននិងចុះគឺអាស៊ីមតូតឈរ។

នៅក្នុងរូបភាពទី២១ គឺជា Slide show បង្ហាញអំពីសមាជិកចំនួន៥នៃគ្រួសារខ្សែកោង ក្រាបទាំងអស់នៅក្នុង viewing rectangle $[-5\,,\,4]$ by $[-2\,,\,2]$ ។ $c=1$ គឺជាតម្លៃដែលមានការផ្លាស់ប្តូរទីកន្លែងពីអាស៊ីមតូតឈរទៅមួយទៀត។

២.៧. ចំណោទបរមា(Optimization Problems)

ជំហាននៃការដោះស្រាយលំហាត់ឲ្យមានភាពល្អប្រសើរនិងត្រឹមត្រូវ

១. ស្វែងយល់ឲ្យបានយល់អំពីលំហាត់

ជាជំហានដំបូងគឺត្រូវអានប្រធានលំហាត់យ៉ាងប្រុងប្រយ័ត្នរហូតមានការយល់បានច្បាស់លាស់។ សួរខ្លួនឯង អ្វីដែលមិនទាន់យល់ច្បាស់? តើចំនួនអ្វីខ្លះដែលបានឲ្យ? តើគេឲ្យលក្ខខណ្ឌអ្វីខ្លះ?

២. ការគូសដ្យាក្រាម

នៅក្នុងលំហាត់ភាគច្រើន វាមានសារៈសំខាន់ខ្លាំងណាស់ក្នុងការគូសដ្យាក្រាមនិងកំណត់សម្គាល់អ្វីដែលប្រធានលំហាត់បានផ្តល់ឲ្យនិងតម្រូវការចំនួននៅក្នុងដ្យាក្រាម។

៣. ការកត់ចំណាំទុក

ការកត់ចំណាំទុកនូវសញ្ញាចំនួនដែលមានតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមាដែលត្រូវបានហៅថា Q ។ ហើយក៏ត្រូវកត់ចំណាំទុកនូវសញ្ញាមួយចំនួនទៀតដូចជា $(a\,,\,b\,,\,c\,,\,...\,,\,x\,,\,y)$ ចំពោះចំនួនផ្សេងទៀតដែលមិនបានដឹងនិងដ្យាក្រាមដែលមានសញ្ញាទាំងនេះ។ វាអាចប្រើដំបូងដូចនៅក្នុងឧទាហរណ៍ A គឺផ្ទៃក្រឡា h គឺកម្ពស់ t គឺពេលវេលា។

៤. បញ្ជាក់ Q នៅក្នុងផ្នែកនៃសញ្ញានៅក្នុងជំហានទី៣។

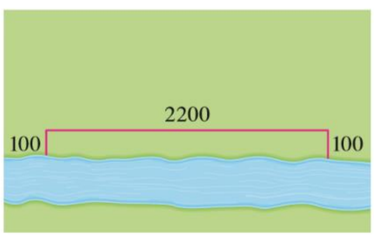
៥. ប្រសិនបើ Q ត្រូវបានបញ្ជាក់ដូចអនុគមន៍មួយក្នុងចំណោមជាច្រើននៅក្នុងជំហានទី៤ ប្រើព័ត៌មានដែលឲ្យដើម្បីរកអ្វីដែលមានការទាក់ទងគ្នាក្នុងចំណោម variables ទាំងនេះ។ បន្ទាប់មកប្រើសមីការទាំងនេះដើម្បីបំបាត់ទាំងអស់។ ហេតុដូចនេះ Q និងត្រូវបានបញ្ជាក់ដូចអនុគមន៍នៃ x ។ យើងអាចសរសេរបានថា $Q=f(x)$ ។ សរសេរដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះ។

៦. ប្រើវិធីសាស្រ្តនៅក្នុងចំណុចទី 4.1 និង 4.3 ដើម្បីស្វែងរកតម្លៃអតិបរមានិងអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍ f ។ ជាពិសេស ប្រសិនបើដែនកំណត់នៃអនុគមន៍ f គឺត្រូវបានបិទនៅក្នុងចន្លោះ ហើយចន្លោះដែលបានបិតនៅក្នុងវិធីសាស្រ្តនៅក្នុងចំណុច 4.1 ត្រូវបានប្រើប្រាស់។

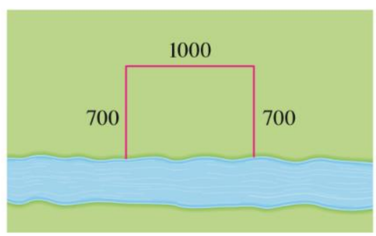
<u>ឧទាហរណ៍ទី ១</u> : កសិករម្នាក់មានរបងព័ទ្ធជុំវិញប្រវែង 2400 ហ្វីត ហើយគាត់ចង់បិទរបងនោះជុំវិញដីស្រែរបស់គាត់ដែលនៅតាមបណ្តោយដងទន្លេ។ គាត់មិនត្រូវការបិទរបងម្ខាងដែលនៅតាមបណ្តោយដងទន្លេនោះទេ។ តើដីស្រែនោះមានទំហំផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតប៉ុន្មាន ?

ដំណោះស្រាយ

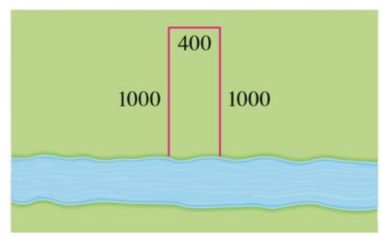
រូបភាពទី១បានបង្ហាញពីវិធីបីយ៉ាងដែលងាយស្រួលធ្វើទៅបាន។



Area = 100 · 2200 = 220,000 ft^2

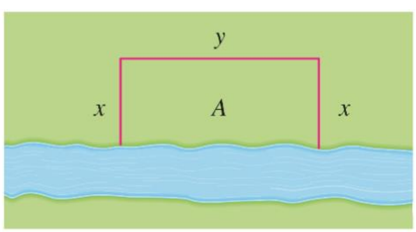


Area = 700 · 1000 = 700,000 ft^2



Area = 1000 · 400 = 400,000 ft^2

យើងបានឃើញថាដីស្រែមានលក្ខណៈដូចជារាក់ពេក ជ្រៅពេក ឬវែងពេកហើយតូច គឺពិបាកក្នុងការកំណត់ផ្ទៃក្រឡា។



នៅក្នុងរូបភាពទី២យើងតាំង A ជាផ្ទៃក្រឡាដែលមានតម្លៃអតិបរមា ហើយយើងអាចតាង x , y គឺជាបណ្តោយនិងទទឹងនៃដីស្រែ

គេបាន $A = xy$

តែ $2x + y = 2400 \Leftrightarrow y = 2400 - 2x$

$\Rightarrow A = x(2400 - 2x) = -2x^2 + 2400x$

ដែល $A < 0$, $x \geq 0$, $x \leq 1200$ នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមាធៀប

$A(x) = 2400x - 2x^2$, $0 \leq x \leq 1200$

ដេរីវេទី១គឺ $A'(x) = 2400 - 4x$

បើ $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2400 - 4x = 0 \Rightarrow x = 600$

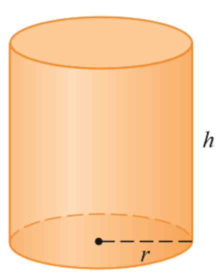
បើ $x = 600 \Rightarrow A(600) = 720\ 000$

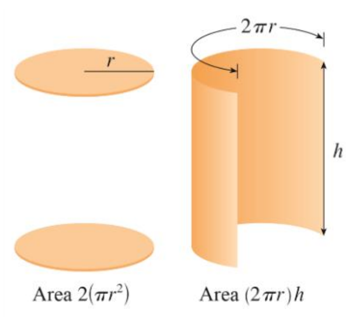
ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាធំបំផុតនៃដីស្រែនោះគឺ $720\ 000\, ft^2$ ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ២</u> : កំប៉ុងមានរាងជាបំពង់មួយដែលត្រូវបានផលិតដើម្បីដាក់ប្រេងចំណុះ $1\,\ell$ ។ រកវិមាត្រនៃកំប៉ុងដែលធ្វើឲ្យការផលិតចំណាយតិចបំផុតទៅលើវត្ថុធាតុដើម។

ដំណោះស្រាយ

យើងគូសបានដូចនៅក្នុងរូបភាពទី៣ដែលមាន r គឺជាកាំនិង h គឺជាកម្ពស់នៃកែវនោះ។ ដើម្បីឲ្យការចំណាយលើវត្ថុធាតុដើមតិចបំផុតទាំងបាតលើក្រោមនិងផ្ទៃខាងទាំងអស់។





នៅក្នុងរូបភាពទី៤ យើងឃើញថាផ្ទៃខាងនៃកំប៉ុងធ្វើឡើងដោយចតុកោណកែងដែលមានបណ្តោយ $2\pi r$ និងកម្ពស់ h ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡានៃកំប៉ុងគឺ $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ដែលគេឲ្យ $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

នោះគេបាន $A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

ដូចនេះ អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡាតូចបំផុតដែលយើងចង់បានគឺ $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, $r > 0$

ដើម្បីរកចំនួនពិតប្រាកដ យើងធ្វើការដេរីវេទៅលើអនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡានេះគេបាន

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\left(\pi r^3 - 500\right)}{r^2}$$

បើ $A'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

បើ $A'(r) > 0 \Leftrightarrow r > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

បើ $A'(r) < 0 \Leftrightarrow r < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

មានន័យថាអនុគមន៍ A កើននៅចន្លោះខាងស្តាំនៃតម្លៃ r និង អនុគមន៍ A ចុះលើចន្លោះខាងឆ្វេងនៃ r

នោះអនុគមន៍មានតម្លៃអប្បបរមាត្រង់ចំណុច $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ ។

មួយទៀត បើ $\lim_{r \to 0^+} A(r) = \infty$, $\lim_{r \to \infty} A(r) = \infty$ នោះច្បាស់ជាមានតម្លៃអប្បបរមាមួយនៅលើអនុគមន៍ $A(r)$ ។

ដូចមាននៅក្នុងរូបភាពទី៥

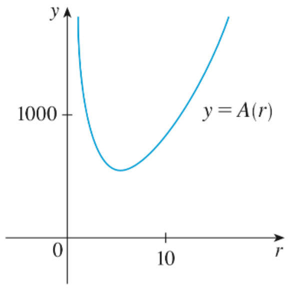


FIGURE 5

យើងអាចទាញបានតម្លៃ h គឺ $h=\frac{1000}{\pi r^2}=\frac{1000}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}}=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}=2r$

ដូចនេះ គេត្រូវការកាំនៃកំប៉ុងគឺ $r=\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}cm$ និងកម្ពស់ $h=2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}cm$

ការធ្វើដេរីវេទី១សម្រាប់កំណត់តម្លៃបរមាធៀប

តាង c គឺជាចំនួនអថេរនៅក្នុងអនុគមន៍ f មួយនៅក្នុងដែនកំណត់គេបាន

១. បើ $f'(x)>0\,,\forall x<c$ និង $f'(x)<0\,,\forall x>c$ នោះ $f(c)$ គឺជាចំណុចអតិបរមាធៀបនៃអនុគ

<u>ឧទាហរណ៍ទី ៣</u> : រកចំណុចស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល $y^2=2x$ ដែលនៅជិតចំណុច $(1\,,4)$ បំផុត។

ដំណោះស្រាយ

ចម្ងាយរវាងចំណុច$(1\,,4)$ និងចំណុច $(x\,,y)$ គឺ $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$

នៅក្នុងរូបភាពទី៦៖ ប៉ុន្តែប្រសិនបើ $(x\,,y)$ ស្ថិតនៅលើប៉ារ៉ាបូល នោះយើងបាន $x=\frac{1}{2}y^2$

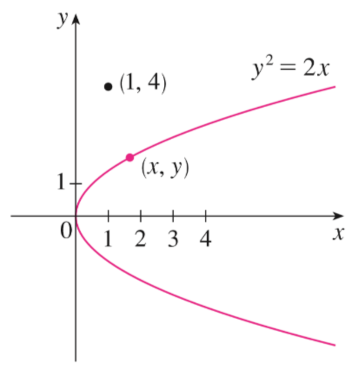
$$\Rightarrow d=\sqrt{\left(\frac{1}{2}y^2-1\right)^2+(y-4)^2}\Leftrightarrow d^2=f(y)=\left(\frac{1}{2}y^2-1\right)^2+(y-4)^2$$

$\Rightarrow f'(y)=2\left(\frac{1}{2}y^2-1\right)y+2(y-4)=y^3-8$ នោះគេបាន $f'(y)=0$ នៅពេលដែល $y=2$

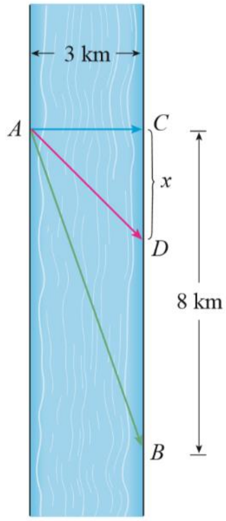
ដោយ $\begin{cases} f'(y)<0\ ,\ y<2 \\ f'(y)>0\ ,\ y>2 \\ f'(y)=0\ ,\ y=2 \end{cases}$ នោះអនុគមន៍ $f(y)$ មានតម្លៃអប្បបរមា

គេបាន $x=\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}(2)^2=2$

ដូចនេះ ចំណុចដែលនៅជិតចំណុច $(1\ ,\ 4)$ គឺ $(2\ ,\ 2)$



<u>**ឧទាហរណ៍ទី ៤**</u> : បុរសម្នាក់បនាដាក់ទូករបស់គាត់នៅត្រង់ចំណុច A នៅច្រាំងម្ខាងនៃទន្លេ ចម្ងាយ ៣គីឡូម៉ែត្រ ហើយគាត់ចង់ទៅដល់ចំណុច B ដែលមានចម្ងាយ ៨គីឡូម៉ែត្រនៅច្រាំងម្ខាងទៀត ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី៧។ គាត់អាច row ទូករបស់គាត់ឆ្លងកាត់ទន្លេដល់ត្រង់ចំណុច C ហើយបន្ទាប់មក run ដល់ចំណុច B ឬគាត់អាច run ទៅដល់ចំណុច B ដោយផ្ទាល់តែម្តងបាន ឬគាត់អាច row ទៅចំណុច D ផ្សេងទៀតដែលនៅចន្លោះត្រង់ចំណុច C និង B ហើយបន្ទាប់មក run ដល់ចំណុច B ។ ប្រសិនបើគាត់ row ក្នុងល្បឿន $6km/h$ និង run ក្នុងល្បឿន $8km/h$ តើគាត់អាចចតនៅកន្លែងត្រង់ចំណុច B ដោយរបៀបណាដែលលឿនបំផុត?



ដំណោះស្រាយ

បើយើងតាង x ជាចម្ងាយពីចំណុច C ទៅចំណុច D នោះចម្ងាយពី D ទៅ B គឺ $|DB| = 8 - x$ ហើយតាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រគេបាន $|AD| = \sqrt{x^2+9}$ យើងប្រើសមីការ $time = \dfrac{distance}{rate}$ ហើយរយៈពេលនៃ *rowing* គឺ

$\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ ហើយរយៈពេលនៃ *runing* គឺ $\dfrac{8-x}{8}$ ដូចនេះ រយៈពេលសរុបគឺ $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \dfrac{8-x}{8}$ ។ ដែនកំណត់នៃអនុគមន៍នេះគឺ T ដែលនៅចន្លោះ $[0\,,8]$ ។ចំណាំថា ប្រសិនបើ $x=0$ គាត់ row ទៅដល់ចំណុច C ហើយប្រសិនបើ $x=8$ គាត់ row ទៅដល់ចំណុច B ដោយផ្ទាល់តែម្តង។ ដេរីវេនៃ T គឺ $T'(x) = \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{8}$ ដូចនេះ ការប្រើប្រាស់ fact ដែល $x \geq 0$ យើងបាន

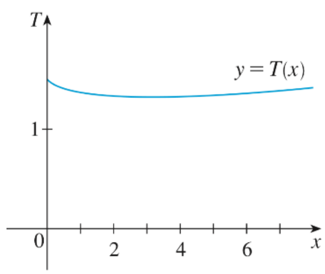
$$\begin{aligned}
T'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\
&\Leftrightarrow 16x = 9\left(x^2+9\right) \Leftrightarrow 7x^2 = 81 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

មានតែតម្លៃនៃ $x=\frac{9}{\sqrt{7}}$ ប៉ុណ្ណោះ។ ដើម្បីឲ្យបានដឹងថាមានចំណុចអប្បបរមានៅត្រង់ចំណុចគ្រប់ x នៅក្នុងដែនកំណត់ $[0,8]$ យើងអាចរកគ្រប់តម្លៃអនុគមន៍ចំពោះតម្លៃនៃ x

$T(0)=1.5$, $T=\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right)=1+\frac{\sqrt{7}}{8}=1.33$, $T(8)=\frac{\sqrt{73}}{6}=1.42$

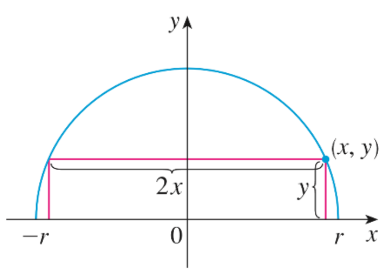
ដោយតម្លៃតូចបំផុតនៃអនុគមន៍ T នៅត្រង់ $x=\frac{9}{\sqrt{7}}$ នោះចំណុចអប្បបរមាធៀបនៃអនុគមន៍នៅត្រង់ចំណុចនេះតែម្តង។ នៅក្នុងរូបភាពទី ៨ បង្ហាញពីក្រាបនៃអនុគមន៍ T ។

ដូចនេះ បុរស់ម្នាក់អាចចុះចតទូកនៅត្រង់ចំណុច $\frac{9}{\sqrt{7}}km=3.4km$ ពីកន្លែងចំណុចចាប់ផ្តើមរបស់គាត់។



<u>ឧទាហរណ៍ទី ៥</u> : រកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងធំបំផុតដែលចារិកក្នុងពាក់កណ្តាលរង្វង់ដែលមានកាំ r ។

ដំណោះស្រាយទី១



សមីការនៃរង្វង់កំណត់ដោយ $x^2+y^2=r^2$ ។ កំពូលទាំងពីររបស់ចតុកោណស្ថិតនៅលើពាក់កណ្តាលនៃរង្វង់ហើយកំពូលពីរទៀតស្ថិតនៅលើអ័ក្សអាប់ស៊ីសដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី៩។

តាង $(x\,,y)$ ជាកំពូលដែលស្ថិតនៅលើរង្វង់។ បន្ទាប់មកចតុកោណប្រវែងបណ្តោយគឺ $2x$ និងប្រវែងទទឹងគឺ y នោះគេបានផ្ទៃក្រឡាគឺ $A=2xy$

ដើម្បីទាញរកតម្លៃនៃ y យើងបាន $x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{r^2-x^2}$

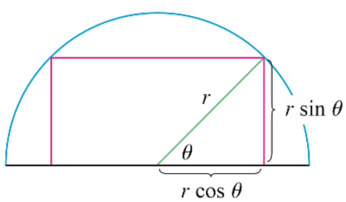
នោះ $A=2x\sqrt{r^2-x^2}$

តែដែនកំណត់នៃអនុគមន៍គឺ $0\le x\le r$

តាមដេរីវេគេបាន $A'=2\sqrt{r^2-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=\dfrac{2\left(r^2-2x^2\right)}{\sqrt{r^2-x^2}}$

បើ $A'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ តម្លៃនៃ x ធ្វើឲ្យអនុគមន៍ A មានតម្លៃអតិបរមាធៀបដែល $A(0)=0\,,\,A(r)=0$ ។ ដូចនេះ ផ្ទៃក្រឡាដែលធំបំផុតនៃចតុកោណគឺ $A\left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{2r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2-\dfrac{r^2}{2}}=r^2$

ដំណោះស្រាយទី២



តាមរូបភាពទី ១០ យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងគឺ $A(\theta)=(2r\cos\theta)(r\sin\theta)=r^2(2\sin\theta\cos\theta)=r^2\sin 2\theta$

យើងបានដឹងថាតម្លៃអតិបរមានៃ $\sin 2\theta$ គឺស្មើនឹង 1 ដូចនេះតម្លៃធំបំផុតនៃផ្ទៃក្រឡាគឺ $A(\theta)=r^2$ ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ៦</u> : ហាងមួយបានលក់ឧបករណ៍ចាក់ស៊ីឌី $Blu-Ray$ អស់ 200 គ្រឿងក្នុងមួយសប្តាហ៍ដែលមួយគ្រឿងមានតម្លៃ $\$350$ ។ ផ្សារមួយបានធ្វើការស្រង់មតិបានឲ្យឃើញថាលុយដែលអាប់ឲ្យអតិថិជនវិញគឺ $\$10$ ក្នុងមួយគ្រឿង ចំនួននៃការលក់នឹងកើនឡើងដល់ 20 ដងក្នុងមួយសប្តាហ៍។ រកអនុគមន៍ តម្រូវការ(demad) និងអនុគមន៍ ប្រាក់ចំណូល(revenue)។ សិក្សាតម្លៃអតិបរមានៃប្រាក់ចំណូល ?

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ x គឺជាចំនួននៃ Blu-ray សម្រាប់ក្នុងការលក់ក្នុងមួយសប្ដាហ៍ ហើយរៀងរាល់សប្ដាហ៍បានកើនឡើងក្នុងការលក់ $x-200$ ។ សម្រាប់ការកើនឡើង ២០ ដងនៃការលក់ តម្លៃបានថយចុះដល់ ១០ដុល្លា។ យើងបានអនុគមន៍ប្រាក់ demand គឺ $p(x)=350-\frac{10}{20}(x-200)=450-\frac{1}{2}x$ ហើយអនុគមន៍ប្រាក់ revenue គឺ $R(x)=xp(x)=450x-\frac{1}{2}x^2$

ដោយ $R'(x)=450-x$ យើងឃើញថា $R'(x)=0$ កាលណា $x=450$ ។ តម្លៃនៃ $x=450$ ធ្វើឲ្យអនុគមន៍មានតម្លៃអតិបរមា។តម្លៃ corresponding គឺ $p(450)=450-\frac{1}{2}(450)=225$ ហើយប្រាក់ចំណេញគឺ $350-225=125$ ។ ដូចនេះ តម្លៃអតិបរមានៃប្រាក់ចំណេញគឺ $\$125$ ។

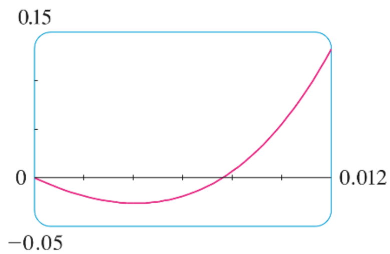
២.៨. វិធីសាស្ត្រញូតុន Newton′s Method

ឧបមាថាអ្នកចែកចាយរថយន្តដើម្បីលក់ឲ្យអ្នកមួយគ្រឿងមានតម្លៃ $\$18000$ ឬមានការបង់រំលោះនូវប្រាក់ 375$ ក្នុងមួយខែសម្រាប់រយៈពេល 5 ឆ្នាំ។ តើអ្នកបានដឹងទេថាអត្រាការប្រាក់ក្នុងមួយខែប៉ុន្មាន? ដើម្បីរកចម្លើយឃើញអ្នកត្រូវដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម

$48x(1+x)^{60}-(1+x)^{60}+1=0$ ។ ព័ត៌មានលំអិតត្រូវបានបង្ហាញនៅក្នុងលំហាត់ទី៤១។ តើអ្នកនឹងដោះស្រាយសមីការយ៉ាងដូចម្ដេចដែរ?

ចំពោះសមីការពហុធា $ax^2+bx+c=0$ មានរូបមន្តដើម្បីដោះស្រាយរកឫសរបស់វាបាន ។ ចំពោះសមីការទី៣ ទី៤ មានរូបមន្តសម្រាប់គណនារកឫសផងដែរ ប៉ុន្តែវាមានភាពស្មុគ្រស្មាញជាងសមីការដឺក្រេទី២ខ្លាំងណាស់។ប៉ុន្តែបើ f ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី៥ឬក៏ខ្ពស់ជាងនេះ មិនមានរូបមន្តដើម្បីធ្វើការដោះស្រាយនោះទេ។ ដូចគ្នានោះដែរ មិនមានរូបមន្តណាមួយដែលអាចធ្វើឲ្យអាចដោះស្រាយបានផងដែរដូចជាសមីការ $\cos x = x$ ជាដើម។

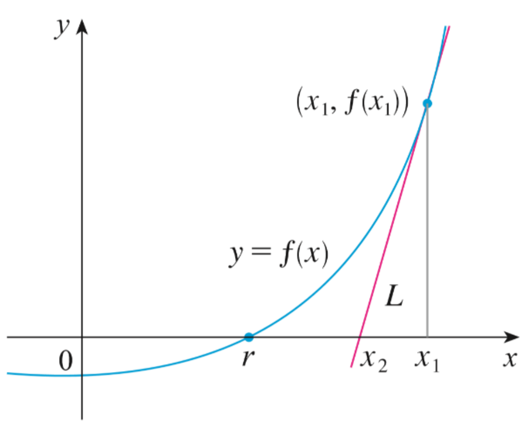
យើងអាចរកដំណោះស្រាយបាននៅសមីការទី១ដែលនៅខាងឆ្វេងនៃសមីការ។ ការប្រើក្រាហ្វិចត្រូវបានពិសោធដូចនៅក្នុងរូបភាពទី១។



យើងឃើញថានៅក្នុងដំណោះស្រាយដែលមាន $x = 0$ គឺមិនគួរឲ្យចាប់អារម្មណ៍របស់យើងសោះ នៅមានដំណោះស្រាយរកចម្លើយឃើញនៅចន្លោះ 0.007 និង 0.008 ។ បន្ទាប់ពីការពង្រីកយើងឃើញថារឹសនៃសមីការគឺ 0.0076 ប្រសិនបើយើងគ្រាន់តែត្រូវការព័ត៌មានទៀត ប៉ុន្តែវាប្រាកដជាពិបាក។ ដើម្បីឲ្យមានភាពលឿនជាងនេះគឺការប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខឬប្រព័ន្ធកុំព្យូទ័រ ហើយយើងអាចរកឃើញបានគឺ 0.007628603 ។

តើឧបករណ៍ទាំងនេះដំណើរការយ៉ាងដូចម្តេច? ពួកគេបានប្រើវិធីសាស្ត្រផ្សេងជាច្រើនបំផុតគឺតាមវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton ដែលត្រូវបានហៅថា Newton-Raphason method ។ យើងបានពន្យល់ពីវិធីសាស្ត្រនេះឲ្យដំណើរការនៅក្នុងម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រ ហើយមួយផ្នែកៗគឺប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងការគិតរបស់យើងបានផងដែរ?

រូបធរណីមាត្រដែលបង្ហាញអំពីវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton គឺស្ថិតនៅរូបភាពទី២



ដែលជាកន្លែងរឹសនៃសមីការដែលនៅទីតាំង r ។ យើងអាចប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែល x_1 នៅក្នុងរូបភាពនៃក្រាបអនុគមន៍ f ឬក៏ក្រាហ្វិចដែលគូសដោយកុំព្យូទ័រ។ ចាត់ទុកបន្ទាត់ L ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹងខ្សែកោង $y = f(x)$ នៅត្រង់ចំណុច $(x_1 , f(x_1))$ ហើយមើលទៅលើចំណុចប្រសព្វនៃអ័ក្ស x និងបន្ទាត់ L ត្រង់ចំណុច x_2 ។ វិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton គឺថាបន្ទាត់ប៉ះនៅជិតខ្សែកោងនិងដូចនេះ ចំណុច

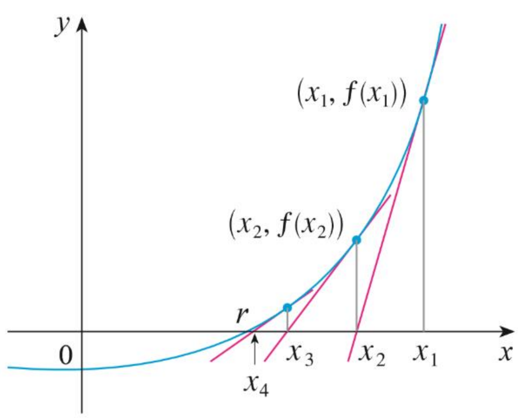
ប្រសព្វអ័ក្ស x គឺ x_2 ដែលនៅជិតចំណុចប្រសព្វ x ជាងគេនៃខ្សែកោង។ដោយសារតែបន្ទាត់ប៉ះគឺជាបន្ទាត់ត្រង់ យើងអាចរកចំណុចប្រសព្វ x ឃើញ។

ដើម្បីរករូបមន្តសម្រាប់រក x_2 ដែលទាក់ទងនឹង x_1 យើងប្រើអាស៊ីមតូតបន្ទាត់ L គឺ $f'(x_1)$ ដែលវាមានសមីការ $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ ។ ដោយចំណុចប្រសព្វ x នៃ L គឺ x_2 យើងកំណត់ $y = 0$ ហើយជំនួសចូល $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$

បើ $f'(x_1) \neq 0$ យើងអាចដោះស្រាយសមីការនេះបានដើម្បីរក x_2 ដែល $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

យើងប្រើ x_2 គឺជាតម្លៃប្រហែលនៃ r ។ បន្ទាប់មកយើងយក x_1 ទៅជំនួស x_2 ដោយការប្រើបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុច $(x_2 \, , \, f(x_2))$ ។ នេះគឺជាការឲ្យនូវតម្លៃប្រហែលទី៣ គេបាន

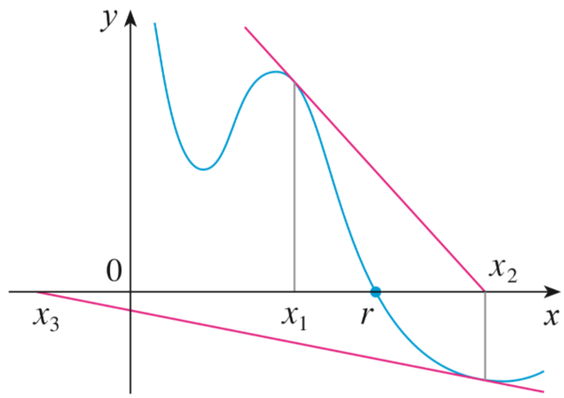
$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ ។ ប្រសិនបើយើងធ្វើតាមរបៀបនេះបន្តទៅទៀត យើងនឹងទទួលបានតម្លៃ $x_1 \, , x_2 \, , x_3 \, , x_4 \, , \ldots$ ដូចបានបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី៣។



ជាទូទៅ ប្រសិនបើការប៉ាន់ស្មានតម្លៃប្រហែលដល់ទី *nth* គឺជា x_n ហើយ $f'(x_n) \neq 0$ នោះតម្លៃប្រហែលដែលត្រូវប៉ាន់ស្មានគឺ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

ប្រសិនបើចំនួន x_n មានតម្លៃប្រហែលទៅនឹង r នៅពេលដែល n ខិតទៅជិត ∞ យើងអាចនិយាយបានថា sequence converges ទៅ r ហើយយើងអាចសរសេរបានគឺ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$ ។ បើ

ទោះបីជាតម្លៃប៉ាន់ស្មានមានបន្តបន្ទាប់គ្នាទៅនឹងរឹសនៃអនុគមន៍នៃប្រភេទ illustrated ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី៣ ។ ជាឧទាហរណ៍ គិតមើលលើស្ថានភាពនៅរូបភាពទី៤



យើងអាចមើលឃើញថា x_2 គឺជាតម្លៃប្រហែលជិតជាង x_1 ករណីនេះនៅពេលដែល $f'(x_1)$ ខិតជិត 0 ។

<u>**ឧទាហរណ៍ទី ១**</u> : ចាប់ផ្តើមដោយ $x_1=2$ ចូររកតម្លៃប្រហែលទី៣ ដែលជារឹសនៃសមីការ $x^3-2x-5=0$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងគិតទៅមើលលើវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton ដែល $f(x)=x^3-2x-5$ និង $f'(x)=3x^2-2$ ។ លោក Newton បានប្រើសមីការនេះ ហើយគាត់បានជ្រើសរើសយក $x_1=2$ ពីព្រោះឃើញថា $f(1)=-6$, $f(2)=-1$, $f(3)=16$ ។សមីការក្លាយជាសមីការ $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^3-2x_n-5}{3x_n^2-2}$ ។

បើ $n=1$ គេបាន $x_2=2.1$

បើ $n=2$ គេបាន $x_3=2.0946$

ឧបមាថាយើងចង់បាននូវភាពត្រឹមត្រូវនូវចំនួនក្រោយក្បៀស ៨ ខ្ទង់ដោយការប្រើវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton ។ តើអត់យើងអាចដឹងថានៅពេលណាដែលនឹងឈប់ដែរទេ? រូបមន្តដែលត្រូវបានប្រើជាទូទៅគឺអាចបញ្ឈប់បាននៅពេលដែលមានតម្លៃប្រហែល x_n និង x_{n+1} ដែលត្រូវនឹង៨ខ្ទង់។

កត់ចំណាំថាវិធីដែលធ្វើពី n ទៅ $n+1$ គឺត្រូវនឹងគ្រប់តម្លៃនៃ n ។ វាត្រូវបានហៅថា iterative process ។ នេះមានន័យថាវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton គឺមានភាពងាយស្រួលសម្រាប់ប្រើនៅក្នុងកម្មវិធីនៃម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ២</u> : ចូរប្រើវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton ដើម្បីរកតម្លៃ $\sqrt[6]{2}$ យ៉ាងត្រឹមត្រូវដែលមានលេខនៅខាងក្រោយក្បៀស ៨ ខ្ទង់។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងសង្កេតមើលថាការរកតម្លៃនៃ $\sqrt[6]{2}$ គឺស្មើនឹងការរកឬសនៃសមីការ $x^6-2=0$ ។

ដូចនេះយើងយក $f(x)x=x^6-2$ បន្ទាប់មកយើងដេរីវេ $f'(x)=6x^5$ ហើយតាមរយៈវិធីសាស្ត្ររបស់លោក Newton ក្លាយជា $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^6-2}{6x^5}$

ប្រសិនបើយើងជ្រើសរើសយក $x_1=1$ គេបានតម្លៃប្រហែលមានដូចខាងក្រោម

$x_2\approx 1.16666667$

$x_3\approx 1.12644368$

$x_4\approx 1.12249707$

$x_5\approx 1.12246205$

$x_6\approx 1.12246205$

ដោយ x_5 និង x_6 មានតម្លៃស្មើគ្នានៅត្រឹម៨ខ្ទង់ យើងអាចចាត់ទុកថា $\sqrt[6]{2}=1.12246205$ ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ៣</u> : រកចំនួននៅក្រោយក្បៀស 8 ខ្ទង់នូវឬសនៃសមីការ $\cos x=x$ ។

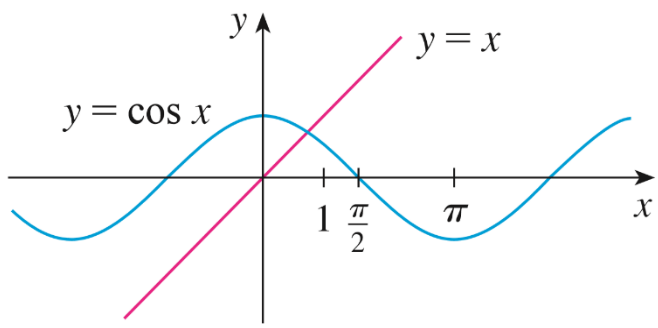
ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងគួរតែសរសេរសមីការទៅជាទម្រង់ស្តង់ដាសិន $\cos x-x=0$

យើងតាង $f(x)=\cos x-x$ បន្ទាប់មកដេរីវេវា $f'(x)=-\sin x-1$ នោះវាមានទម្រង់

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\cos x_n-x_n}{-\sin x_n-1}=x_n+\frac{\cos x_n-x_n}{\sin x_n-1}$$

ដើម្បីឲ្យដឹងពីតម្លៃពិតនៃ x_1 យើងគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=\cos x$ ហើយនឹងក្រាប $y=x$ ដូចបង្ហាញនៅក្នុងរូបភាពទី៦ ។



រូបភាពបង្ហាញពីក្រាបទាំងពីរមានភាពប្រសព្វគ្នាមួយដែល $x<1$ ដូចនេះ យក $x=1$ ជាឫសក្នុងតម្លៃប្រហែល។ ហើយយ៉ាងបានតម្លៃដូចខាងក្រោមនៅពេលដែលគិតមើលគឺ

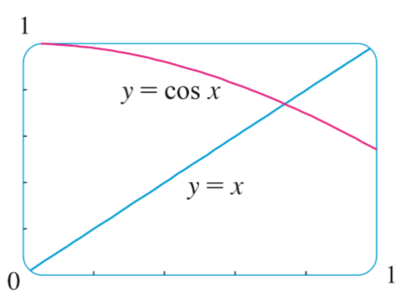
$x_2 \approx 0.75036387$

$x_3 \approx 0.73911289$

$x_4 \approx 0.73908513$

$x_5 \approx 0.73908513$

ដោយ $x_4 = x_5$ យើងអាចចាត់ទុកថាជាឫសនៃសមីការនេះបាន។ ជំនួសឲ្យការប្រើគំនូសព្រាងដូចនៅក្នុងរូបភាពទី៦ ។ យើងអាចប្រើក្រាបហ្វិកដែលត្រឹមត្រូវជាងនេះដែលត្រូវបានប្រើដោយម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រ។



រូបភាពទី៧បានបង្ហាញថា យើងប្រើ $x_1 = 0.75$ ជាតម្លៃប្រហែលដំបូង ហើយក្រោយមកវិធីសាស្រ្តរបស់លោក Newton មានដូចខាងក្រោម

$x_2 = 0.73911114$, $x_3 = 73908513$, $x_4 = 0.73908513$ ដូចនេះ យើងទទួលបានចម្លើយ ដូចកាលពីមុន ប៉ុន្តែនៅមានជំហ៊ានដែលខ្លីជាងនេះ។

២.៩. អនុគមន៍ព្រីមីទីវ (Antiderivatives)

និយមន័យ : អនុគមន៍ F ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f នៅលើដែនកំណត់ I កាលណា $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

<u>ឧទាហរណ៍ទី ១</u> : រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍នីមួយៗខាងក្រោម៖

ក. $f(x) = \sin x$

ខ. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

គ. $f(x) = x^n$, $n \neq -1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ប្រសិនបើ $F(x) = -\cos x$ នោះ $F'(x) = \sin x$ ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃ $\sin x$ គឺ $-\cos x$ ។ ដោយទ្រឹស្តីបទទី១ ព្រីមីទីវជាទូទៅគឺ $G(x) = -\cos x + C$

យើងអាចសរសេរបានថា $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ ។ ដូចនេះ នៅចន្លោះ $(0 , +\infty)$ ព្រីមីទីវនៃ $\dfrac{1}{x}$ គឺ $\ln x + C$ ។ យើងក៏បានរៀនផងដែរថា $\dfrac{d}{dx}(\ln|x|) = \dfrac{1}{x}$ គ្រប់ $x \neq 0$ ។ ទ្រឹស្តីមួយបានប្រាប់យើងថាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ គឺ $\ln|x| + C$ នៅក្នុងចន្លោះណាមួយដែលមាន 0។ ហើយនេះគឺជាការពិតនៅចន្លោះ $(-\infty , 0)$ និង $(0 , \infty)$ ។ ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f គឺ

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & , x > 0 \\ \ln x(-x) + C_2 & , x < 0 \end{cases}$$

យើងប្រើ Power Rule ដើម្បីរកព្រីមីទីវនៃ x^n ។ ជាការពិតប្រសិនបើ $n \neq -1$ គេបាន $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$ ។ ដូចនេះ ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^n$ គឺ

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ដែល $n \geq 0$ ដោយ $f(x) = x^n$ ត្រូវបានកំណត់លើចន្លោះណាមួយ។ ប្រសិនបើ n គឺអវិជ្ជមាន (តែ $n \neq -1$) វាមានតម្លៃលើចន្លោះដែលមិនមាន 0 ។

(បកអត់យល់)

Function	Particular antiderivative	Function	Particular antiderivative
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos x$	$\sin x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$-\cos x$		

<u>ឧទាហរណ៍ទី ២</u> : រកគ្រប់អនុគមន៍ g ដែលគេឲ្យ $g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដំបូងយើងធ្វើការសរសេរម្តងទៀតនូវអនុគមន៍ខាងក្រោម

$$g'(x) = 4\sin x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4\sin x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ដូចនេះ យើងអាចរកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g'(x)=4\sin x+2x^4-x^{-\frac{1}{2}}$

យើងប្រើរូបមន្តនៅក្នុងតារាងទី២ជាមួយនឹងទ្រឹស្តីទី១ យើងបាន

$$g(x)=4(-\cos x)+\frac{2x^5}{5}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-4\cos x+\frac{2}{5}x^5-2\sqrt{x}+C$$

ចំណុចខាងក្រោមមិនសូវសំខាន់ខ្ញុំអត់សរសេរលោកគ្រូ អត់ទោសផង។

<u>**ឧទាហរណ៍ទី ៣**</u> : រកអនុគមន៍ f ដែលគេឲ្យ $f'(x)=e^x+20(1+x^2)^{-1}$ និង $f(0)=-2$ ។

ដំណោះស្រាយ

ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f'(x)=e^x+\frac{20}{1+x^2}$ គឺ $f(x)=e^x+20\tan^{-1}x+C$

ដើម្បីកំណត់តម្លៃនៃ C យើងប្រើ $f(0)=-2$ ដែល $f(0)=e^0+20\tan^{-1}0+C=-2\Leftrightarrow C=-3$

ដូចនេះ ដំណោះស្រាយដែលយើងត្រូវការគឺ $f(x)=e^x+20\tan^{-1}x-3$

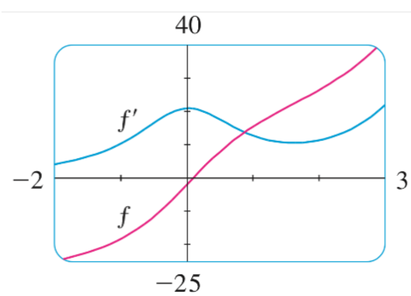


FIGURE 2

<u>**ឧទាហរណ៍ទី ៤**</u>: រកអនុគមន៍ f បើគេឲ្យ $f''(x)=12x^2+6x-4$, $f(0)=4$ និង $f(1)=1$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f''(x)=12x^2+6x-4$ គឺ

$$f'(x)=12\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-4x+C$$
$$=4x^3+3x^2-4x+C$$

ការប្រើប្រាស់ច្បាប់ព្រីមីទីវផ្សេងទៀត យើងអាចរកឃើញថា

$$f(x)=4\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+Cx+D$$
$$=x^4+x^3-2x^2+Cx+D$$

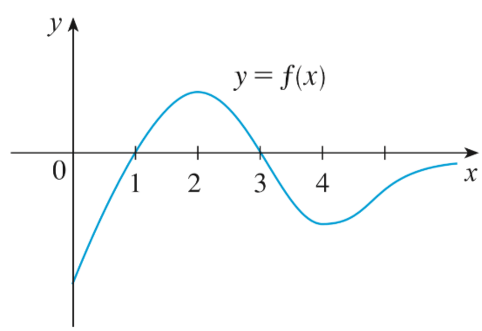
ដើម្បីកំណត់តម្លៃនៃ C និង D យើងប្រើលក្ខខណ្ឌ $f(0)=4$ និង $f(1)=1$ ។ ដោយ $f(0)=0+D=4\Leftrightarrow D=4$ និង $f(1)=1+1-2+C+4=1\Leftrightarrow C=-3$

ដូចនេះ អនុគមន៍ដែលយើងត្រូវការគឺ $f(x)=x^4+x^3-2x^2-3x+4$ ។

ប្រសិនបើគេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f វាហាក់បីដូចជាហេតុផលមួយដែលយើងអាចគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ព្រីមីទីវអនុគមន៍ F ។ ឧបមាថាគេឲ្យ $F(0)=1$ ។ បន្ទាប់មកយើងមានកន្លែងចាប់ផ្តើមដើម្បីដោយចំណុច $(0,1)$ ហើយយើងអាចសរសេរបានថា $F'(x)=f(x)$ ។

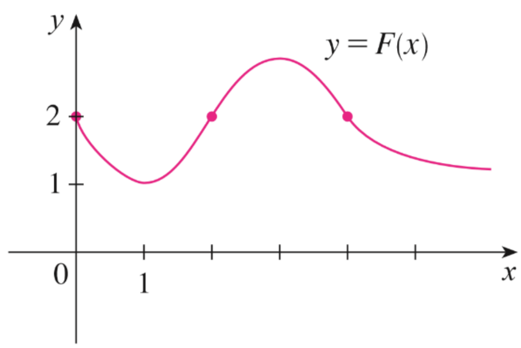
__ឧទាហរណ៍ទី ៥__ : គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f ដូចមាននៅក្នុងរូបភាពទី ៣។ចូររកព្រីមីទីវ F ដែលគេឲ្យ $F(0)=2$ ។

ដំណោះស្រាយ



We are guide by the fact that slope of $y=F(x)$ គឺ $f(x)$ ។ យើងចាប់ផ្តើមដោយចំណុច $(0,2)$ ហើយគូសក្រាប F ចុះ ដោយ $f(x)$ គឺមានភាពអវិជ្ជមាននៅពេល $0<x<1$ ។ ចំណាំថា $f(1)=f(3)=0$ ដូចនេះ F មានបន្ទាត់ប៉ះឈរនៅពេលដែល $x=1$ និង $x=3$ ។ ចំពោះ

$1<x<3$ $f(x)$ គឺវិជ្ជមានហើយដូចនេះ F គឺកើន។ យើងឃើញថា F មានតម្លៃអប្បបរមានៅពេលដែល $x=1$ ហើយចំណុចអតិបរមានៅពេលដែល $x=3$ ។ ចំពោះ $x>3$ $f(x)$ គឺអវិជ្ជមានហើយដូចនេះ F គឺចុះលើចន្លោះ $(3,\infty)$ ។ ដោយ $f(x)\to 0, x\to\infty$ ក្រាបនៃអនុគមន៍ becomes flater នៅពេលដែល $x\to\infty$ ។ គួរចំណាំផងដែរថា $F''(x)=f'(x)$ ប្តូរពីវិជ្ជមានទៅអវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x=2$ ហើយពីអវិជ្ជមានទៅវិជ្ជមាននៅពេលដែល $x=4$ ដូចនេះក្រាបនៃអនុគមន៍ F មានចំណុចរបត់នៅពេលដែល $x=2$ និង $x=4$ ។



<u>ឧទាហរណ៍ទី ៦</u> : ភាគល្អិតមួយបានផ្លាស់ទីនៅលើបន្ទាត់ត្រង់ឲ្យដោយសមីការ $a(t)=6t+4$ ។ ហើយមានល្បឿនដើមគឺ $v(0)=-6cm/s$ ហើយវាមានបម្លាស់ទី $s(0)=9cm$ ។ រកអនុគមន៍ $s(t)$ ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយ $v'(t)=a(t)=6t+4$ មានព្រីមីទីវដែលឲ្យគឺ $v(t)=6\dfrac{t^2}{2}+4t+C=3t^2+4t+C$

តែយើងមាន $v(0)=C\Leftrightarrow -6=C\Leftrightarrow c=-6$

នោះគេបាន $v(t)=3t^2+4t-6$

ដោយ $v(t)=s'(t)$ ដែល s គឺជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ v

$s(t)=3\dfrac{t^3}{3}+4\dfrac{t^2}{2}-6t+D=t^3+2t^2-6t+D$

តែ $s(0)=D\Leftrightarrow 9=D$

ដូចនេះ អនុគមន៍ដែលយើងត្រូវការគឺ $s(t)=t^3+2t^2-6t+9$

វត្ថុស្ថិតនៅលើភពផែនដី ត្រូវបានស្រូបទាញដោយសំទុះទំនាញផែនដី g ។ យើងអាចដឹងតម្លៃនៃ g បានគឺ $g=9.8m/s^2$ ឬក៏ $32\,ft/s^2$ ។

<u>ឧទាហរណ៍ទី ៧</u> : បាល់មួយគឺត្រូវបានចោលឡើងលើក្នុងល្បឿន $48\,ft/s$ ពីផ្ទៃចំណោទមួយដែលមានកម្ពស់ $432\,ft$ ពីដី។ រកកម្ពស់នៃបាល់នៅខណៈពេល t វិនាទីកោយមកទៀត។ តើនៅពេលណាដែលវាមានកម្ពស់ជាអតិបរមា ? ហើយពេលណាដែលវាធ្លាក់មកដល់ដីវិញ ?

ដំណោះស្រាយ

The motion គឺជាល្បឿនហើយយើងជ្រើសរើសយកទិសដៅឡើងលើ។ នៅខណៈពេល t ចម្ងាយពីផ្ទៃដីគឺ $s(t)$ ហើយល្បឿនគឺ $v(t)$ គឺកើនឡើង។ ដូចនេះ សំទុះត្រូវតែអវិជ្ជមានដែល $a(t)=\dfrac{dv}{dt}=-32$

យកព្រីមីទីវយើងមាន $v(t)=-32t+C$

ដើម្បីកំណត់តម្លៃនៃ C យើងប្រើ $v(0)=48\Leftrightarrow C=48$ នោះអនុគមន៍ដែលយើងត្រូវការគឺ $v(t)=-32t+48$

កម្ពស់អតិបរមាដែលអាចទៅដល់នៅពេលដែលមានល្បឿនស្មើសូន្យ គឺនៅបន្ទាប់ពី$1.5s$ ។ ដោយ $s'(t)=v(t)$ យើងបាន $s(t)=-16t^2+48t+D$

ប្រើ $s(0)=432\Leftrightarrow 432=0+D\Leftrightarrow D=432$

ដូចនេះ $s(t)=-16t^2+48t+432$

បញ្ជាក់ $s(t)$ គឺមានតម្លៃរហូតដល់បាល់ធ្លាក់ទៅដល់ផ្ទៃដី។ វាអាចកើតឡើងបាននៅពេលដែល $s(t)=0$ ដែលមាននៅពេល $-16t^2+48t+432=0\Leftrightarrow t^2-3t-27=0$

ប្រើរូបមន្តនៃវដើម្បីដោះស្រាយសមីការ យើងបាន $t=\dfrac{3\pm 3\sqrt{13}}{2}$

ដោយ t មានតម្លៃធំជាងសូន្យ នោះគេបាន $t=\dfrac{3+3\sqrt{13}}{2}=6.9s$

លំហាត់អនុវត្ត

១ ដល់ ២២ : រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍។

១. $f(x)=x-3$

២. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+6$

៣. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{5}x^3$

៤. $f(x)=8x^9-3x^6+12x^3$

៥. $f(x)=(x+1)(2x-1)$

៦. $f(x)=x(2-x)^2$

៧. $f(x)=7x^{\frac{2}{5}}+8x^{-\frac{4}{5}}$

៨. $f(x)=x^{3.4}-2x^{\sqrt{2}-1}$

៩. $f(x)=\sqrt{2}$

១០. $f(x)=e^2$

១១. $f(x)=3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}$

១២. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt{x}$

១៣. $f(x)=\frac{1}{5}-\frac{2}{x}$

១៤. $f(t)=\frac{3t^4-t^3+6t^2}{t^4}$

១៥. $g(t)=\frac{1+t+t^2}{\sqrt{t}}$

១៦. $r(\theta) = \sec\theta\tan\theta - 2e^{\theta}$

១៧. $h(\theta) = 2\sin\theta - \sec^2\theta$

១៨. $f(t) = \sin t + 2\sinh t$

១៩. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

២០. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

២១. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

២២. $f(x) = \dfrac{2+x^2}{1+x^2}$

២៣ ដល់ ២៤

រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ដែលបញ្ជាក់តាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យ។ ត្រួតពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នក ហើយប្រៀបធៀបទៅនឹងក្រាបនៃព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ។

២៣. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

២៤. $f(x) = 4 - 3(1+x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

<u>**២៥ ដល់ ៤៨**</u> : រកអនុគមន៍ f

២៥. $f''(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x$

២៦. $f''(x) = x^6 - 4x^4 + x + 1$

២៧. $f''(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

២៨. $f''(x) = 6x + \sin x$

២៩. $f'''(t)=\cos t$

៣០. $f'''(t)=e^t+t^{-4}$

៣១. $f'(x)=1+3\sqrt{x}$, $f(4)=25$

៣២. $f'(x)=5x^4-3x^2+4$, $f(-1)=2$

៣៣. $f'(t)=\dfrac{4}{1+t^2}$, $f(1)=0$

៣៤. $f'(t)=t+\dfrac{1}{t^3}$, $t>0$, $f(1)=6$

៣៥. $f'(t)=2\cos t+\sec^2 t$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4$

៣៦. $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)=0$

៣៧. $f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}$, $f(1)=1$, $f(-1)=-1$

៣៨. $f'(x)=\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

៣៩. $f''(x)=-2+12x-12x^2$, $f(0)=4$, $f'(0)=12$

៤០. $f''(x)=8x^3+5$, $f(1)=0$, $f'(1)=8$

៤១. $f''(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$, $f(0)=3$, $f'(0)=4$

៤២. $f''(t)=\dfrac{3}{\sqrt{t}}$, $f(4)=20$, $f'(4)=7$

៤៣. $f''(x)=4+6x+24x^2$, $f(0)=3$, $f(1)=10$

៤៤. $f''(x)=x^3+\sinh x\ ,\ f(0)=1\ ,\ f(2)=2.6$

៤៥. $f''(x)=2+\cos x\ ,\ f(0)=-1\ ,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

៤៦. $f''(t)=2e^t+3\sin t\ ,\ f(0)=0\ ,\ f(\pi)=0$

៤៧. $f''(x)=x^{-2}\ ,\ x>0\ ,\ f(1)=0\ ,\ f(2)=0$

៤៨. $f'''(x)=\cos x\ ,\ f(0)=1\ ,\ f'(0)=2\ ,\ f''(0)=3$

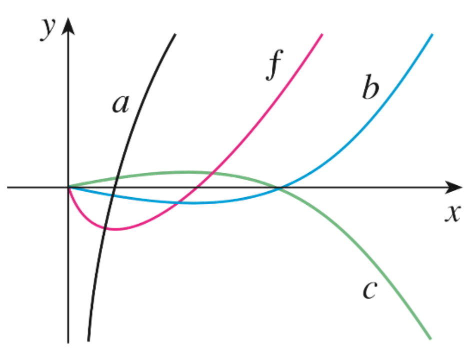
៤៩. គេឲ្យក្រាបនៃអនុគមន៍ f កាត់ចំណុច $(1\,,6)$ និងមានមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនៅត្រង់ចំណុច$(x\ ,\ f(x))$ គឺ $2x+1$ ។ រក $f(2)$ ។

៥០. រកអនុគមន៍ f ដែល $f'(x)=x^3$ និងមានបន្ទាត់ $x+y=0$ គឺជាបន្ទាត់ប៉ះក្រាបនៃអនុគមន៍ f ។

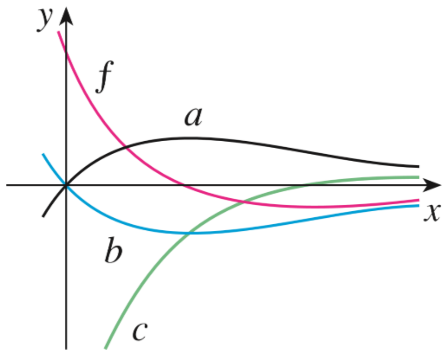
៥១ ដល់ ៥២

ក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺត្រូវបានបង្ហាញ។ តើក្រាបមួយណាដែលជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f ហេតុអ្វី?

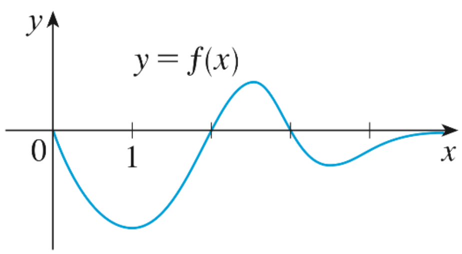
៥១.



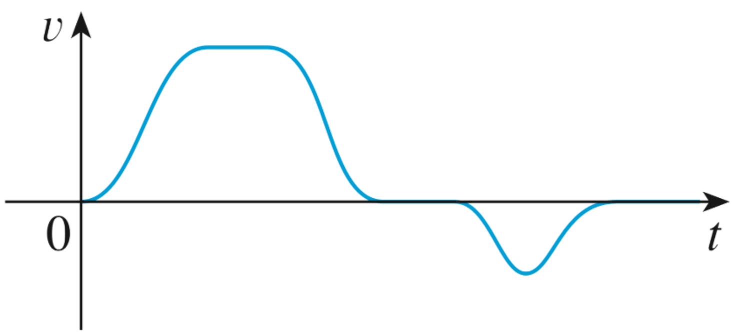
៥២.



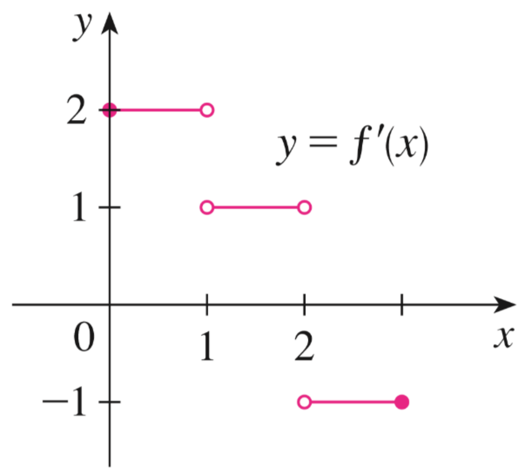
៥៣. ក្រាបនៃអនុគមន៍មួយគឺត្រូវបានបង្ហាញដូចនៅក្នុងរូបភាព។ គូសក្រាបនៃព្រីមីទីវ F ដែល $F(0)=1$។



៥៤. ក្រាបល្បឿននៃអនុគមន៍របស់ភាគល្អិតគឺត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព។ គូសទីតាំងជាក្រាបនៃអនុគមន៍នេះ។



៥៥. ក្រាបនៃអនុគមន៍ដេរីវេ f' គឺត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព។ គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ f ប្រសិនបើ f គឺជាអនុគមន៍ជាប់ដែល $f(0)=-1$ ។



៥៦. ក. ប្រើឧបករណ៍ដើម្បីគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=2x-3\sqrt{x}$ ។

ខ. ដោយប្រើក្រាបនៅសំណួរ ក ចូរគូសក្រាបនៃព្រីមីទីវ F ដែលគេឲ្យ $F(0)=1$ ។

គ. ប្រើលក្ខណៈនៃចំណុចនេះដើម្បីរកអនុគមន៍ $F(x)$ ។

ឃ. ក្រាបនៃអនុគមន៍ F ដោយការប្រើចំណុចដែលបានបញ្ជាក់ខាងលើនៅចំណុច គ ។ ប្រើធៀបក្រាបនៅចំណុច ខ ។

៥៧ ដល់ ៥៨

គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ f និងប្រើវាដើម្បីបង្កើតគំនូសនៃព្រីមីទីវតាមរយៈអនុគមន៍ដើម។

៥៧. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$, $-2\pi \le x \le 2\pi$

៥៨. $f(x)=\sqrt{x^4-2x^2+2}-2$, $-3\le x\le 3$

៥៩ ដល់ ៦៤

ភាគល្អិតតូចៗកំពុងផ្លាស់ទី។ រកទីតាំងនៃភាគល្អិត។

៥៩. $v(t)=\sin t-\cos t$, $s(0)=0$

៦០. $v(t)=1.5\sqrt{t}$, $s(4)=10$

៦១. $a(t)=2t+1$, $s(0)=3$, $v(0)=-2$

៦២. $a(t)=3\cos t-2\sin t$, $s(0)=0$, $v(0)=4$

៦៣. $a(t)=10\sin t+3\cos t$, $s(0)=0$, $s(2\pi)=12$

៦៤. $a(t)=t^2-4t+6$, $s(0)=0$, $s(1)=20$

៦៥. ថ្មធ្លាក់ពីចំណោទខ្ពស់នៃ CN Tower ដែលមានកម្ពស់ 450m ពីផ្ទៃដី។

ក. រកចម្ងាយពីដុំថ្មទៅផ្ទៃដីនៅខណៈពេល t ។

ខ. តើត្រូវចំណាយរយៈពេលប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យវាបានធ្លាក់ដល់ផ្ទៃដី។

គ. តើវាមានល្បឿនប៉ុន្មាននៅពេលដែលវាធ្លាក់ដល់ផ្ទៃដី។

ឃ. ប្រសិនបើដុំថ្មមានល្បឿនធ្លាក់មកក្រោម $5m/s$ តើវាត្រូវចំណាយពេលអស់ប៉ុន្មានដើម្បីឲ្យធ្លាក់ដល់ផ្ទៃដី?

៦៦. ចូរបង្ហាញពីចលនាស្ទុះស្មើនៅលើបន្ទាត់ត្រង់មួយដែលមានសន្ទុះ a ល្បឿនដើម v_0 ចម្ងាយដើម s_0 និងនៅខណៈពេល t គឺ $S=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$ ។

៦៧. វត្ថុមួយត្រូវបានចោលឡើងលើក្នុងល្បឿនដើម v_0 ពីទីតាំងដើម s_0 ពីផ្ទៃដី។ បង្ហាញថា $\left[v(t)\right]^2=v_0{}^2-19.6\left[s(t)-s_0\right]$ ។

៦៨. បាល់ពីត្រូវបានគប់ឡើងលើពីចំណោទថ្មមួយក្នុងឧទាហរណ៍ទី ៧ ។ ការចោលលើកដំបូងគឺស្ថិតនៅក្នុងល្បឿន $48\,ft/s$ និងមួយវិនាទីក្រោយមកបាល់មួយទៀតត្រូវបានចោលឡើងលើដូចគ្នាគឺក្នុងល្បឿន $24\,ft/s$ ។ តើបាល់ទាំងពីរនឹងបានជួបគ្នាដែរឬទេ?

៦៩. ដុំថ្មមួយត្រូវបានទម្លាក់ពីចំណោទថ្មមួយហើយធ្លាក់មកដល់ផ្ទៃដីដែលមានល្បឿន $120\,ft/s$ ។ តើចំណោទថ្មស្ថិតនៅកម្ពស់ប៉ុន្មាន?

៧០. ប្រសិនបើអ្នកមុជទឹកម្នាក់មានម៉ាស់ m បានឈរនៅខាងចុងនៃក្តារមួយដែលមានប្រវែង L ដើម្បី

ជំពូក ៣: អាំងតេក្រាល

ក្នុងផ្នែកនេះពួកយើងរកឃើញថាក្នុងការព្យាយាមស្វែងរកផ្ទៃក្រោមខ្សែកោង ឬចម្ងាយនៃការធ្វើដំណើរដោយឡាន ហើយយើងបញ្ចប់ជាមួយនឹងប្រភេទនៃលីមីតពិសេសដូចគ្នា។

ចំណោទផ្ទៃក្រឡា

យើងចាប់ផ្តើមដោះស្រាយចំណោទផ្ទៃក្រឡា ដោយស្វែងរកផ្ទៃក្រឡាតំបន់ S ដែលស្ថិតនៅក្រោមខ្សែកោង $y=f(x)$ ពី a ទៅ b ។ អត្ថន័យនៃ S មើលឧទាហរណ៍ Figure 1 វាទាល់ដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ជាប់ f ដែល $[f(x)\geq 0]$, បន្ទាត់ឈរ $x=a$ និង $x=b$ និងអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

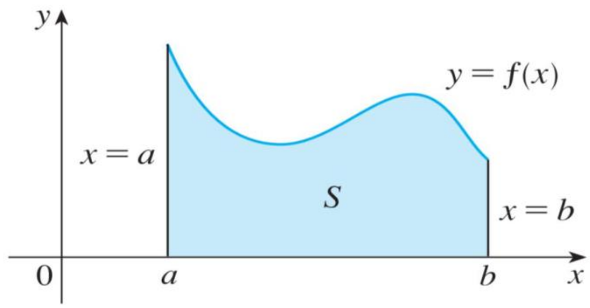
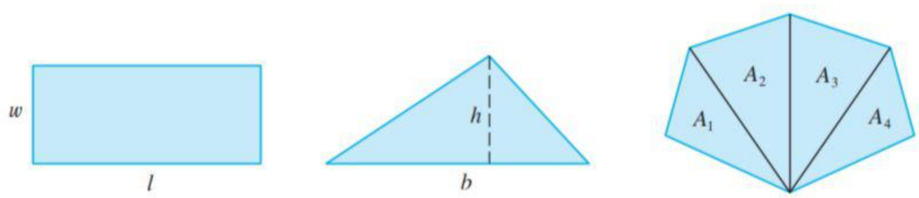


FIGURE 1

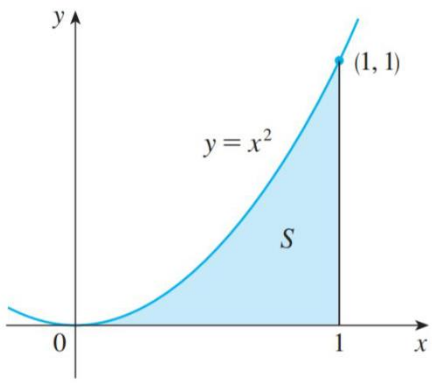
$S=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$

ក្នុងការព្យាយាមដោះស្រាយចំណោទផ្ទៃក្រឡាពួកយើងបានសួរខ្លួនឯងថា៖តើអ្វីជាអត្ថន័យនៃពាក្យផ្ទៃក្រឡា ?សំណួរនេះគឺងាយស្រួលឆ្លើយចំពោះតំបន់ត្រង់។ សម្រាប់ចតុកោណកែង ផ្ទៃក្រឡាគឺកំណត់ដោយលទ្ធផលនៃបណ្តោយ និងទទឹង។ ផ្ទៃនៃត្រីកោណ …..។ផ្ទៃក្រឡានៃពហុកោណរកឃើញដោយចែកវាជាត្រីកោណ(ដូចក្នុង Figure 2) ហើយបូកផ្ទៃនៃត្រីកោណ។



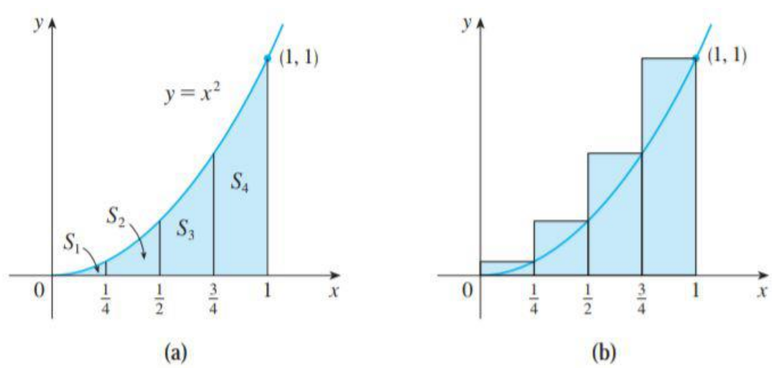
$A=lw$ $\qquad A=\frac{1}{2}bh$ $\qquad A=A_1+A_2+A_3+A_4$

ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយវាមិនងាយស្រួលដើម្បីស្វែងរកផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ខ្សែកោង។ បន្ទាប់មកយើងដាក់លីមីតទៅលើតម្លៃប្រហែលនោះ។ពួកយើងដេញដោលទៅលើគំនិតស្រដៀងៗគ្នាចំពោះផ្ទៃក្រឡា។ ដំបូងយើងប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡា S ដោយចតុកោណកែង បន្ទាប់មកយើងយកដែនកំណត់នៃផ្ទៃក្រឡាជាចតុកោណកែងទាំងនេះដោយតម្លើងលេខនៃចតុកោណកែង។



ប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងដើម្បីធ្វើការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាក្រោមប៉ារ៉ាបូល $y = x^2$ ពី 0 ទៅ 1 (ផ្ទៃក្រឡាប៉ារ៉ាបូល S ឧទាហរណ៍ក្នុង Figure3) ។

ដំណោះស្រាយៈ ដំបូងយើងកំណត់ផ្ទៃក្រឡា S ត្រូវតែស្ថិតនៅកន្លែងណាមួយចន្លោះ 0 និង 1 មានក្នុងការដែលមានប្រវែង1ប៉ុន្តែយើងអាចធ្វើអោយប្រសើរជាងនោះ។ ឧបមាថាយើងចែក S ជាបួនធ្នូត S_1, S_2, S_3 និង S_4 ដោយគូសបន្ទាត់ឈរ $x = \frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}$ និង $x = \frac{3}{4}$ ដូចក្នុង Figure4(a)។



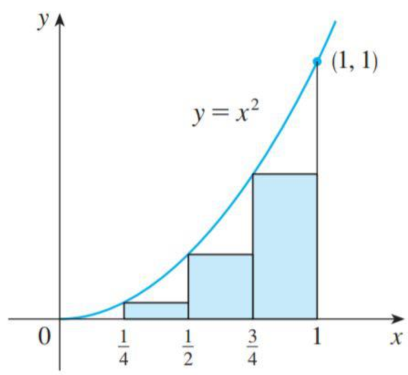
យើងអាចប៉ាន់ស្មានផ្ទៃកធូតនីមួយៗដោយចតុកោណកែងដែលមានបាតដូចគ្នាជាផ្ទៃធូតហើយកម្ពស់ដូចជាគែមខាងស្តាំនៃធ្នូត[មើល Figure4(a)]។ ក្នុងន័យផ្សេងទៀតកម្ពស់នៃចតុកោណកែងទាំងនោះជាតម្លៃនៃអនុគមន៍ $f(x) = x^2$ នៅខាងស្តាំចំណុចចុងចន្លោះរង

$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ និង $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$

ចតុកោណកែងនីមួយៗមានទទឹង $\frac{1}{4}$ និងកម្ពស់ $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ និង 1^1 ។ បើយើងអោយ R_4 ជាផលបូកផ្ទៃនៃចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មាននេះយើងបាន៖

$$R_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

ពីFigure4(b)យើងឃើញថាផ្ទៃក្រឡា A នៃ S តិចជាង R_4 ដូចនេះ $A < 0.46857$



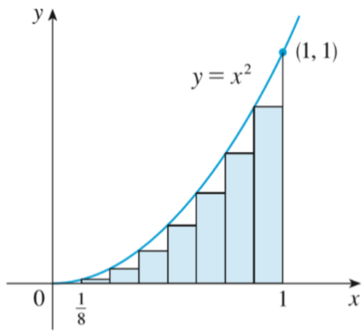
ជំនួសអោយការប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងក្នុង Figure 4(b)យើងអាចប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងដែលតូចជាងក្នុង Figure 5 ដែលកម្ពស់គឺជាតម្លៃនៃ f ស្ថិតនៅខាងឆ្វេងចំណុចបញ្ចប់នៃចន្លោះរង (ចំណុចខាងឆ្វេងបំផុតនៃចតុកោណកែងរាបស្មើព្រោះកម្ពស់វាស្មើ0) ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចំពោះការប៉ាន់ស្មានចតុកោណកែងគឺ៖ $L_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$

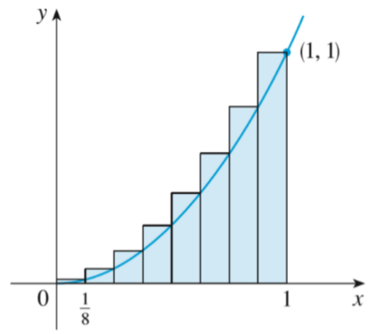
យើងឃើញថាផ្ទៃក្រឡានៃ S គឺធំជាង L_4 ដូច្នេះយើងអាចប៉ាន់ស្មានតម្លៃទាបជាងនិងខ្ពស់ជាងចំពោះ A យើងអាចប្រើវិធីសាស្ត្រនេះម្តងទៀតជាមួយលេខដែលធំជាងនៃផ្នែកឆ្នូត។ក្នុងរូបទី៦ បង្ហាញពីអ្វីដែលបានកើតឡើងនៅពេលដែលយើងចែកតំបន់ S ជា៨ផ្នែកឆ្នូតដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា។

ដោយការគណនាផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងតូចជាង (L_8) ហើយបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងធំជាង (R_8) យើងទទួលបានតម្លៃទាបជាងនិងខ្ពស់ជាងចំពោះ A ៖

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

ដូច្នេះចម្លើយនៃសំណួរគឺអាចនិយាយបានថាពិតចំពោះផ្ទៃក្រឡា S ដែលនៅចន្លោះ 0.2734375 និង 0.3984375 ។



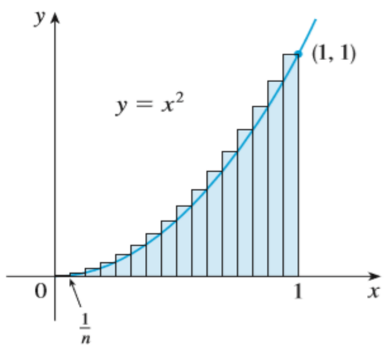


យើងអាចទទួលបានការប៉ាន់ស្មានដែលល្អជាងមុនដោយគ្រាន់តែបង្កើនចំនួនឆ្នូត។ តារាងខាងក្រោមបង្ហាញពីលទ្ធផលនៃការគណនាស្រដៀងគ្នា(ប្រើកុំព្យូទ័រ)ប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងចំនួន n ដែលកម្ពស់នៅចំនុចចុងខាងឆ្វេង (L_n) ឬចំនុចចុងខាងស្តាំ (R_n) ។ ជាពិសេសយើងប្រើប្រាស់ 50ផ្នែកឆ្នូតដែលផ្ទៃក្រឡាស្ថិតនៅចន្លោះ 0.3234 និង 0.3434 ចំពោះផ្នែតឆ្នូត 1000 យើងបង្រួមវាអោយរិតតែខ្លាំងថែមទៀត៖ A នៅចន្លោះ 0.3328335 និង 0.3338335 ។ ការប៉ាន់ស្មានដែលល្អទទួលបានលេខជាមធ្យមគឺ៖ $A \approx 0.3333335$ ។

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

ពីតម្លៃក្នុងតារាងឧទាហរណ៍ទី1៖ ប្រសិនបើ R_n ខិតជិត $\frac{1}{3}$ នោះ n កើនឡើង។ យើងនិងអះអាងក្នុងឧទាហរណ៍បន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍2 ចំពោះផ្ទៃ S ក្នុងឧទាហរណ៍ទី1 បង្ហាញថាផលបូកផ្ទៃក្រឡា……….នោះ $\lim\limits_{x\to\infty} R_n = \frac{1}{3}$



ដំណោះស្រាយ៖ R_n ជាផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងចំនួន n ក្នុងរូបទី7។ ចតុកោណកែងនីមួយៗមានទទឹង $\frac{1}{n}$ ហើយកម្ពស់មានតម្លៃជាអនុគមន៍ $f(x)=x^2$ នៅចំណុច $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},...,\frac{n}{n}$ ដែលកម្ពស់គឺ $\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\left(\frac{3}{n}\right)^2,...,\left(\frac{n}{n}\right)^2$ ដូច្នេះ

$$\begin{aligned}R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n^2}\right)+...+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)\\ &= \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)\end{aligned}$$

យើងប្រើប្រាស់រូបមន្តផលបូកការេពីតួដំបូងដល់តួទី n

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ប្រហែលជាអ្នកធ្លាប់ឃើញរូបមន្តនេះពីមុនមក។វាបង្ហាញក្នុងឧទាហរណ៍5ក្នុងឧបសម្ពន្ធE។ ជំនួសរូបមន្ត1ក្នុងការបង្ហាញ R_n យើងបាន

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

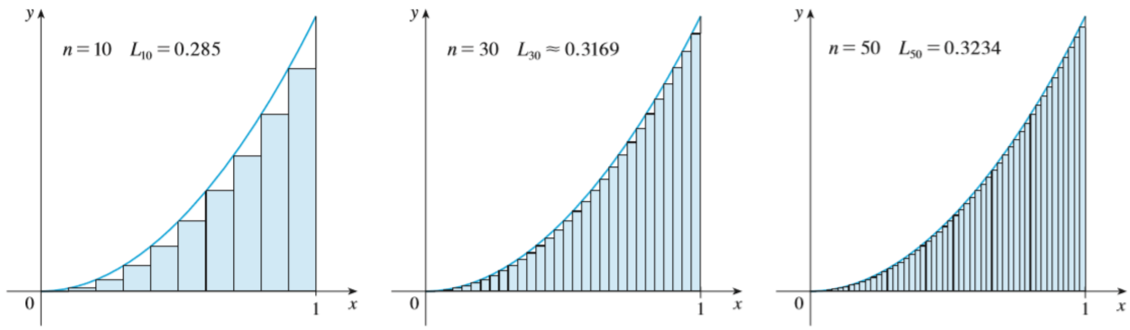
យើងគណនាលីមីតនៃស្វ៊ីត $\{R_n\}$ ។ ស្វ៊ីតហើយនិងលីមីតត្រូវបានយកមកពិភាក្សាក្នុងចំណុចA ខាងដើម និងមកសិក្សាលំអិតក្នុងផ្នែក11.1។ គំនិតស្រដៀងគ្នាទៅនឹងនិយមន័យនៃលីមីត(ផ្នែក2.6)។ យើងសរសេរ $\lim\limits_{n\to\infty}$ ដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ជាទូទៅយើងបាន $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ។ ពេលដែលយើងសរសេរ $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\frac{1}{3}$ មានន័យថាយើងធ្វើអោយ R_n ខិតជិត $\frac{1}{3}$ ដោយយក n ធំគ្រប់គ្រាន់។

ដូច្នេះយើងបាន

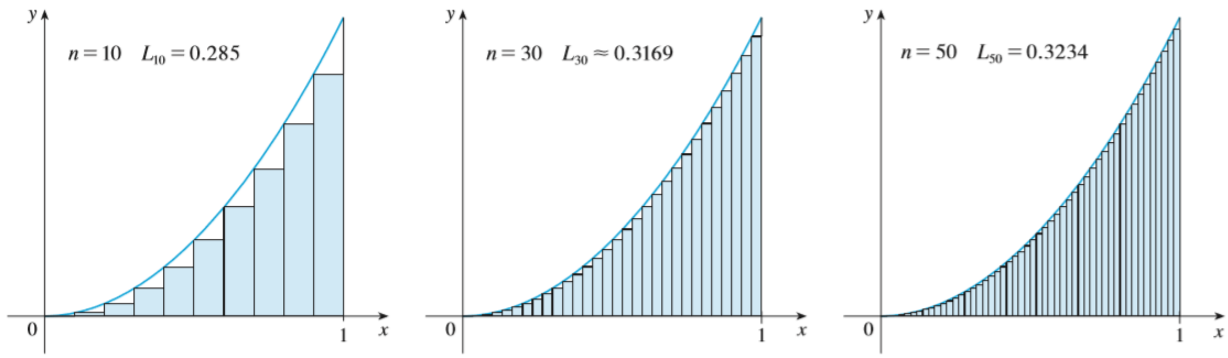
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

បង្ហាញថាផលបូកក្រោមក៏ខិតទៅរក $\frac{1}{3}$ ដែរ ដែល $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\frac{1}{3}$ ។ ពីរូបទី8និងទី9បានបង្ហាញថាបើ n កើនឡើងទាំង L_n, R_n បានក្លាយជាការប៉ាន់ស្មានកាន់តែប្រសើរឡើងចំពោះផ្ទៃក្រឡា S ។ ដូច្នេះយើងកំណត់ផ្ទៃក្រឡា A ជាលីមីតនៃផលបូកផ្ទៃនៃចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មាននោះ។ គេបាន

$$A=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}L_n=\frac{1}{3}$$

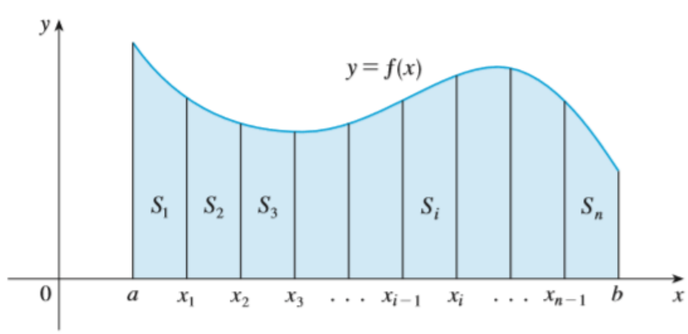


រូបទី8 ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំបញ្ជាក់ពីផលបូកកំណើនព្រោះ $f(x)=x^2$ កើនឡើង



រូបទី9 ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេងបញ្ជាក់ពីផលបូកក្រោមព្រោះ $f(x)=x^2$ កើនឡើង។

តាមគំនិតក្នុងឧទាហរណ៍1និង2 ទូទៅជាងផ្ទៃក្រឡា S ចំពោះរូបទី1។ យើងចាប់ផ្តើមបែងចែក S ជា n ផ្នែកធ្លូត $S_1,S_2,...,S_n$ ដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នាដូចរូបទី10។



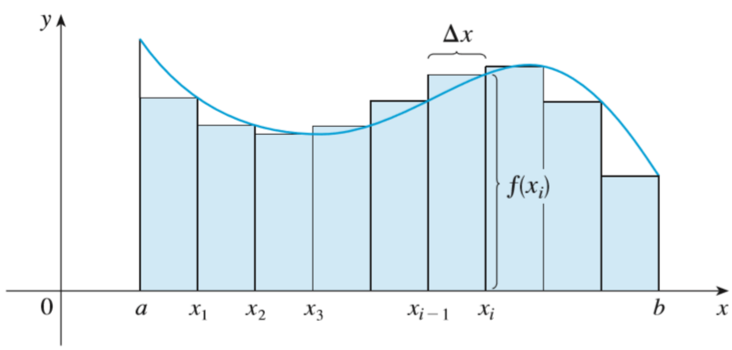
ទទឹងនៅចន្លោះ $[a,b]$ គឺ $b-a$ ដូចនេះទទឹងនៃផ្នែកធ្លូតនីមួយៗដែលមានចំនួន n គឺ $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$

ផ្ទៃកធ្លូតទាំងនេះចែកចន្លោះ $[a,b]$ ជាចន្លោះរងចំនួន n គឺ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],...,[x_{n-1},x_n]$ ដែល $x_0=a$ ហើយ $x_n=b$ ចំណុចចុងខាងស្តាំនៃចន្លោះរងគឺ

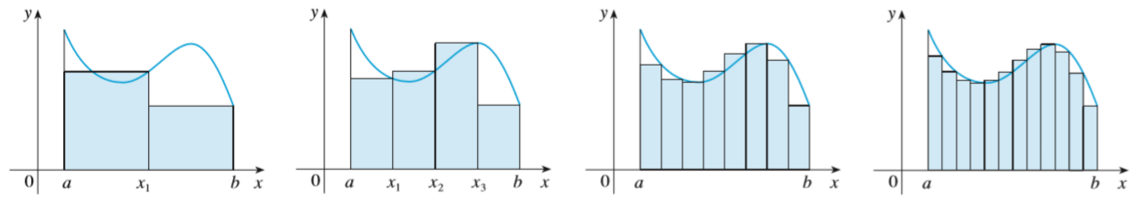
$$x_1=a+\Delta x$$
$$x_2=a+2\Delta x$$
$$x_3=a+3\Delta x$$
$$\vdots$$

ធ្វើការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃកធ្លូតទី i គឺ S_i ដោយចតុកោណដែលមានទទឹង Δx ហើយនឹងកម្ពស់ $f(x_1)$ ដែលតម្លៃនៃ f នៅចំណុចបញ្ចប់(មើលរូបទី11)។ បន្ទាប់មកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណទី i គឺ $f(x_1)\Delta x$ ។ បើយើងគិតឲ្យស៊ីជម្រៅផ្ទៃក្រឡា S ជាការប៉ាន់ស្មានដោយផលបូកនៃផ្ទៃចតុកោណកែងទាំងនោះដែល

$$R_n=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x$$



រូបទី12បង្ហាញពីការប៉ាន់ស្មាននេះចំពោះ $n=2,4,8$ និង 12 ។ ចំណាំការប៉ាន់ស្មាននេះកាន់តែល្អប្រសើរឡើងកាលណាចំនួនផ្ទៃកធ្លូតកើនឡើង $n\to\infty$ ។ ដូច្នេះយើងកំណត់ផ្ទៃក្រឡា A នៃ S តាមវិធី

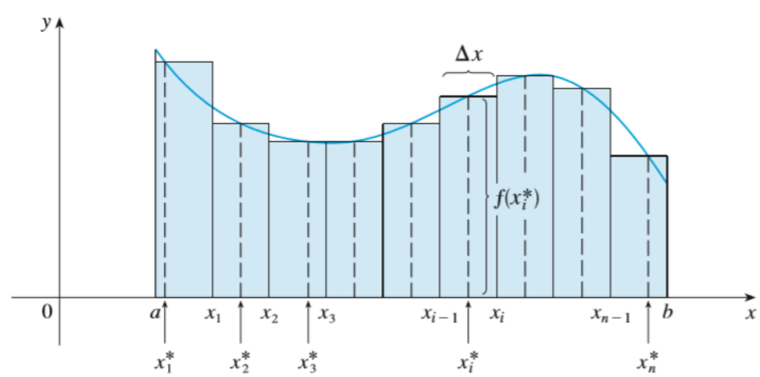


2 និយមន័យ ផ្ទៃក្រឡា A នៃផ្នែក S ដែលលាតសន្ធឹងក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ f ជាលីមីតផលបូកនៃការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង៖

$$A=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x\right]$$

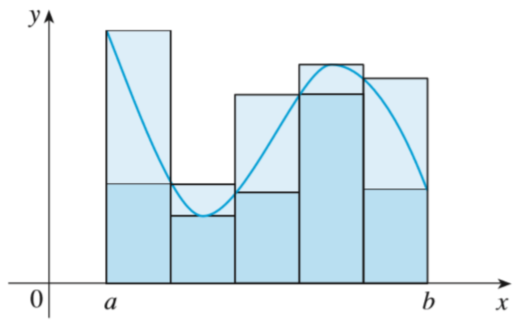
វាអាចត្រូវបានបង្ហាញលីមីតក្នុងនិយមន័យទី2តែងតែ(exists)ចាប់តាំងពីយើងសន្មតថា f ជាអនុគមន៍ជាប់។ វាបានបង្ហាញថាយើងទទួលបានតម្លៃដូចគ្នាប្រសិនបើប្រើចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង៖

3 $$A=\lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\Delta x+f(x_2^*)\Delta x+\ldots+f(x_n^*)\Delta x\right]$$



ចំណាំ វាត្រូវបានបង្ហាញថានិយមន័យសមមូលនៃផ្ទៃក្រឡាគឺ៖ A ជាចំនួនតែមួយគត់ដែលតូចជាងផលបូកលើ និងធំជាងផលបូកក្រោម។ យើងបានឃើញឧទាហរណ៍ទី1 និងទី2 ជាឧទាហរណ៍ដែលផ្ទៃក្រឡា$\left(A=\dfrac{1}{3}\right)$ ជាប់រវាងគ្រប់ផលបូកនៃការប៉ាន់ស្មានខាងឆ្វេង L_n និងគ្រប់ផលបូកនៃការប៉ាន់ស្មានខាងស្តាំ R_n អនុគមន៍ក្នុងឧទាហរណ៍ទាំងនោះ៖ $f(x)=x^2$ កើនឡើងលើ $[0,1]$ ហើយផលបូកក្រោមកើតឡើងពីចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង និងផលបូកលើកើតពីចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំមើលរូបទី8និង

ទី9)។ ជាទូទៅយើងបង្កើតផលបូកខាងលើ និងខាងក្រោមដោយជ្រើសរើសចំណុច x_i^* ដូច្នេះ $f\left(x_i^*\right)$ ជាតម្លៃអប្បបរមា(និងអតិបរមា) នៃ f លើចន្លោះរងទី i ។ (មើលរូបទី14និងលំហាត់7-8)។



រូបទី14 lower sums (ចតុកោណកែងខ្លី)

និង upper sums(ចតុកោណកែងវែង)

យើងប្រើប្រាស់ស៊ិចម៉ាដើម្បីសរសេរផលបូកធ្វើអោយវាកាន់តែបង្រួម។ ឧទាហរណ៍

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = f\left(x_1\right)\Delta x + f\left(x_2\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n\right)\Delta x$$

ដូចនេះកន្សោមនៃផ្ទៃក្រឡាក្នុងឧទាហរណ៍ទី 2,3និង4 អាចសរសេរ

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

យើងក៏អាចសរសេររូបមន្តទី1ឡើងវិញតាមវិធី៖

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

ឧទាហរណ៍3 តាង A ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកដែលលាតសន្ធឹងក្រោមក្រាប $f\left(x\right)=e^{-x}$ ចន្លោះ $x=0$ និង $x=2$ ។

(a) ប្រើប្រាស់ចំណុចចុងខាងស្តាំរកលីមីត A ។ មិនត្រូវប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃលីមីតទេ។

(b) ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃដោយយកចំណុចគម្រូជាចំណុចកណ្ដាលចន្លោះរងទី 4និងបន្ទាប់មក ចន្លោះរងទី 10។

ដំណោះស្រាយ

(a) តាង $a=0$ និង $b=2$ ទទឹងនៃ(ចន្លោះរង)គឺ

$$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

ដូចនេះ $x_1=\frac{2}{n}, x_2=\frac{4}{n}, x_3=\frac{6}{n}, \quad x_i=\frac{2i}{n}$ និង $x_n=\frac{2n}{n}$ ។ ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មានគឺ

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x \\ &= e^{-x_1}\Delta x+e^{-x_2}\Delta x+...+e^{-x_n}\Delta x \\ &= e^{\frac{-2}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)+e^{\frac{-4n}{n}}\left(\frac{2}{n}\right)+...+e^{\frac{-2n}{n}}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

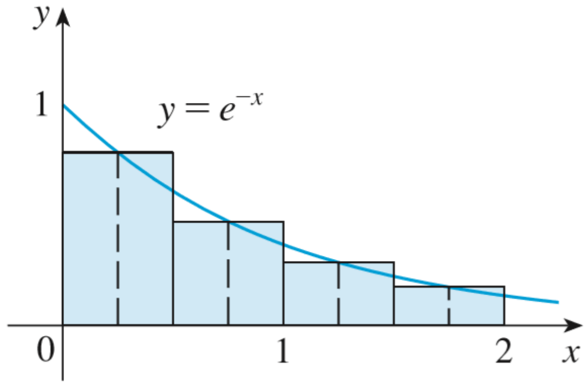
យោងទៅតាមនិយមន័យទី2 ផ្ទៃក្រឡាគឺ

$$A=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(e^{\frac{-2}{n}}+e^{\frac{-4}{n}}+e^{\frac{-6}{n}}+...+e^{\frac{-2n}{n}}\right)$$

ប្រើប្រាស់និមិត្តសញ្ញាស៊ិចម៉ាយើងអាចសរសេរ

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{-2i}{n}}$$

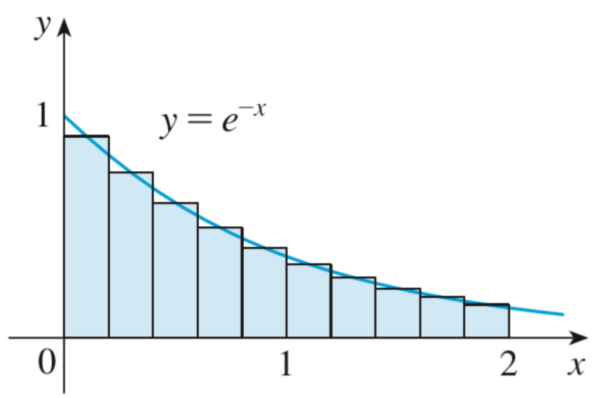
វាពិបាកដើម្បីរកតម្លៃជាក់លាក់នៃលីមីតនេះដោយដៃ ប៉ុន្តែដោយជំនួយនៃប្រពន្ធ័ពីជគណិតក្នុងកុំព្យូទ័រ វាមិនពិបាកទេ(មើលឧទាហរណ៍28)។ ក្នុងផ្នែក 5.3 យើងនឹងអាចស្វែងរក A កាន់តែងាយស្រួលដោយប្រើប្រាស់វិធីផ្សេងៗគ្នា។



(b) $n=4$ ចន្លោះរងនៃទទឹងស្មើ $\Delta x = 0.5$ គឺ $[0,0.5],[0.5,1],[1,1.5]$ និង $[1.5,2]$ ។ ចំណុចកណ្ដាលនៃចន្លោះរងគឺ $x_1^* = 0.25, x_2^* = 0.75, x_3^* = 1.25,$ និង $x_4^* = 1.75$ ហើយផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មានទាំងបួន(មើលរូបទី15) គឺ

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f\left(x_i^*\right)\Delta x \\
&= f\left(0.25\right)\Delta x + f\left(0.75\right)\Delta x + f\left(1.25\right)\Delta x + f\left(1.75\right)\Delta x \\
&= e^{-0.25}\left(0.5\right) + e^{-0.75}\left(0.5\right) + e^{-1.25}\left(0.5\right) + e^{-1.75}\left(0.5\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557
\end{aligned}
$$

ដូចនេះការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាគឺ $A \approx 0.8557$



$n=10$ ចន្លោះរង គឺ $[0,0.2],[0.2,0.4],...,[1.8,2]$ ហើយចំណុចកណ្ដាលគឺ $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, ..., x_4^* = 1.9$ ដូចនេះ

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\Delta x + f(0.3)\Delta x + f(0.5)\Delta x + \ldots + f(1.9)\Delta x$$
$$= 0.2\left(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \ldots + e^{-1.9}\right) \approx 0.8632$$

ក្នុងរូបទី16ការប៉ាន់ស្មានប្រសើរជាងការប៉ាន់ស្មានជាមួយ $n = 4$

ចំណោទចម្ងាយ

ឥឡូវគោះពិចារណាទៅលើចំណោទចម្ងាយ៖រកចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយវត្ថុមួយកំឡុងពេលជាក់លាក់មួយ ប្រសិនបើល្បឿននៃវត្ថុត្រូវបានដឹងគ្រប់ពេលទាំងអស់។ ប្រសិនបើល្បឿនថេរ នោះចំណោទចម្ងាយងាយស្រួលដោះស្រាយតាមរូបមន្ត៖

ចម្ងាយចរ=ល្បឿន$\times$រយៈពេល

ប៉ុន្តែប្រសិនបើល្បឿនប្រែប្រួល វាមិនងាយស្រួលដើម្បីរកចម្ងាយចរក្នុងការធ្វើដំណើរទេ។ យើងពិនិត្យមើលចំណោទតាមឧទាហរណ៍បន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍4 ឧបមាថាឧបករណ៍វាស់ចម្ងាយលើឡានរបស់យើងខូច ហើយយើងចង់ប៉ាន់ស្មានចម្ងាយបើកបរក្នុងរយៈពេល 30វិនាទី។ យើងយកឧបករណ៍វាស់ល្បឿនមកបកស្រាយរាល់ 5វិនាទីម្តង ហើយកត់ត្រាក្នុងតារាងបន្ទាប់៖

រយៈពេល(s)	0	5	10	15	20	25	30
ល្បឿន$\left({mi}/{h}\right)$	17	21	24	29	32	31	28

( )

រយៈពេល (s)	0	5	10	15	20	25	30
ល្បឿន $\left(ft/s\right)$	25	31	35	43	47	46	41

កំឡុងពេល 5វិនាទីដំបូងល្បឿនមិនផ្លាស់ប្តូរទាល់តែសោះ ដូច្នេះយើងអាចប៉ាន់ស្មានចម្ងាយធ្វើដំណើរក្នុងកំឡុងពេលនោះដោយសន្មតល្បឿនថេរ។ ប្រសិនបើយកល្បឿនក្នុងកំឡុងពេលចន្លោះល្បឿនដំបូង $25\ ft/s$ នោះយើងទទួលបានតម្លៃប្រហែលនៃចម្ងាយធ្វើដំណើរកំឡុងពេល 5វិនាទី៖

$$25\ ft/s \times 5s = 125\ ft$$

ស្រដៀងគ្នាដែរកំឡុងចន្លោះលើកទីពីរល្បឿនប្រហែលជាមិនប្រែប្រួលទេ ហើយយើងយកល្បឿនពេល $t = 5s$ ។ ការប៉ាន់ស្មានចម្ងាយធ្វើដំណើរពី $t = 5s$ ទៅ $t = 10s$ គឺ

$$31\ ft/s \times 5s = 155\ ft$$

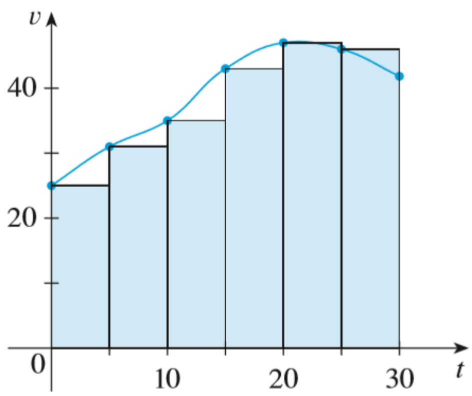
ប្រសិនបើយើងធ្វើការប៉ាន់ស្មានស្រដៀងគ្នាចន្លោះពេលដ៏ទៃទៀត យើងទទួលបានការប៉ាន់ស្មានចម្ងាយចរសរុបគឺ

$$(25\times5)+(31\times5)+(35\times5)+(43\times5)+(47\times5)+(46\times5)=1135\,ft$$

យើងអាចប្រើប្រាស់ល្បឿនពេលបញ្ចប់ក្នុងកំឡុងពេលនីមួយៗជំនួសល្បឿនពេលចាប់ផ្តើមជាផលបូកល្បឿនថេរ។ ដូច្នេះការប៉ាន់ស្មានគឺ

$$(31\times5)+(35\times5)+(43\times5)+(47\times5)+(46\times5)+(41\times5)=1215\,ft$$

ប្រសិនបើយើងចង់បានការប៉ាន់ស្មានកាន់តែត្រឹមត្រូវ យើងអាចយកការបកស្រាយល្បឿនរៀងរាល់ 2វិនាទី រឺគ្រប់វិនាទី។



ប្រហែលជាការគណនាក្នុងឧទាហរណ៍ទី4 រំលឹកអ្នកពីផលបូកដែលយើងប្រើប្រាស់ពីមុនដើម្បីប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡា។ ភាពស្រដៀងគ្នាត្រូវបានពន្យល់ពេលយើងគូសក្រាបព្រាងអនុគមន៍ល្បឿននៃឡានក្នុងរូបទី17 ហើយគូរចតុកោណកែងដែលកម្ពស់ជាល្បឿនដំបូងសម្រាប់ចន្លោះពេលនីមួយៗ។ ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងដំបូងគឺ $25\times5=125$ ដែលជាការប៉ាន់ស្មានរបស់យើងសម្រាប់ចម្ងាយចរក្នុង រយៈពេល 5វិនាទីផងដែរ។ ពិតណាស់ផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងនីមួយៗអាចបកស្រាយជាចម្ងាយ ព្រោះកម្ពស់តំណាងអោយល្បឿន ហើយទទឹងតំណាងរយៈពេល។ ផលបូកនៃផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងក្នុងរូបទី17គឺ $L_6=1135$ ដែលជាការប៉ាន់ស្មានដំបូងសម្រាប់ចម្ងាយចរសរុប។

ជាទូទៅឧបមាថាវត្ថុផ្លាស់ទីដោយល្បឿន $v=f(t)$ ដែល $a\le t\le b$ និង $f(t)\ge 0$ (ដូច្នេះវត្ថុតែងតែផ្លាស់ទីតាមទិសដៅវិជ្ជមាន)។ យើងយកល្បឿនមកបកស្រាយពេល $t_0(=a),t_1,t_2,...,t_n(=b)$ ដូច្នេះការប៉ាន់ស្មានល្បឿនមិនប្រែប្រួលទេនៅចន្លោះរងនីមួយៗ។ ប្រសិនបើរយៈពេលនៅចន្លោះនីមួយស្មើគ្នា នោះរយៈពេលចន្លោះតទៀតតាងដោយ $\Delta t={(b-a)}/{n}$ ។ កំឡុងចន្លោះពេលដំបូងល្បឿនដែលប៉ាន់ស្មានគឺ $f(t_0)$ ហើយចម្ងាយចរប្រហែល $f(t_0)\Delta t$ ។ ស្រដៀងគ្នាដែរ ចម្ងាយចរកំឡុងពេលលើកទី2 ចន្លោះរងប្រហែល $f(t_1)\Delta t$ ហើយចម្ងាយចរសរុបកំឡុងចន្លោះពេល$[a,b]$ ប្រហែល

$$f(t_0)\Delta t+f(t_1)\Delta t+...+f(t_{n-1})\Delta t=\sum_{i=1}^{n}f(t_{i-1})\Delta t$$

ប្រសិនបើយើងប្រើប្រាស់ល្បឿនចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំជំនួសអោយចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង នោះការប៉ាន់ស្មានចម្ងាយចរសរុបរបស់យើងក្លាយជា

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + ... + f(t_n)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$

យើងវាស់ល្បឿនកាន់តែញឹកញាប់ ការប៉ាន់ស្មានរបស់យើងកាន់តែត្រឹមត្រូវ ដូច្នេះវាហាក់ដូចជាអាចជឿទុកចិត្តបានថាចម្ងាយពិតប្រាកដ d ធ្វើដំណើរជា $\lim$ នៃកន្សោម

$$d = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t$$ ។

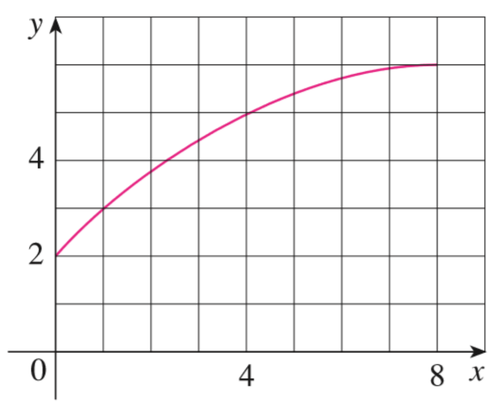
យើងនឹងឃើញក្នុងចំណុច5.4ដែលនេះជាការពិត

ព្រោះសមីការ5មានទម្រង់ជាកន្សោមផ្ទៃក្រឡា ក្នុងសមីការ2 និង3 វាធ្វើតាមចម្ងាយចរស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ល្បឿន។ ក្នុងមេរៀនទី6 យើងនឹងឃើញពីបរិមាណចំណាប់អារម្មណ៍ដ៏ទៃទៀតក្នុងធម្មជាតិ និងវិទ្យាសាស្ត្រសង្គម ។

លំហាត់

1. (a) បកស្រាយតម្លៃនៃក្រាប f ដែលអោយ ប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងដើម្បីរកការប៉ាន់ស្មានផ្នែកខាងក្រោម និងផ្នែកខាងលើ ចំពោះផ្ទៃក្រឡាខាងក្រោមក្រាប f ពី $x=0$ ទៅ $x=8$ ។ បង្ហាញរូបចតុកោណនៃមួយៗដែលអ្នកប្រើ។

(b) រកការប៉ាន់ស្មានថ្មីដោយប្រើប្រាស់ចតុកោណកែង8 ក្នុងករណីនីមួយៗ។



2. (a) ប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងចំនួន 6 ស្វែងរកការប៉ាន់ស្មាននៃប្រភេទនីមួយៗចំពោះផ្នែកខាងក្រោមផ្ទៃក្រឡាដែលអោយដោយក្រាប f ពី $x=0$ ទៅ $x=12$ ។

(i) L_6 (ចំណុចគំរូនៅចំណុចចុងខាងឆ្វេង)

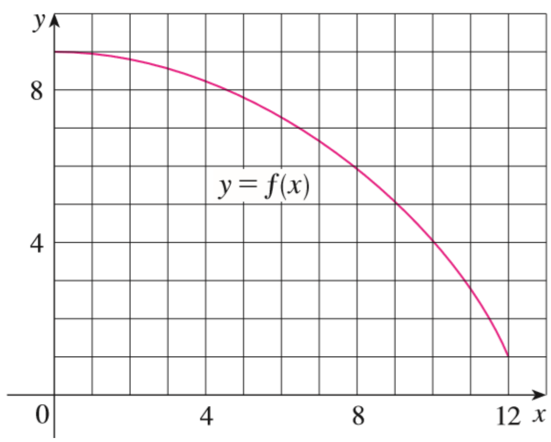
(ii) R_6 (ចំណុចគម្រូនៅចំណុចចុងខាងស្តាំ)

(iii) M_6 (ចំណុចគម្រូនៅចំណុចកណ្តាល)

(b)តើ L_6 ក្រោមការប៉ាន់ស្មាន ឬ លើការប៉ាន់ស្មាននៃផ្ទៃក្រឡាពិត ?

(c)តើ R_6 ក្រោមការប៉ាន់ស្មាន ឬ លើការប៉ាន់ស្មាននៃផ្ទៃក្រឡាពិត ?

(d)តើតម្លៃលេខណាមួយ L_6, R_6, M_6 ដែលអោយតម្លៃប៉ាន់ស្មានល្អបំផុត ? ចូរពន្យល់។



3. (a) ការប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រោមក្រាប $f(x)=\cos x$ ពី $x=0$ ទៅ $x=\frac{\pi}{2}$ ប្រើប្រាស់ការប៉ាន់ស្មានចតុកោណកែងចំនួនបួន និងចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ។ គូសក្រាបហើយនឹងចតុកោណកែង។ តើការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកនៅក្រោមការប៉ាន់ស្មានរឺលើការប៉ាន់ស្មាន ?

(b) តាមចំណុច(a) ប្រើប្រាស់ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង។

4. (a) ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប $f(x)=\sqrt{x}$ ពី $x=0$ ទៅ $x=4$ ដោយប្រើប្រាស់ការប៉ាន់ស្មានចតុកោណកែង និងចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ។ គូសក្រាបហើយនឹងចតុកោណកែង។តើការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកនៅក្រោមការប៉ាន់ស្មានរឺលើការប៉ាន់ស្មាន ?

(b)តាមចំណុច(a) ប្រើប្រាស់ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង។

5. (a) ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប $f(x)=1+x^2$ ពី $x=-1$ ទៅ $x=2$ ប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងបី និងចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ។ បន្ទាប់មកបង្ហាញការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកដោយប្រើចតុកោណកែង6។ គូសខ្សែកោងហើយនឹងចតុកោណដែលប៉ាន់ស្មាន។

(b)តាមចំណុច(a) ប្រើប្រាស់ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង។

(c)តាមចំណុច(a) ប្រើប្រាស់ចំណុចកណ្តាល។

(d)ពីការបង្ហាញរូបភាពរបស់អ្នកក្នុងផ្នែក $(a)-(c)$ តើណាមួយដែលហាក់ដូចជាការប៉ាន់ស្មានល្អបំផុត?

6. (a) ក្រាបនៃអនុគមន៍

$$f(x)=x-2\ln(x),1\le x\le 5$$

(b)ប៉ាន់ស្មានផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប f ប្រើប្រាស់ការប៉ាន់ស្មានចតុកោណកែងចំនួនបួន ហើយយកចំណុចគម្រូ

(i) ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ (ii) ចំណុចកណ្តាល។ ក្នុងករណីនីមួយៗគូសខ្សែកោង និងចតុកោណកែង។

(c) ធ្វើអោយការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកក្នុងផ្នែក(b) កាន់តែប្រសើរឡើងដោយប្រើប្រាស់ចតុកោណកែងចំនួន8។

7. វាយតម្លៃផលបូកខាងលើ និងខាងក្រោមចំពោះ $f(x)=2+\sin(x),0\le x\le\pi$ ដោយ $n=2,4,$ និង 8 ។ បង្ហាញជាមួយដ្យាក្រាមដូចក្នុងរូបទី14។

8. វាយតម្លៃផលបូកខាងលើ និងខាងក្រោមចំពោះ $f(x)=1+x^2,-1\le x\le 1$ ដោយ $n=3$ និង 4 ។បង្ហាញជាមួយដ្យាក្រាមដូចក្នុងរូបទី14។

9-10. ជាមួយនិងកម្មវិធីគណនា(រឺកុំព្យូទ័រ)។ វាអាចវាយតម្លៃកន្សោមសម្រាប់ផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មាន សូម្បីតែតម្លៃធំ n (using looping),(On a TI use the Is> command or a For-EndFor loop,on a Casio use Isz ,on an HP or in BASIC use a FOR-NEXT loop)។ គណនាផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលប៉ាន់ស្មានប្រើប្រាស់ចន្លោះរងស្មើៗគ្នា និងចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំចំពោះ $n=10,30,50$ និង 100 ។ បន្ទាប់មកប៉ាន់ស្មានតម្លៃនៃផ្ទៃក្រឡាពិតប្រាកដ។

9.តំបន់ក្រោម $y = x^4$ ពី 0 ទៅ 1

10.តំបន់ក្រោម $y = \cos x$ ពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$

11.ការគណនាតាមប្រពន្ធ័ពីជគណិតមួយចំនួន

(a) ប្រសិនបើ $f(x) = \ln x, 1 \le x \le 4$ ប្រើប្រាស់ commends discussed ក្នុងលំហាត់ទី11 ដើម្បីស្វែងរកផលបូនឆ្វេង និងផលបូកស្តាំចំពោះ $n = 10, 30$ និង 50 ។

(b) បង្ហាញដោយក្រាបនូវចតុកោណកែងក្នុងផ្នែក(a)

(c) បង្ហាញផ្នែកខាងក្រោមនៃផ្ទៃក្រឡាពិតប្រាកដ f លាតសន្ធឹងចន្លោះ 2.50 និង 2.59 ។

13. ល្បឿនអ្នករត់កើនឡើងជាលំដាប់កំឡុងពេលបីវិនាទីដំបូងនៃការប្រណាំង។ ល្បឿនរបស់នាងនៅចន្លោះពេលពាក់កណ្តាលវិនាទីត្រូវបានផ្តល់អោយដូចក្នុងតារាង។ រកការប៉ាន់ស្មានលើ និងប៉ាន់ស្មានក្រោមចំពោះចម្ងាយដែលនាងធ្វើដំណើរកំឡុងពេលបីវិនាទី។

$t(s)$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$v\left(\frac{ft}{s}\right)$	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

14. ឧបករណ៍វាស់ល្បឿនបានបកស្រាយពីល្បឿនម៉ូតូនៅចន្លោះពេល $12s$ ត្រូវបានផ្តល់អោយដូចក្នុងតារាង។

(a) ប៉ាន់ស្មានចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយម៉ូតូនៅកំឡុងពេលនេះដោយប្រើល្បឿននៅខាងដើមចន្លោះពេល។

(b) ផ្តល់ការប៉ាន់ស្មានដទៃទៀតដោយប្រើប្រាស់ល្បឿននៅក្នុងកំឡុងពេលបញ្ចប់។

(c) តើការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកក្នុងផ្នែក(a) និង(b)ជាការប៉ាន់ស្មានលើ និងក្រោមរឺទេ? ចូរពន្យល់

$t(s)$	0	12	24	36	48	60
$v\left(\frac{ft}{s}\right)$	30	28	25	22	24	27

15. ប្រេងលេចធ្លាយចេញពីធុងក្នុងអត្រាមួយ $r(t)$ លីត្រក្នុងមួយម៉ោង។ ចំនួននេះកើនឡើងនៅពេលពេលវេលាកន្លងផុតទៅហើយតម្លៃនៃអត្រានៅចន្លោះពេលនោះត្រូវបានបង្ហាញក្នុងតារាង។ រកការប៉ាន់ស្មានទាប និងខ្ពស់ចំពោះបរិមាណប្រេងសរុបដែលលេចចេញមក។

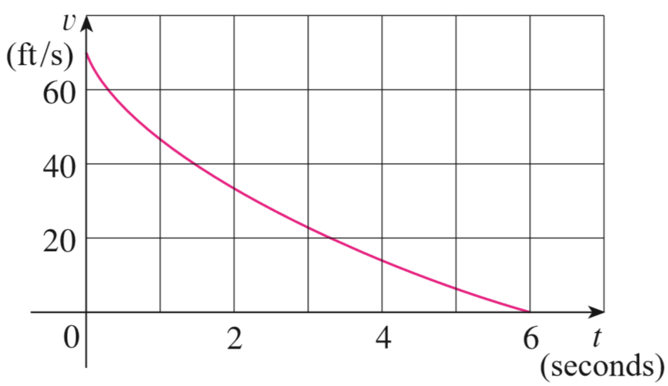
$t(h)$	0	2	4	6	8	10
$r(t)\left(\frac{L}{h}\right)$	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

16.ពេលដែលយើងប៉ាន់ស្មានចម្ងាយពីទិន្នន័យល្បឿន ពេលខ្លះវាចាំបាច់ណាស់ដើម្បីប្រើរយៈពេល $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ ដែលមិននៅចន្លោះពេលស្មើគ្នាទេ។ យើងនៅតែអាចប៉ាន់ស្មានចម្ងាយដោយប្រើប្រាស់កំឡុងពេល $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ។ ឧទាហរណ៍នៅថ្ងៃទី7 ខែឧសភា ឆ្នាំ1992 យានអវកាសEndeavourត្រូវបានដាក់អោយដំណើរការនៅលើបេសកកម្ម STS-49 គោលបំណងតំឡើងម៉ូទ័រ Perigee kick ថ្មីនៅក្នុងផ្កាយរណបគមនាគមន៍។ តារាងដែលផ្តល់ដោយអង្គការណាសាផ្តល់ទិន្នន័យល្បឿនចំពោះការហោះហើររវាងការចុះចត និងការធ្លាក់ចុះនៃគ្រាប់រ៉ុក្កែត។ ប្រើទិន្នន័យទាំងនេះដើម្បីប៉ាន់ស្មានកម្ពស់ខាងលើផ្ទៃផែនដីនៃ Endeavour នៅ 62វិនាទីបន្ទាប់ពីចុះចត។

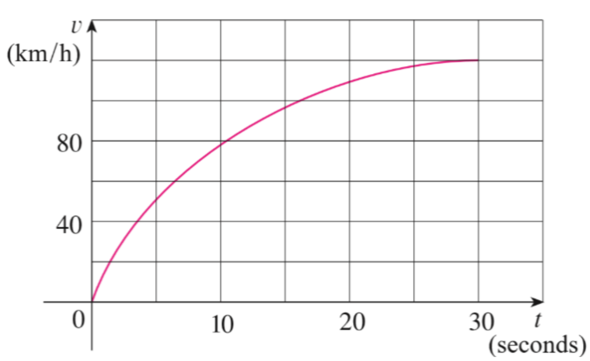
ព្រឹត្តិការណ៍	រយៈពេល	ល្បឿន $\left(\frac{ft}{s}\right)$
បើកដំណើការ	0	0
Begin roll maneuver	10	185

End roll maneuver	15	319
បិទបើក 80%	20	447
បិទបើក 67%	32	742
បិទបើក 104%	59	1325
Maximum dynamic pressure	62	1445
Sulid rocket booster separation	125	4151

17. ក្រាបល្បឿននៃហ្វ្រាំងឡានត្រូវបានបង្ហាញ។ ប្រើប្រាស់វាដើម្បីប៉ាន់ស្មានចម្ងាយធ្វើដំណើរដោយឡានខណៈពេលហ្វ្រាំងត្រូវបានអនុវត្ត។



18. ក្រាបល្បឿននៃឡានបង្កើនល្បឿនពីពេលឈប់សម្រាកទៅល្បឿន $120 \, {}^{km}\!/_{h}$ ក្នុងកំឡុងពេល 30វិនាទីត្រូវបានបង្ហាញ។ ចូរប៉ាន់ស្មានចម្ងាយធ្វើដំណើរកំឡុងពេលនោះ។



19-21. ប្រើនិយមន័យទី2ដើម្បីរកកន្សោមផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប f ជាលីមីត។ មិនបាច់គណនាតម្លៃនៃលីមីតទេ។

19. $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^{2}+1}, 1\le x\le 3$

20. $f\left(x\right)=x^{2}+\sqrt{1+2x},\ 4\le x\le 7$

21. $f\left(x\right)=\sqrt{\sin x}, 0\le x\le \pi$

22-23. កំណត់តំបន់មួយដែលមានផ្ទៃក្រឡាស្មើនឹងលីមីតដែលអោយ។ ដោយមិនបាច់គណនាលីមីត។

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{n}\left(5+\dfrac{2i}{n}\right)^{10}$ **23.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\pi}{4n}\tan\dfrac{i\pi}{4n}$

24. (a) ប្រើនិយមន័យទី2 ដើម្បីស្វែងរកផ្ទៃក្រោមខ្សែកោង $f\left(x\right)=x^{3}$ ពី 0 ទៅ 1 ជាលីមីត។

(b)តាមរូបមន្តផលបូកគូបចំនួនគត់ពីតួដំបូងដល់តួទី n បានបង្ហាញក្នុងឧបសម្ពន្ធ័E ។ ប្រើវាដើម្បីវាយតម្លៃលីមីតក្នុងផ្នែក(a)។

$$1^{3}+2^{3}+3^{3}+...+n^{3}=\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^{2}$$

25. តាង A ជាផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍កើន f ពី a ទៅ b ហើយតាង L_n និង R_n ជាការប៉ាន់ស្មាន A ជាមួយចន្លោះរង n ដោយប្រើប្រាស់ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំរៀងៗគ្នា។

(a) តើ A, L_n និង R_n មានទំនាក់ទំនងគ្នាដូចម្តេច?

(b) បង្ហាញថា

$$R_n-L_n=\frac{b-a}{n}\left[f\left(b\right)-f\left(a\right)\right]$$

បន្ទាប់មកគូសដ្យាក្រាមដើម្បីបង្ហាញសមីការនេះដោយបង្ហាញថាចតុកោណកែង n តំណាង R_n-L_n អាចត្រូវបានផ្តុំឡើងវិញពីចតុកោណកែងតែមួយដែលផ្ទៃរបស់វាស្ថិតនៅខាងស្តាំ សមីការ ។

(c) សន្និដ្ឋានថា

$$R_n - A < \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a) \right]$$

26. ប្រសិនបើ A ជាផ្ទៃក្រោមខ្សែកោង $y = e^x$ ពី 1 ទៅ 3 ប្រើឧទាហរណ៍ទី 25 ស្វែងរកតម្លៃ n ដែល $R_n - A < 0.0001$ ។

27. (a) បង្ហាញថាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោង $y = x^5$ ពី 0 ទៅ 2 ជាលីមីត។

(b) ប្រើប្រាស់ប្រពន្ធ័ពីជគណិតកុំព្យូទ័រដើម្បីស្វែងរកផលបូកកន្សោមពីផ្នែក(a) ។

(c) វាយតម្លៃលីមីតក្នុងផ្នែក(a)

28. រកផ្ទៃក្រឡាពិតប្រាកដនៃតំបន់ក្រោមក្រាបនៃ $y = e^{-x}$ ពី 0 ទៅ 2 ប្រើប្រាស់ប្រពន្ធ័ពីជគណិតកុំព្យូទ័រដើម្បីស្វែងរកផលបូកកន្សោម ហើយបន្ទាប់មកលីមីតក្នុងឧទាហរណ៍ 3(a)។ ប្រៀបធៀបចម្លើយរបស់អ្នកជាមួយការប៉ាន់ស្មានដែលទទួលបានក្នុងឧទាហរណ៍ 3(b)។

29. រកផ្ទៃក្រឡាពិតប្រាកដក្រោមអក្សរ៍កូស៊ីនុស $y = \cos x$ ពី $x = 0$ ទៅ $x = b$ ដែល $0 \le b \le \frac{\pi}{2}$ (ប្រើប្រពន្ធ័ពីជគណិតកុំព្យូទ័រទាំងតម្លៃផលបូក និង គណនាលីមីត) ។ ជាទូទៅតើផ្ទៃក្រឡាជាអ្វីប្រសិនបើ $b = \frac{\pi}{2}$?

30. (a)តាង A_n ជាផ្ទៃក្រឡាពហុកោណដែលមាន n ជ្រុងស្មើគ្នាចារឹកក្នុងរង្វង់កាំ r ។ ដោយចែកពហុកោណជា n ត្រីកោណប៉ុនៗគ្នាជាមួយកន្លះមុំ $\frac{2\pi}{n}$ ។ បង្ហាញថា

$$A_n = \frac{1}{2} n r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

(b)បង្ហាញថា $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$ [ជំនួយ៖ ប្រើសមីការ 3.3.2]

5.2 អាំងតេក្រាលកំណត់

យើងឃើញថាក្នុងផ្នែក 5.1លីមីតមានទម្រង់

$$\boxed{1} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x \right]$$

កើតឡើងពេលដែលយើងគណនាផ្ទៃក្រឡាតំបន់មួយ។ យើងក៏ឃើញថាវាកើតឡើងពេលដែលយើងព្យាយាមស្វែងរកចម្ងាយចរដោយវត្ថុ។ វាបង្ហាញថាប្រភេទនៃលីមីតដូចគ្នានេះកើតឡើងក្នុងស្ថានភាពជាច្រើន សូម្បីតែនៅពេលដែល f (is not necessarily a positive function)។ ក្នុងជំពូកទី6 និង8 យើងនឹងឃើញថាលីមីតមានទម្រង់ 1 ដែលកើតឡើងក្នុងការស្វែងរកប្រវែងនៃខ្សែកោង បរិមាណនៃអង្គធាតុរឹង ផ្ចិតនៃម៉ាស (force due to water pressure) ហើយនឹងកម្មន្ត ក៏ដូចជាបរិមាណដ៏ទៃទៀត។ ដូច្នេះយើងអោយឈ្មោះពិសេសមួយនៃលីមីតនេះ និងកំណត់។

2. និយមន័យអាំងតេក្រាលកំណត់ ៖ ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍កំណត់ចំពោះ $a \le x \le b$, យើងចែកជាចន្លោះ $[a,b]$ ជា n ចន្លោះរងដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា $\Delta x = (b-a)/n$ ។ យើងតាង $x_o(=a), x_1, x_2, ..., x_n(=b)$ ជាចំណុចបញ្ចប់នៃចន្លោះរងទាំងនោះ ហើយយើងតាង $x_1^*, x_2^*, .., x_n^*$ ជា Sample point ក្នុងចន្លោះរងទាំងនេះ ដូច្នេះ x_i^* ស្ថិតក្នុងចន្លោះរងទី i $[x_{i-1}, x_i]$ ។ ដូចនេះ **អាំងតេក្រាលកំណត់នៃ f ពី a ទៅ b** គឺ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ ចែកលីមីតដែលមាននេះហើយផ្តល់តម្លៃតែមួយចំពោះគ្រប់ជម្រើសដែលអាចធ្វើទៅបាននៃ Sample point ប្រសិនបើវាមានតម្លៃយើងអាចនិយាយបានថា f មានអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ $[a,b]$ ។

អត្ថន័យច្បាស់លាស់នៃលីមីតដែលកំណត់ក្នុងអាំងតេក្រាលគឺ

គ្រប់តម្លៃ $\varepsilon > 0$ មានចំនួនគត់ N ដែល

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \right| < \varepsilon$$

គ្រប់ចំនួនគត់ $n > N$ ហើយគ្រប់តម្លៃនៃ x_i^* ក្នុង $[x_{i-1}, x_i]$

ចំណាំ1 និមិត្តសញ្ញា $\int$ ត្រូវបានបង្កើតដោយ Leibnis ហើយដាក់ឈ្មោះវាថា **សញ្ញាអាំងតេក្រាល(integral sign)។** (it is an elongate S) ហើយវាត្រូវបានជ្រើសរើសព្រោះអាំងតេក្រាលជាផលបូកលីមីត។ ក្នុងការកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ ហៅថា **integrand** ហើយ a និង b ហៅថា**ដែនកំណត់នៃអាំងតេក្រាល(limits of integration)** a ជា **លីមីតក្រោម(lower limit)** និង b ជា **លីមីតលើ(upper limit)** ។ បច្ចុប្បន្ននិមិត្តសញ្ញា dx មិនមានអត្ថន័យផ្ទាល់ខ្លួននោះទេ៖ $\int_a^b f(x)dx$ ជានិមិត្តសញ្ញាមួយ។ dx គ្រាន់តែបង្ហាញថាជាអថេរឯករាជ្យនៃ x ។ នីតិវិធីនៃការគណនាអាំងតេក្រាលហៅថា **integration**

ចំណាំ2 អាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ ជាចំនួន វាមិនអាស្រ័យលើ x ទេ។ ពិតណាស់យើងអាចប្រើអក្សរមួយចំនួនទៀតនៅកន្លែ x ដោយមិនប្រែប្រួលតម្លៃអាំងតេក្រាលឡើយ៖

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr$$

ចំណាំ3 ៖ ផលបូក

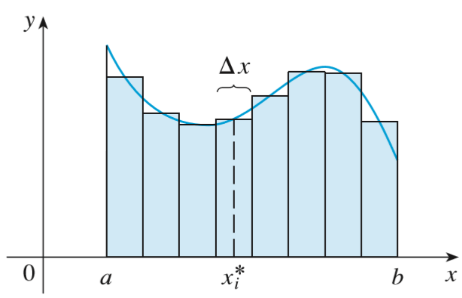
$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$

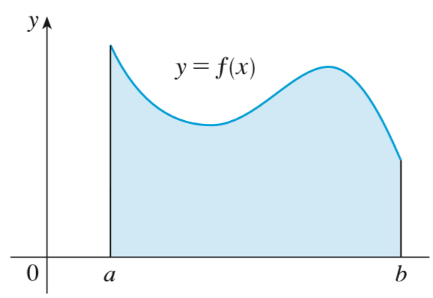
រេម៉ាន (Riemann)

Bernhard Riemann បានទទួលសញ្ញាបត្រ័បណ្ឌិតរបស់គាត់។ ក្រោមការដឹកនាំរបស់Gauss នៅឯសកលវិទ្យាល័យនៃ Gottingen ហើយនៅទីនេះដើម្បីបង្រៀនGauss មិនអោយមានទម្លាប់សរសើរ។ គណិតវិទូដទៃទៀតបាននិយាយពីការច្នៃប្រឌិតសកម្មគណិតគណិតវិទ្យាពិតប្រាកដរបស់រេម៉ាន..................

នោះកើតឡើងក្នុងនិយមន័យ2ដែលអោយឈ្មោះថា **ផលបូករេម៉ាន** (**Riemann sum**) បន្ទាប់ពីគណិតវិទូជនជាតិអាឡឺម៉ង់ Bernhard Riemann (1826-1866)។ ដូច្នេះនិយមន័យទី2និយាយថា អាំងតេក្រាលកំណត់ នៃអនុគមន៍អាំងតេក្រាលមួយអាចប៉ាន់ស្មានក្នុងកម្រិតណាមួយដែលត្រឹមត្រូវដោយ ផលបូករេម៉ាន។

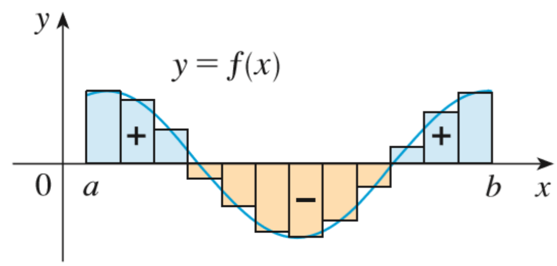
យើងដឹងហើយថាប្រសិនបើ f វិជ្ជមាននោះផលបូករេម៉ានអាចបកស្រាយជាផលបូកផ្ទៃក្រឡានៃការប៉ាន់ស្មានចតុកោណកែង(មើលរូបទី1)។ ដោយប្រៀបធៀបនិយមន័យ2ជាមួយនិងនិយមន័យនៃផ្ទៃក្រឡាក្នុងផ្នែក5.1 យើងឃើញថាអាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ អាចបកស្រាយថាជាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោង $y = f(x)$ ពី a ទៅ b ។(មើលរូបទី2)។





រូបទី1(FIGURE 1) ប្រសិនបើ $f(x) \geq 0$ នោះផលបូករីម៉ានគឺ $\sum f(x_i^*)\Delta x$ ជាផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែង។

រូបទី2(FIGURE 2) អាំងតេក្រាល $\int_a^b f(x)dx$ ជាផ្ទៃក្រឡាខាងក្រោមខ្សែកោង $y = f(x)$ ពី a ទៅ b

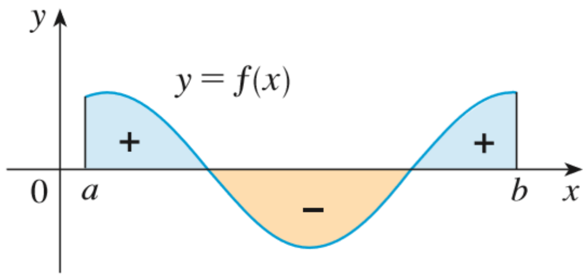


ប្រសិនបើ f មានតម្លៃទាំងវិជ្ជមាន និងអវិជ្ជមានដូចក្នុងរូបទី3 នោះផលបូករីម៉ានជាផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលនៅពីលើអក្សអាប់ស៊ីស និងផលដកផ្ទៃក្រឡាដែលនៅក្រោមអក្សអាប់ស៊ីស (ផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពណ៌ខៀវដកនិងផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពណ៌មាស)

ពេលដែលយើងយក(limit of such) ផលបូករីម៉ាន យើងទទួលបានដំណោះស្រាយដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី4។ អាំងតេក្រាលកំណត់មួយអាចបកស្រាយជា **net area** ,this is, a difference of area ៖

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$$

ដែល A_1 ជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកខាងលើអក្សអាប់ស៊ីសហើយក្រោមក្រាប f និង A_2 ជាផ្ទៃខាងក្រោមអក្សអាប់ស៊ីសហើយលើក្រាប f ។



ចំណាំ4 ទោះបីជាយើងកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ ដោយចែក $[a,b]$ ជាចន្លោះរងដែលមានទទឹងស្មើៗគ្នា (there are situation in which it is advantageous to work ជាមួយចន្លោះរងដែលមានទទឹងមិនស្មើគ្នា។ ជាឧទាហរណ៍ក្នុងលំហាត់ទី16 ផ្នែក5.1 NASA បានផ្តល់ទិន្នន័យល្បឿននៅចន្លោះពេលមិនស្មើគ្នា ប៉ុន្តែយើងនៅតែអាចប៉ាន់ស្មានចម្ងាយចរបាន។ ហើយមានវិធីសាស្ត្រសម្រាប់បញ្ចូលលេខដែលមានប្រយោជន៍ចំពោះចន្លោះរងមិនស្មើគ្នា។

ប្រសិនបើចន្លោះរងមានទទឹង $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ យើងត្រូវធ្វើអោយប្រាកដថាទទឹងទាំងនោះខិតជិត 0 ក្នុងលីមីត។ ករណីនេះកើតឡើងប្រសិនបើទទឹងមានតម្លៃធំបំផុត អតិបរមា Δx_i ខិតជិត 0 ។ ដូច្នេះក្នុងករណីនេះនិយមន័យនៃអាំងតេក្រាលកំណត់ក្លាយជា៖

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

ចំណាំ5 យើងកំណត់អាំងតេក្រាលកំណត់ចំពោះអនុគមន៍បាន ប៉ុន្តែមិនមែនគ្រប់អនុគមន៍សុទ្ធតែអាចធ្វើបាននោះទេ(មើលលំហាត់ទី 69-70)។ តាមទ្រឹស្តីបទបានបង្ហាញថាអនុគមន៍ដែលកើតឡើងជាទូទៅបំផុតនៅក្នុង(fact integrable)។ ទ្រឹស្តីនេះត្រូវបានបង្ហាញក្នុងវគ្គសិក្សាកម្រិតខ្ពស់។

3. ទ្រឹស្តីបទ ប្រសិនបើ f ជាប់ $[a,b]$ រឺប្រសិនបើ f (has only a finite number of jump discontinuities) ដូច្នេះ f (is integrable) លើ $[a,b]$ នោះអាំងតេក្រាលកំណត់គឺ $\int_a^b f(x)dx$ ។

ប្រសិនបើ f is integrable លើ $[a,b]$ ដូច្នេះលីមីតក្នុងនិយមន័យ2 មានហើយនឹងផ្តល់តម្លៃដូចគ្នាយើងជ្រើសរើសចំណុចគម្រូ x_i^* ។ ដើម្បីធ្វើអោយការគណនាអាំងតេក្រាលកាន់តែងាយស្រួលជារឿយៗយើងយកចំណុចគម្រូជាចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ។ ដូច្នេះ $x_i^* = x_i$ និង និយមន័យអាំងតេក្រាលមួយដែលមានលក្ខណៈសាមញ្ញដូចខាងក្រោម៖

4. ទ្រឹស្តីបទ ប្រសិនបើ f is integrable លើ$[a,b]$ ដូច្នេះ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ដែល $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ និង $x_i = a + i\Delta x$

ឧទាហរណ៍1 បង្ហាញថា

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 + x_i\sin x_i\right)\Delta x$$

ជាអាំងតេក្រាលលើចន្លោះ$[0,\pi]$ ។

ដំណោះស្រាយ ប្រៀបធៀបលីមីតដែលអោយជាមួយលីមីតក្នុងទ្រឹស្តីបទទី4 យើងឃើញថានឹងដូចគ្នាប្រសិនបើយើងជ្រើសរើស $f(x) = x^3 + x\sin x$ ។ យើងអោយ $a=0$ និង $b=\pi$ ដូច្នេះតាមទ្រឹស្តីបទទី4យើងបាន

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^3 + x_i\sin x_i\right)\Delta x = \int_0^{\pi}\left(x^3 + x\sin x\right)dx$$

ក្រោយមកពេលដែលយើងអនុវត្តអាំងតេក្រាលកំណត់(to physical situations) វានឹងមានសារសំខាន់ដើម្បីទទួលស្គាល់ផលបូកលីមីតជាអាំងតេក្រាល ដូចដែលពួកយើងបានធ្វើក្នុងឧទាហរណ៍ទី1 ។ ពេលដែល Leibniz ជ្រើសរើសការកំណត់សម្រាប់អាំងតេក្រាល គាត់ជ្រើសរើស (ingredient as reminder) ជាដំណើរការលីមីត។ ជាទូទៅគាត់សរសេរ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

យើងជំនួស $\lim\sum$ ដោយ $\int$ x_i^* ដោយ x ហើយនឹង Δx ដោយ dx

តម្លៃអាំងតេក្រាល

ពេលដែលយើងប្រើប្រាស់លីមីតដើម្បីរកតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ យើងត្រូវដឹងពីវិធីដើម្បីដំណើរការផលបូក។ សមីការបីខាងក្រោមនេះផ្តល់រូបមន្តផលបូកស្វ័យគុណនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ សមី

ការ5 ប្រហែលជាអ្នកធ្លាប់ស្គាល់ក្នុងការគណនា។ សមីការ6 និង7 ត្រូវបានពិភាក្សាក្នុងផ្នែក 5.1 ហើយនឹងបង្ហាញក្នុងឧបសម្ព័ន្ធ E។

5 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

រូបមន្តដែលនៅសល់គឺជាវិធានដ៏សាមញ្ញចំពោះដំណើរការជាមួយសញ្ញាស៊ិចម៉ា

8 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

11 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

រូបមន្ត 8-11 ត្រូវបានបង្ហាញដោយសរសេរចេញពីផ្នែកនីមួយៗក្នុង(expanded form) ។ ផ្នែកខាងឆ្វេងនៃសមីការ9 គឺ

$$ca_1 + ca_2 + ... + ca_n$$

ផ្នែកខាងស្តាំគឺ

$$c(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

ឧទាហរណ៍2:

a. គណនាតម្លៃនៃផលបូករេម៉ាន់ចំពោះអនុគមន៍ $f(x) = x^3 - 6x$ យកចំនុចគំរូដើម្បីតាងចំនុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ ហើយ $a = 0$, $b = 3$, $n = 6$

$b.$ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^3 \left(x^3 - 6x\right)dx$

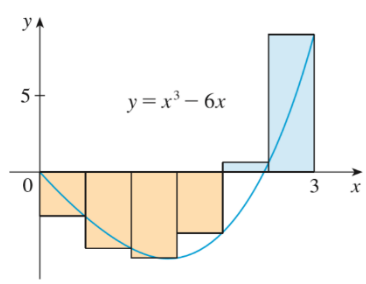
ដំណោះស្រាយៈចំពោះ $n = 6$ ទទឹងនៃចន្លោះគឺ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

ហើយចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំគឺ $x_1 = 0.5,\ x_2 = 1.0,\ x_3 = 1.5,\ x_4 = 2.0,\ x_5 = 2.5,$ និង $x_6 = 3.0$ ។ ដូច្នេះផលបូករីម៉ាន់គឺ

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f\left(x_i\right)\Delta x \\ &= f\left(0.5\right)\Delta x + f\left(1.0\right)\Delta x + f\left(1.5\right)\Delta x + f\left(2.0\right)\Delta x + f\left(2.5\right)\Delta x + f\left(0.5\right)\Delta x \\ &= \frac{1}{2}\left(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9\right) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

ចំណាំថា f មិនមែនជាអនុគមន៍វិជ្ជមាន ដូច្នេះផលបូករីម៉ាន់មិនមែនតំណាងឲ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងទេ។ ប៉ុន្តែវាតំណាងឲ្យផលបូកផ្ទៃក្រឡាចតុកោណពណ៌ខៀវ(លើអក្សអាប់ស៊ីស) ដកនឹងផ្ទៃក្រឡាពណ៌មាស(ក្រោមអក្សអាប់ស៊ីស) ក្នុងរូបទី5.

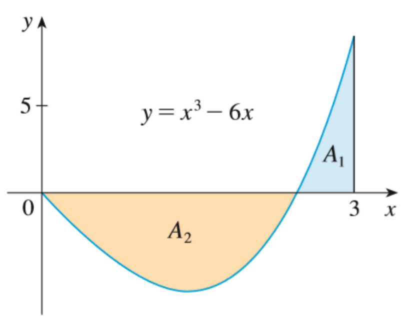


$b.$ ចំពោះ n ចន្លោះរងយើងមាន

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

ដូច្នេះ $x = 0,\ x_1 = 3/n,\ x_2 = 6/n,\ x_3 = 9/n$ និងជាទូទៅ $x_i = 3i/n$ ។ តាំងពីយើងប្រើប្រាស់ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ យើងអាចប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទទី4៖

$$\begin{aligned}\int_0^3\left(x^3-6x\right)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3-6\left(\frac{3i}{n}\right)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3-\frac{18}{n}i\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{54}{n^2}\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right\}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\
&= \frac{81}{4}-27=-\frac{27}{4}=-6.75\end{aligned}$$



$$\int_0^3\left(x^3-6x\right)dx = A_1-A_2=-6.75$$

អាំងតេក្រាលនេះមិនអាចបកស្រាយជាផ្ទៃក្រឡាទេពីព្រោះ f យកទាំងតម្លៃវិជ្ជមាន និងតម្លៃអវិជ្ជមាន។ ប៉ុន្តែវាអាចបកស្រាយខុសៗគ្នាចំពោះ A_1-A_2 ដែល A_1 និង A_2 ត្រូវបានបកស្រាយក្នុងរូបទី6។

រូបទី7 ពន្យល់ពីការគណនាដោយបង្ហាញពីផ្នែកវិជ្ជមាន និងវិជ្ជមានក្នុងផលបូកផ្នែកខាងស្តាំផលបូករ៉េម៉ាន R_n ចំពោះ $n=40$ ។ តម្លៃក្នុងតារាងបង្ហាញពីផលបូករ៉េម៉ានខិតទៅរកតម្លៃពិតប្រាកដនៃអាំងតេក្រាល -6.75 ពេល $n\to\infty$ ។

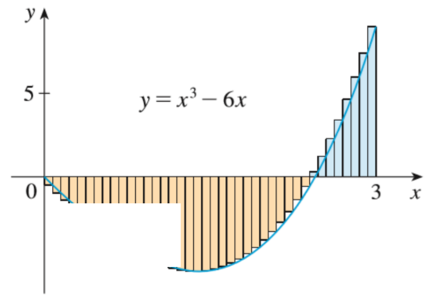


FIGURE 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	–6.3998
100	–6.6130
500	–6.7229
1000	–6.7365
5000	–6.7473

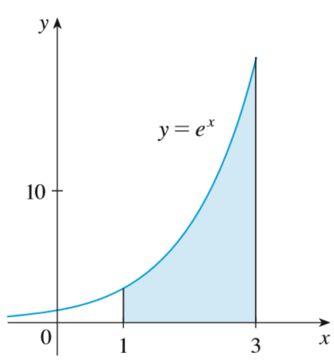
វិធីសាស្រ្តធម្មតាសម្រាប់វាយតម្លៃអាំងតេក្រាលក្នុងឧទាហរណ៍ទី2 នឹងផ្តល់ឲ្យក្នុងផ្នែក 5.4។

ឧទាហរណ៍3

a. បង្កើតការបង្ហាញចំពោះ $\int_1^3 e^x dx$ ជាផលបូកលីមីត។

b. ប្រើប្រាស់ប្រពន្ធ័គណនាកុំព្យូទ័រដើម្បីប៉ាន់តម្លៃការបង្ហាញ។

ដំណោះស្រាយ



ព្រោះ $f\left(x\right)=e^{x}$ វិជ្ជមាន អាំងតេក្រាលក្នុងការបកស្រាយឧទាហរណ៍ទី3ដែលបង្ហាញពីផ្ទៃក្រឡាក្នុងរូបទី8។

$a.$ យើងមាន $f\left(x\right)=e^{x},\ a=1,\ b=3,$ ហើយ

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$$

ដូច្នេះ $x_0=1,\ x_1=1+2/n,\ x_2=1+4/n\ ,\ x_3=1+6/n$ និង

$$x_i=1+\frac{2i}{n}$$

ពីទ្រឹស្តីបទ4 យើងទទួលបាន

$$\begin{aligned}\int_1^3 e^x dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}\end{aligned}$$

$b.$ ប្រសិនបើយើងប្រើប្រពន្ធ័គណនាកុំព្យូទ័រ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានផលបូក និងងាយស្រួលយើងទទួលបាន៖

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}=\frac{e^{(3n+2)/n}-e^{(n+2)/n}}{e^{2/n}-1}$$

ឥឡូវយើងប្រើប្រពន្ធ័គណនាកុំព្យូទ័រដើម្បីគណនាលីមីត៖

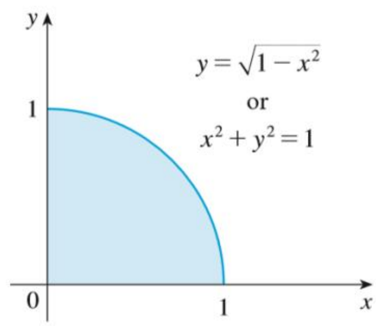
$$\int_1^3 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{(3n+2)/n}-e^{(n+2)/n}}{e^{2/n}-1}=e^3-e$$

យើងនឹងរៀនវិធីសាស្រ្តកាន់តែងាយស្រួលសម្រាប់ប៉ាន់ស្មានតម្លៃអាំងតេក្រាលនៅផ្នែកបន្ទាប់។

ឧទាហរណ៍ទី4 ប៉ាន់ស្មានតម្លៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយបកស្រាយផ្ទៃកនីមួយៗនៃផ្ទៃក្រឡា។

$(a)\ \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(b)\ \int_0^3 (x-1)\,dx$

ដំណោះស្រាយ



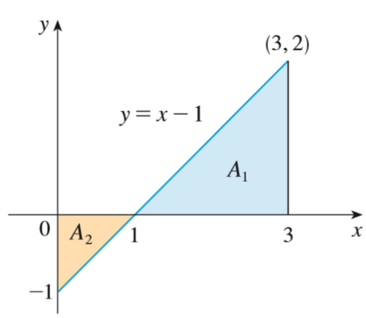
(a) តាង $f(x)=\sqrt{1-x^2}\le 0$ យើងអាចបកស្រាយអាំងតេក្រាលនេះជាផ្ទៃក្រឡាក្រោមខ្សែកោង $y=\sqrt{1-x^2}$ ពី 0 ទៅ 1 ។ ប៉ុន្តែ $y^2=1-x^2$ យើងបាន $x^2+y^2=1$ ដែលបង្ហាញក្នុងក្រាបនៃអនុគមន៍ f គឺមួយភាគបួននៃរង្វង់ដែលមានកាំស្មើ1 ក្នុងរូបទី9។ ដូចនេះ

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi(1)^2=\frac{\pi}{4}$$

(ក្នុងផ្នែក 7.3 យើងនឹងអាចបង្ហាញផ្ទៃក្រឡារង្វង់ដែលមានកាំ r គឺ πr^2)

(b) ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y=x-1$ គឺជាបន្ទាត់ទេរមួយបានបង្ហាញក្នុងរូបទី10 ។ យើងគណនាអាំងតេក្រាលជាភាពខុសគ្នានៃផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងទាំងពីរ៖

$$\int_0^3 (x-1)\,dx=A_1-A_2=\frac{1}{2}(2\cdot 2)-\frac{1}{2}(1\cdot 1)=1.5$$



ច្បាប់ចំណុចកណ្តាល

យើងតែងតែជ្រើសរើសចំណុចគម្រូ x_i^* ជាចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំនៃចន្លោះរងទី i ព្រោះវាងាយស្រួលសម្រាប់ការគណនាលីមីត។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើបំណងស្វែងរកការប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលធម្មតាវាប្រសើរជាងយក x_i^* ជាចំណុចកណ្តាលចន្លោះដែលយើងបញ្ជាក់ដោយ $\overline{x_i}$ ។ផលបូករីម៉ានមួយចំនួនប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងប្រើប្រាស់ចំណុចកណ្តាលយើងនឹងទទួលបានការប៉ាន់ស្មានដូចខាងក្រោម៖

ច្បាប់ចំណុចកណ្តាល

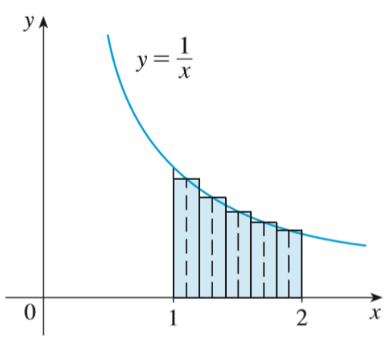
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x = \Delta x\left[f\left(\overline{x_1}\right)+\ldots+f\left(\overline{x_n}\right)\right]$$

ដែល $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

និង $$\overline{x_i} = \frac{1}{2}\left(x_{i-1}+x_i\right) = \text{midpoint of } \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

ឧទាហរណ៍5 ប្រើប្រាស់Midpoint Rule ដែល $n=5$ ដើម្បីប៉ាន់ស្មាន $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ៖ ចំណុចបញ្ចប់នៃចន្លោះរងប្រាំគឺ $1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ និង 2.0 ដូច្នេះចំណុចកណ្តាលគឺ $1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ និង 1.9 ។ទទឹងនៃចន្លោះរងគឺ $\Delta x = \frac{(2-1)}{5} = \frac{1}{5}$



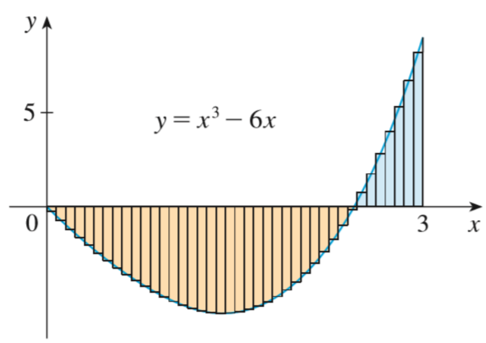
ដូចនេះតាមច្បាប់Midpoint Ruleគេបាន៖

$$\int_1^2 \frac{1}{2}\,dx \approx \Delta x\left[f(1.1)+f(1.3)+f(1.5)+f(1.7)+f(1.9)\right]$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.9}\right)$$
$$\approx 0.691908$$

តាង $f(x)=\frac{1}{x}>0$ ចំពោះ $1\le x\le 2$ អាំងតេក្រាលតំណាងផ្ទៃក្រឡាហើយតម្លៃប្រហែលដែលផ្តល់អោយដោយ Midpoint Rule ជាផលបូកនៃចតុកោណកែងត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី11។

ពេលថ្មីៗយើងមិនដឹងពីវិធីនៃការប៉ាន់ស្មានដែលពិតក្នុងឧទាហរណ៍ទី5 ក្នុងផ្នែក7.7។ យើងនិងរៀនពីវិធីប៉ាន់ស្មានកំហុសពាក់ពន្ធ័ក្នុងការប្រើប្រាស់Midpoint Rule។ ពេលនោះយើងនិងពិភាក្សាពីវិធីដទៃទៀតសម្រាប់ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលកំណត់។

ប្រសិនយើងអនុវត្តច្បាប់ Midpoint Rule ចំពោះអាំងតេក្រាលក្នុងឧទាហរណ៍ទី2 យើងទទួលបានរូបភាពក្នុងរូបទី12។ តម្លៃប្រហែល $M_{40}\approx -6.7563$ ជិតតម្លៃពិត -6.75 នោះតម្លៃប្រហែលនៃចំណុចបញ្ចប់ $R_{40}\approx -6.3998$ បង្ហាញក្នុងរូបទី7។



លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលកំណត់

ពេលដែលយើងកំណត់អាំងតេក្រាលកំណត់ $\int_a^b f(x)dx$ យើង implicitly ផលបូកដែល $a<b$ ។ ប៉ុន្តែនិយមន័យនៃលីមីតចំពោះផលបូករីម៉ាន makes sense if $a>b$ ។ ចំណាំថាប្រសិនបើយើងបញ្ច្រាស a និង b នោះ Δx ប្តូរពី $(b-a)/n$ ទៅ $(a-b)/n$ ។ ដូច្នេះ

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

ប្រសិនបើ $a=b$ នោះ $\Delta x=0$ ដូច្នេះ

$\int_a^a f(x)dx=0$

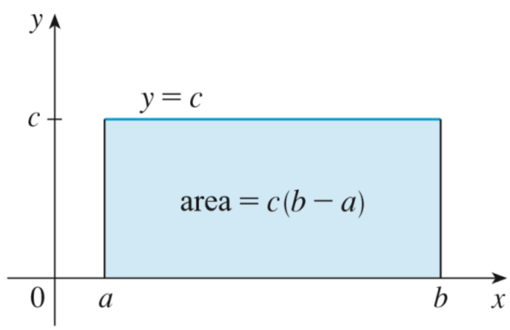
យើងសន្មតថាអនុគមន៍ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់។

លក្ខណៈអាំងតេក្រាល

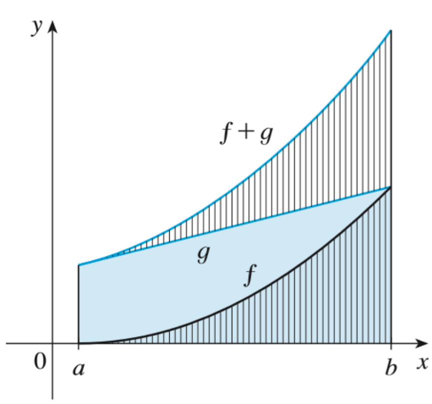
1. $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$, ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយ

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b c\,f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$, ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយ



លក្ខណៈ 1បាននិយាយថាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ថេរ $f(x)=c$ គឺចំនួនដងនៃប្រវែងចន្លោះថេរ។ ប្រសិនបើ $c>0$ និង $a<b$ ត្រូវបានគេរំពឹងទុកថាដោយសារតែ $c(b-a)$ ជាផ្ទៃនៃចតុកោណកែងក្នុងរូបទី13។



លក្ខណៈ 3 អាចបង្ហាញក្នុងលក្ខណៈស្រដៀងគ្នាហើយបកស្រាយថាអាំងតេក្រាលចំពោះចំនួនថេរនៃអនុគមន៍មួយគឺជាចំនួនថេរចំពោះអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍នោះ។ ម្យ៉ាងទៀតចំនួនថេរអាចយកដាក់ពីមុខនិមិត្តសញ្ញានៃអាំងតេក្រាលនោះ។ លក្ខណៈ 4 បានបង្ហាញដោយការសរសេរ $f-g=f+(-g)$ ហើយប្រើប្រាស់លក្ខណៈ 2 និង 3 ដោយយក $c=-1$ ។

ឧទាហរណ៍ទី6 ប្រើប្រាស់លក្ខណៈ នៃអាំងតេក្រាលដើម្បីគណនាតម្លៃ $\int_0^1 (4+3x^2)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ ប្រើប្រាស់ លក្ខណៈ 2 និង3 នៃអាំងតេក្រាល។ យើងមាន

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2 dx = \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2 dx$$

យើងដឹងពីលក្ខណៈ 1 ថា

$$\int_0^1 4dx = 4(1-0) = 4$$

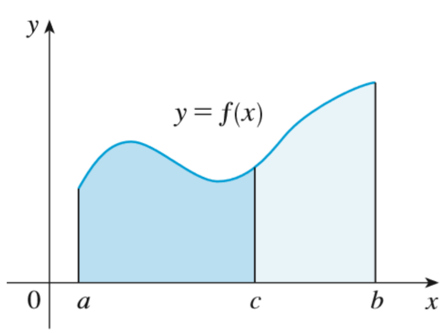
ហើយយើងស្វែងរកក្នុងឧទាហរណ៍ទី2 ក្នុងផ្នែក 5.1 ដែល $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ។ ដូច្នេះ

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2 dx$$

$$= 4 + 3\cdot\frac{1}{3} = 5$$

លក្ខណៈ បន្ទាប់ប្រាប់យើងពីរបៀបបូកអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ដូចគ្នា over adjacent intervals

5. $$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)dx$$



ជាទូទៅ នេះមិនងាយស្រួលក្នុងការបង្ហាញទេ ប៉ុន្តែចំពោះករណីដែល $f(x)\ge 0$ និង $a<c<b$ ។ ផ្ទៃក្រឡាក្រោម $y=f(x)$ ពី a ទៅ c បូកផ្ទៃក្រឡាពី c ទៅ b ស្មើនឹងផ្ទៃក្រឡាសរុបពី a ទៅ b ។

ឧទាហរណ៍7 បើគេដឹងថា $\int_0^{10} f(x)=17$ និង $\int_0^{8} f(x)dx=12$ ។ រក $\int_8^{10} f(x)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ By លក្ខណៈ 5 យើងមាន

$$\int_0^{8} f(x)dx+\int_8^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f(x)dx$$

ដូច្នេះ $$\int_8^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f(x)dx-\int_0^{8} f(x)dx=17-12=5$$

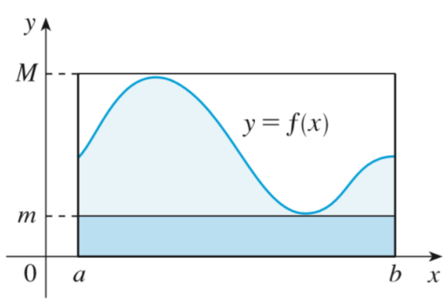
Properties 1-5 ពិត $a<b, a=b, a>b$ ។ The following properties ដែលយើងប្រៀបធៀបទំហំនៃអនុគមន៍ និងទំហំអាំងតេក្រាលពិតប្រសិនបើ $a\le b$ ។

លក្ខណៈប្រៀបធៀបនៃអាំងតេក្រាល

6 បើ $f(x)\ge 0$ ចំពោះ $a\le x\le b$ នោះ $\int_a^{b} f(x)dx\ge 0$

7 បើ $f(x)\ge g(x)$ ចំពោះ $a\le x\le b$ នោះ $\int_a^{b} f(x)dx\ge \int_a^{b} g(x)dx$

8 បើ $m\le f(x)\le M$ ចំពោះ $a\le x\le b$ $m(b-a)$ នោះ $m(b-a)\le \int_a^{b} f(x)dx \le M(b-a)$



ប្រសិន $f(x)\ge 0$ នោះ $\int_a^b f(x)dx$ បង្ហាញពីផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប f ដូច្នេះការបកស្រាយបែបធរណីមាត្រចំពោះ លក្ខណៈ 6 ជាធម្មតាផ្ទៃក្រឡាវិជ្ជមាន។លក្ខណៈ 7 និយាយថាអនុគមន៍ធំជាងមានអាំងតេក្រាលធំជាង។វាធ្វើតាម លក្ខណៈ 6 និង 4 ព្រោះ $f-g\ge 0$ ។

លក្ខណៈ 8 បានបង្ហាញក្នុងរូបទី16 ចំពោះករណីដែល $f(x)\ge 0$ ។ ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ យើងអាចយក m និង M ដើម្បីក្លាយជាតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត និងអតិបរមាដាច់ខាត ចំពោះ f នៅចន្លោះ $[a,b]$។ ក្នុងករណីនេះលក្ខណៈ 8 និយាយថាផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប f ធំជាងផ្ទៃនៃចតុកោណកែងដែលមានកម្ពស់ m និងតិចជាងផ្ទៃក្រឡាចតុកោណកែងដែលមានកម្ពស់ M ។

សម្រាយបញ្ជាក់ចំពោះលក្ខណៈ 8 តាង $m\le f(x)\le M$ លក្ខណៈ 7

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$

ប្រើប្រាស់លក្ខណៈ 1 ដើម្បីគណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលលើផ្នែកខាងឆ្វេង និងផ្នែកខាងស្តាំ យើងទទួលបាន៖

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

លក្ខណៈ 8 មានប្រយោជន៍នៅពេលយើងចង់ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដែលមានទំហំពិបាកនិងប្រើប្រាស់ Midpoint Rule។

ឧទាហរណ៍8 ប្រើប្រាស់លក្ខណៈ 8 ដើម្បីប៉ាន់ស្មាន $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ។

ដំណោះស្រាយ ដយសារតែ $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ជាអនុគមន៍កើនលើចន្លោះ $[0,1]$ ។ តម្លៃអតិបរមាគឺ $M=f(0)=1$ ហើយតម្លៃអប្បបរមាគឺ $m=f(1)=e^{-1}$ ។ ដូចនេះដោយសារលក្ខណៈ 8

$$e^{-1}(1-0)\le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

តាង $e^{-1}\approx 0.3679$ យើងសរសេរ

$$0.3679\le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

លទ្ធផលក្នុងឧទាហរណ៍ទី 8 បានបង្ហាញក្នុងរូបទី 17។ អាំងតេក្រាលធំជាងផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណកែងផ្នែកខាងក្រោម និងតិចជាងផ្ទៃក្រឡាការេ។

លំហាត់

1. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃផលបូករីម៉ានចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=3-\frac{1}{2}x, 2\le x\le 14$ ជាមួយចន្លោះរងចំនួន 6 ដោយយកចំណុចគម្រូជាចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង។ ចូរពន្យល់ដោយយកដ្យាក្រាមមកជួយ ថាតើផលបូករីម៉ានតំណាងឲ្យអ្វី។

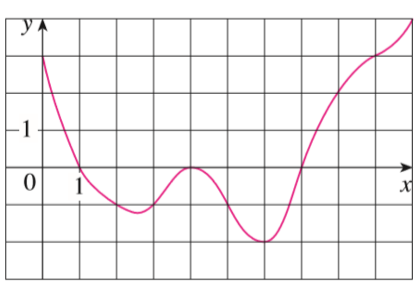
2. ប្រសិនបើ $f(x)=x^2-2x, 0\le x\le 3$ វាយតម្លៃផលបូករីម៉ានដោយយក $n=6$ យកចំណុចគម្រូជាចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ។ តើផលបូករីម៉ានតំណាងអោយអ្វី? បង្ហាញជាមួយដ្យាក្រាប។

3. ប្រសិនបើ $f(x)=e^x-2, 0\le x\le 2,$ រកផលបូករីម៉ានដោយយក $n=4$ (correct to six decimal places) យកចំណុចគម្រូជាចំណុចកណ្តាល។តើផលបូករីម៉ានតំណាងអោយអ្វី? បង្ហាញជាមួយដ្យាក្រាម។

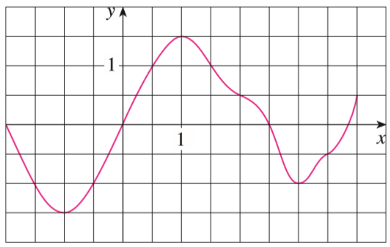
4. (a) រកផលបូករីម៉ានចំពោះ $f(x)=\sin x, 0\le x\le \frac{3\pi}{2},$ ជាមួយលក្ខខណ្ឌ 6 យកចំណុចគម្រូជាចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ(Give your answer correct to six decimal places) ពន្យល់ថាអ្វីតំណាងអោយផលបូករីម៉ានដោយមានជំនួយពីការបង្ហាញប្រភេទរូបភាព។

(b) ធ្វើផ្នែក(a) ម្តងទៀតដោយយកចំណុចកណ្តាលជាចំណុចគម្រូ។

5. ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ត្រូវបានផ្តល់អោយ។ប៉ាន់ស្មាន $\int_0^{10} f(x)dx$ ប្រើប្រាស់ចន្លោះរងចំនួន 5 ជាមួយ (a) ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ (b)ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង (c) ចំណុចកណ្តាល។



6. ក្រាបនៃអនុគមន៍ g គឺត្រូវបានបង្ហាញ។ ប៉ាន់ស្មាន $\int_{-2}^{4} g(x)dx$ ដោយយកចន្លោះរង 6 ប្រើប្រាស់ (a) ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ (b) ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង (c) ចំណុចកណ្តាល។



7. តារាងតម្លៃកើនឡើងនៃអនុគមន៍ f ត្រូវបានបង្ហាញ។ ប្រើប្រាស់តារាងដើម្បីបង្ហាញការប៉ាន់ស្មានខាងក្រោម និងខាងលើចំពោះ $\int_{10}^{30} f(x)dx$ ។

x	10	14	18	22	26	30
$f(x)$	–12	–6	–2	1	3	8

8. តារាងដែលអោយជាតម្លៃនៃអនុគមន៍ដែលទទួលបានពីការពិសោធន៍មួយ។ ប្រើប្រាស់វាដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_{3}^{9} f(x)dx$ ប្រើប្រាស់ចន្លោះរងស្មើគ្នាបីជាមួយ (a) ចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ (b) ចំណុចបញ្ចប់ខាងឆ្វេង និង (c) ចំណុចកណ្តាល។ បើគេដឹងថាអនុគមន៍ជាអនុគមន៍កើន តើអ្នកអាចនិយាយបានថាតើការប៉ាន់ស្មានរបស់អ្នកតិចជាងឬច្រើនជាងតម្លៃពិតនៃអាំងតេក្រាល?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	–3.4	–2.1	–0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 ប្រើប្រាស់ Midpoint Rule ជាមួយតម្លៃនៃ n ដែលផ្តល់អោយដើម្បីវាយតម្លៃអាំងតេក្រាល។ បង្គត់ចម្លើយនៅក្នុងទសភាគបួនខ្ទង់។

9. $\int_0^8 \sin\sqrt{x}\,dx,\ n=4$ 10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx,\ n=4$

11. $\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx,\ n=5$ 11. $\int_1^5 x^2 e^{-x}dx,\ n=4$

13. ប្រសិនបើអ្នកមានCASដែលប៉ាន់ស្មានតម្លៃចំណុចកណ្តាលហើយក្រាបចតុកោណកែងដែលត្រូវគ្នា(ប្រើប្រាស់ ផលបូករ៉េម៉ានឬ middle sum and middle box commands in Maple)។ ពិនិត្យចម្លើយក្នុងឧទាហរណ៍ទី11ហើយបកស្រាយជាមួយក្រាប។ បន្ទាប់មកធ្វើម្តងទៀតជាមួយ $n=10$ និង $n=20$ ។

14. ជាមួយម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រ(មើលសេចក្តីណែនាំចំពោះលំហាត់ទី9ផ្នែក5.1) គណនាផលបូករ៉េម៉ានខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំចំពោះអនុគមន៍ $f(x)= x/(x+1)$ លើចន្លោះ$[0,2]$ ចំពោះ $n=100$ ។ ពន្យល់ពីមូលហេតុនៃការប៉ាន់ស្មានទាំងនេះបង្ហាញថា

$$08946<\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx<0.9081$$

15. ប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រដើម្បីបង្កើតតារាងតម្លៃនៃផលបូករ៉េម៉ានខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ R_n ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int_0^\pi \sin x dx$ ដោយ $n=5,10,50$ និង 100 ។តើលេខទាំងនេះខិតដល់កម្រិតណា ?

16. ប្រើប្រាស់ម៉ាស៊ីនគិតលេខឬកុំព្យូទ័រដើម្បីបង្កើតតារាងតម្លៃនៃផលបូករ៉េម៉ានខាងឆ្វេង និងខាងស្តាំ L_n និង R_n ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int_0^2 e^{-x^2}dx$ ដោយ $n=5,10,50$ និង 100។ Between what two number must the value of the integral lie? Can you make a similar statement ចំពោះអាំងតេក្រាល $\int_{-1}^2 e^{-x^2}dx$ ឬទេ ? ចូរពន្យល់។

$17-20$ បង្ហាញលីមីតជាអាំងតេក្រាលកំណត់លើចន្លោះដែលផ្តល់អោយ៖

17. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(1+x_i^2\right)\Delta x, \quad [2,6]$

18. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \quad [\pi,2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[5\left(x_i^*\right)-4x_i^*\right]\Delta x, \quad [2,7]$

20. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{\left(x_i^*\right)^2+4}\Delta x, \quad [1,3]$

$21-25$ ប្រើប្រាស់ទម្រង់ពីនិយមន័យនៃអាំងតេក្រាលដែកផ្តល់អោយក្នុងទ្រឹស្តីបទទី4 ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

$21.\int_2^5 (4-2x)dx$ $\quad$ $22.\int_1^4 (x^2-4x+2)dx$

$23.\int_{-2}^0 (x^2+x)dx$ $\quad$ $24.\int_0^2 (2x-x^3)dx$

$25.\int_0^1 (x^3-3x^2)dx$

$26.(a)$ រកការប៉ាន់ស្មានតម្លៃអាំងតេក្រាល $\int_0^4 (x^2-3x)dx$ ប្រើប្រាស់ផលបូករីម៉ាន ជាមួយចំណុចបញ្ចប់ខាងស្តាំ និង $n=8$ ។

(b) គូសដ្យាក្រាមដូចរូបទី3ដើម្បីបង្ហាញការប៉ាន់ស្មានក្នុងផ្នែក(a)។

(c) ប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទទី4ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_0^4 (x^2-3x)dx$ ។

(d) បកស្រាយអាំងតេក្រាលក្នុងផ្នែក(c) ជាភាពខុសគ្នានៃផ្ទៃក្រឡាហើយបង្ហាញ ជាមួយដ្យាក្រាមដូចរូបទី4។

27. បង្ហាញថា $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2-a^2}{2}$

28. បង្ហាញថា $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3-a^3}{3}$

$29-30$ បង្ហាញអាំងតេក្រាលជាផលបូកលីមីត។ មិនបាច់គណនាតម្លៃលីមីត

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1+x^5}dx$ $\quad$ $30.\int_1^{10} (x-4\ln x)dx$

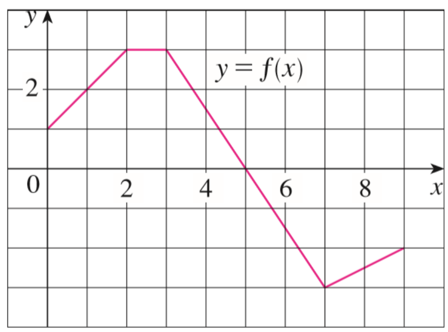
$31-32$ បង្ហាញអាំងតេក្រាលជាផលបូកលីមីត។ បន្ទាប់មកប្រើប្រាស់ប្រពន្ធ័គណនាកុំព្យូទ័រដើម្បីរកផលបូកនៃលីមីតទាំងពីរ។

31. $\int_0^{\pi} \sin 5x dx$ $\quad$ 32. $\int_2^{10} x^6 dx$

33. ក្រាបនៃអនុគមន៍ f ត្រូវបានបង្ហាញ។ ប៉ាន់ស្មានតម្លៃអាំងតេក្រាលនីមួយៗដោយបកស្រាយវាជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកៗ

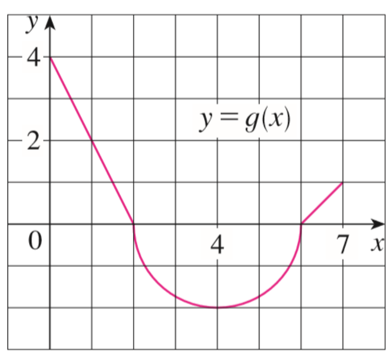
$(a)\ \int_0^2 f(x)dx$ $(b)\ \int_0^5 f(x)dx$

$(c)\ \int_5^7 f(x)dx$ $(d)\ \int_0^9 f(x)dx$



34. ក្រាបនៃអនុគមន៍ g មានបន្ទាត់ត្រង់ពីរ និងកន្លះរង្វង់មួយ។ ប្រើប្រាស់វាដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃនីមួយៗនៃអាំងតេក្រាល

$(a)\int_0^2 g(x)dx$ $(b)\int_2^6 g(x)dx$ $(c)\int_0^7 g(x)dx$



35–40 ប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាលដោយបកស្រាយវាជាផ្ទៃក្រឡាផ្នែកៗ

35. $\int_{-1}^{2}(1-x)dx$ 36. $\int_0^9\left(\frac{1}{3}x-2\right)dx$

37. $\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$ 38. $\int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx$

39. $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ 40. $\int_0^{10}|x-5|\,dx$

41. ប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_{\pi}^{\pi}\sin^2 x\cos^4 x\,dx$ ។

42. គេអោយ $\int_0^1 3x\sqrt{x^2+4}\,dx = 5\sqrt{5}-8,$ រកតម្លៃ $\int_1^0 3u\sqrt{u^2+4}\,du$?

43. ក្នុងឧទាហរណ៍ទី2ផ្នែក5.3 យើងបានបង្ហាញថា $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ ប្រើប្រាស់ this fact and the properties នៃអាំងតេក្រាលដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_0^1 \left(5-6x^2\right)dx$ ។

44. ប្រើប្រាស់ properties នៃអាំងតេក្រាល ហើយនឹងតម្លៃនៃឧទាហរណ៍ទី3ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_1^3 \left(2e^x-1\right)dx$ ។

45. ប្រើប្រាស់លទ្ធផលក្នុងឧទាហរណ៍ទី3ប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_1^3 e^{x+2}dx$ ។

46. ប្រើប្រាស់លទ្ធផលលំហាត់ទី27 ហើយ fact that $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$ (ពីលំហាត់29 ក្នុងផ្នែក 5.1) together with the properties ចំពោះអាំងតេក្រាលដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃ $\int_0^{\pi/2} \left(2\cos x - 5x\right)dx$ ។

47. សរសេរអាំងតេក្រាលជាទម្រង់ $\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx$

48. ប្រសិនបើ $\int_1^5 f(x)dx = 12$ និង $\int_4^5 f(x)dx = 3.6$ ចូររក $\int_1^4 f(x)dx$ ។

49. ប្រសិនបើ $\int_0^9 f(x)dx = 37$ និង $\int_0^9 g(x)dx = 16$ ចូររក $\int_0^9 \left[2f(x)+3g(x)\right]dx$ ។

50. រក $\int_0^5 f(x)dx$ ប្រសិនបើ

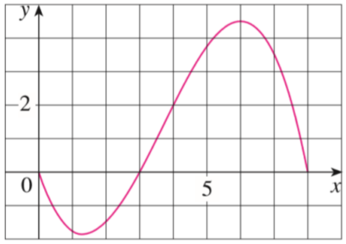
$$f(x) = \begin{cases} 3\,, & x < 3 \\ x\,, & x \geq 3 \end{cases}$$

51. ចំពោះអនុគមន៍ f ដែលក្រាបត្រូវបានបង្ហាញ ចូរធ្វើខាងក្រោមរាយបរិមាណតាមលំដាប់លំដោយពីតូចបំផុតទៅធំបំផុត ហើយពន្យល់ពីហេតុផល

$(A)\int_0^8 f(x)dx$ $(B)\int_0^3 f(x)dx$

$(C)\int_3^8 f(x)dx$ $(D)\int_4^8 f(x)dx$

$(E)\ f'(1)$

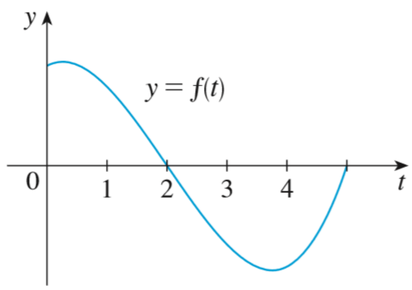


52. ប្រសិនបើ $F(x)=\int_2^x f(t)dt$ ដែល f ជាអនុគមន៍ដែលក្រាបផ្តល់ឲ្យ តើតម្លៃខាងក្រោមណាមួយដែលធំបំផុត?

(A) $F(0)$ (B) $F(1)$

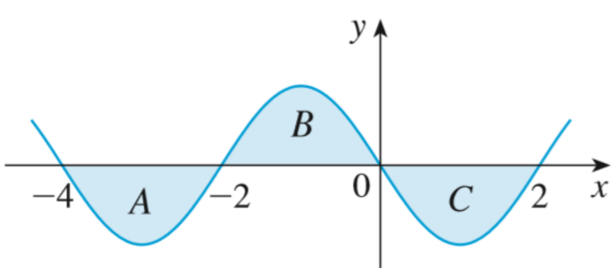
(C) $F(2)$ (D) $F(3)$

(E) $F(4)$



53. តំបន់នីមួយៗ A, B និង C មានព្រំដែនខណ្ឌដោយក្រាបនៃអនុគមន៍ f និងអក្សអាប់ស៊ីសមានផ្ទៃក្រឡាបី។ រកតម្លៃនៃ

$$\int_{-4}^{2}\left[f(x)+2x+5\right]dx$$



54. ឧបមាថា f មានតម្លៃអប្បបរមាដាច់ខាត m និងតម្លៃអតិបរមាដាច់ខាត M ។ តើ $\int_0^2 f(x)dx$ ស្ថិតនៅចន្លោះណា? តើលក្ខណៈណាដែលអ្នកទាញបានលទ្ធផលនេះ?

55–58 ប្រើប្រាស់ properties នៃអាំងតេក្រាលដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមភាពជាមួយនឹងការវាយតម្លៃអាំងតេក្រាល

55. $\int_0^4 \left(x^2 - 4x + 4\right)dx \geq 0$

56. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

57. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$

58. $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

59–64 ប្រើប្រាស់ លក្ខណៈ 8 ដើម្បីប៉ាន់ស្មានតម្លៃអាំងតេក្រាល

59. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

60. $\int_0^2 \dfrac{1}{1+x^2}dx$

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx$

62. $\int_0^2 \left(x^3 - 3x + 3\right)dx$

63. $\int_0^2 xe^{-x}dx$

64. $\int_{\pi}^{2\pi} \left(x - 2\sin x\right)dx$

65–66 ប្រើប្រាស់ properties នៃអាំងតេក្រាល ជាមួយលំហាត់ទី 27 និង 28 ដើម្បីបង្ហាញវិសមភាព

65. $\int_1^3 \sqrt{x^4+1}\,dx \geq \dfrac{26}{3}$

66. $\int_0^{\pi/2} x\sin x dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

67. បង្ហាញលក្ខណៈ 3 នៃអាំងតេក្រាល។

68. (a) ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ បង្ហាញថា

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

[ជំនួយ៖ $-\left|f(x)\right| \leq f(x) \leq \left|f(x)\right|$]

(b) ប្រើលទ្ធផលផ្នែក(a) ដើម្បីបង្ហាញថា

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x dx\right| \le \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

69. តាង $f(x)=0$ ប្រសិនបើ x ជាចំនួនសនិទាន ហើយ $f(x)=1$ ប្រសិនបើ x ជាចំនួនអសនិទាន។បង្ហាញថា f មិនមានអាំងតេក្រាលលើ$[0,1]$ ទេ។

70. តាង $f(0)=0$ និង $f(x)=\frac{1}{x}$ បើ $0<x\le 1$។បង្ហាញថា f មិនមានអាំងតេក្រាលលើ $[0,1]$។[ជំនួយ៖ប្រើផលបូក Riemann, $f(x_1^*)\Delta x$]

71–72 បង្ហាញលីមីតជាអាំងតេក្រាលកំណត់

71. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}$ [ជំនួយ Consider $f(x)=x^4$]

72. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(i/n\right)^2}$

73. រក $\int_1^2 x^{-2}dx$ ជំនួយ៖ ជ្រើសយក x_i^* ជាមធ្យមធរណីមាត្រ x_{i-1} និង x_i (ដែល $x_i^*=\sqrt{x_{i-1}x_i}$) និងប្រើរូបមន្ត

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$$

អនុគមន៍ផ្ទៃក្រឡា

1. (a) គូសបន្ទាត់ $y=2t+1$ និងប្រើប្រាស់ធរណីមាត្រដើម្បីស្វែងរកផ្ទៃក្រឡាក្រោមបន្ទាត់នៅលើ t-axis ចន្លោះបន្ទាត់ត្រង់ $t=1$ និង $t=3$។

(b) ប្រសិនបើ $x>1$ តាង $A(x)$ ជាផ្ទៃក្រោមតំបន់ដែលលាតសន្ធឹងក្រោមបន្ទាត់ $y=2t+1$ ចន្លោះ $t=1$ និង $t=x$ ។sketch តំបន់នេះ និងប្រើប្រាស់ធរណីមាត្រដើម្បីរកការបង្ហាញចំពោះ $A(x)$។

(C) ភាពខុសគ្នានៃផ្ទៃក្រឡានៃអនុគមន៍ $A(x)$ ។តើអ្នកសម្គាល់ឃើញអ្វី?

2. (a) បើ $x \geq 1$ តាង

$$A(x)=\int_{-x}^{1}\left(1+t^2\right)dt$$

$A(x)$ តាងអោយផ្ទៃក្រឡាតំបន់មួយ។គូស តំបន់នេះ

(b) ប្រើលទ្ធផលនៅលំហាត់ទី28 ក្នុងផ្នែក 5.2 ដើម្បីរកការបង្ហាញចំពោះ $A(x)$

(c) រក $A'(x)$ ។ តើអ្នកសម្គាល់ឃើញអ្វី?

(d) ប្រសិន $x \geq -1$ ហើយ h ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូច ដូច្នេះ $A(x+h)-A(x)$ តំណាងផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់។ ពណ៌នា និង គូសផ្ទៃ.

(e) គូសចតុកោណមួយដែលប៉ាន់ស្មានតំបន់ក្នុងផ្នែក (d) ។ ដោយប្រៀបធៀបផ្ទៃនៃតំបន់ទាំងពីរនេះ បង្ហាញថា

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}\approx 1+x^2$$

(f) ប្រើប្រាស់ផ្នែក (e) ពន្យល់ផ្នែក (c)

3. (a) គូសក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos\left(x^2\right)$ ក្នុង viewing rectangle $[0,2]$ ដោយ $[-1.25,1.25]$ ។

(b) ប្រសិនយើងកំណត់អនុគមន៍ថ្មី g ដោយ

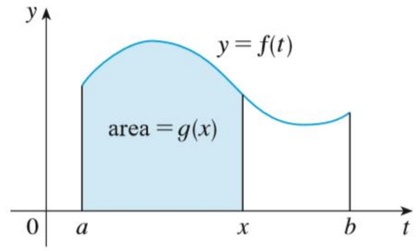
$$g(x)=\int_{0}^{x}\cos\left(t^2\right)dt$$

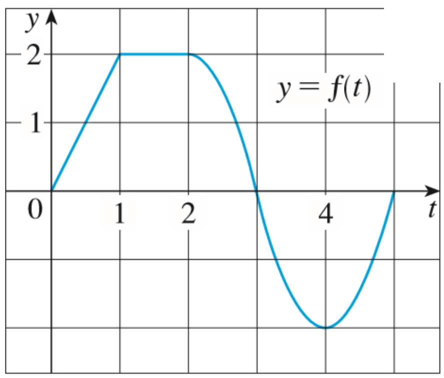
ដូច្នេះ $g(x)$ ជាផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាបនៃអនុគមន៍ f ពី 0 ទៅ x [until $f(x)$ become negative, at which point $g(x)$ become a difference of areas]. ប្រើផ្នែក (a) ដើម្បីកំណត់តម្លៃនៃ x ដែល $g(x)$ ចាប់ផ្តើមកើនឡើង។…………

4. ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ហើយយើងកំណត់អនុគមន៍ថ្មី g ដោយសមីការ

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ផ្អែកលើ Problem 1-3, ទាញរក





ឧទាហរណ៍ទី1 ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ដែលក្រាបត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបទី2 និង $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ ។ រកតម្លៃនៃ $g(0), g(1), g(2), g(3), g(4)$ ហើយ $g(5)$ ។ បន្ទាប់មក គូសក្រាប g

ដំណោះស្រាយ ដំបូងយើងសម្គាល់ថា $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ ។ ពីរូបទី3 យើងឃើញថា $g(1)$ ជាផ្ទៃនៃត្រីកោណ៖

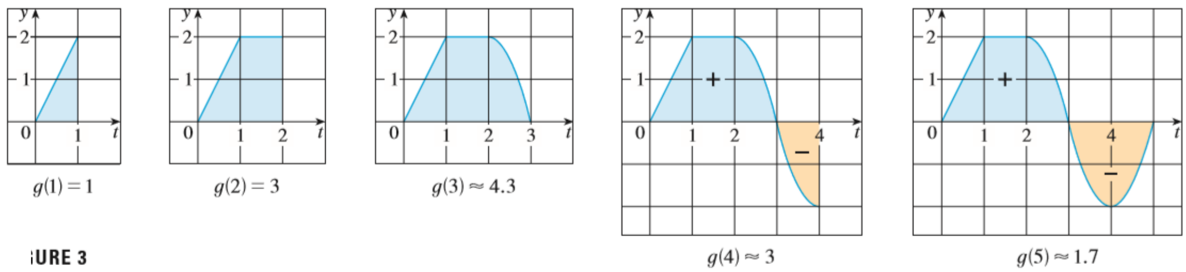
$$g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}(1\cdot 2)=1$$

ដើម្បីរក $g(2)$ យើងបន្ថែម $g(1)$ ទៅលើផ្ទៃនៃចតុកោណកែងមួយ៖

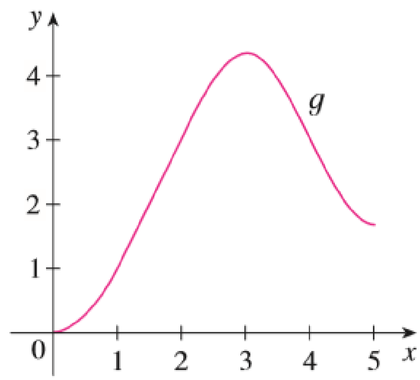
$$g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt=1+(1\cdot 2)=3$$

យើងប៉ាន់ស្មានថាផ្ទៃក្រឡាក្រោមក្រាប f ពី 2 ទៅ 3 ប្រហែល 1.3 ដូច្នេះ

$$g(3)=g(2)+\int_2^3 f(t)dt\approx 3+1.3=4.3$$



URE 3



$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ចំពោះ $t>3, f(t)$ វិជ្ជមាន និងគណនាផលដកក្រឡាផ្ទៃ:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

យើងប្រើប្រាស់តម្លៃគូសក្រាបនៃអនុគមន៍ g ក្នុងរូបទី 4។ ចំណាំថាដោយសារ $f(t)$ វិជ្ជមានចំពោះ $t<3$, បន្តបូក $t<3$ ហើយដូច្នេះ g កើនឡើងដល់ $x=3$ ដែលទៅដល់តម្លៃអតិបរមា។ ចំពោះ $x>3, g$ កើនឡើង ព្រោះ $f(t)$ អវិជ្ជមាន។

ប្រសិនយើងយក $f(t)=t$ និង $a=0$ បន្ទាប់មកប្រើប្រាស់ឧទាហរណ៍ទី 27 ក្នុងផ្នែក 5.2 យើងបាន

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

ចំណាំថា $g'(x)=x$ ដែល $g'=f$ ។ម្យ៉ាងទៀតប្រសិនបើ g

ឧទាហរណ៍ ៥៖ រកតម្លៃ $\int_1^3 e^x dx$

ដំណោះស្រាយ ៖

អនុគមន៍ $f(x)=e^x$ ជាប់គ្រប់តម្លៃ x ហើយដេរីវេប្រាស់របស់វាគឺ $F(x)=e^x$ តាមទ្រឹស្តី

គេបាន $\int_1^3 e^x dx = F(3)-F(1)=e^3-e^1=e^3-e$

ចំណាំ FTC2 និយាយថា យើងអាចប្រើ ព្រីមីទីវ F នៃ f បាន។ យើងប្រហែលជាអាចប្រើដោយសាមញ្ញបំផុតមួយពោលេគឈ $F(x)=e^x$ ដោយជួសវិញនូវ e^x+7 ឬ e^x+c

យើងចំណាំថា ៖$\left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

ដូចនេះ គេអាចសរសេរវានបាននៃ FTC2 $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$ ដែល $F'(x)=f(x)$

កំណត់ចំណាំ ៖$\left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$

ឧទាហរណ៍ 6 ៖ រកផ្ទៃនៃប៉ារ៉ាបូល ដែលមានសមីការ $y=x^2$ ត្រង់ចំណុច 0 ទៅ 1 ។

ដំណោះស្រាយ

ដោយព្រីមីទីវនៃ $f(x)=x^2$ គឺ $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ តាង A ជាផ្ទៃដែលត្រូវរក

តាមទ្រឹស្តីបទ 2 គេបាន

$A=\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$ ប្រសិនបើយើងប្រៀបធៀបឧទាហរណ៍ 6 នេះ

ឧទាហរណ៍ទី 2 ក្នុងផ្នែកទី 5.1 យើងឃើញថាតាមទ្រឹស្តីបទមានលក្ខណៈខ្លីជាងការគណនាតាមវិធីផ្តុំ។

ឧទាហរណ៍ 7 ៖ រកតម្លៃ $\int_3^6 \frac{dx}{x}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖

យើងសរសេរ $\int_3^6 \frac{dx}{x} = \int_3^6 \frac{1}{x}dx$

ដោយព្រីមីទីវ នៃ $f(x)=\frac{1}{x}$ គឺ $F(x)=\ln|x|$ ដោយ $3\le x\le 6$ នោះគេអាចសរសេរបាន $F(x)=\ln x$ ដូចនេះ $\int_3^6 \frac{1}{x}dx=[\ln x]_3^6=\ln 6-\ln 3=\ln\frac{6}{3}=\ln 2$ ។

ឧទាហរណ៍ 8 ៖ រកផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង cosine ចន្លោះពី 0 ទៅ b។ ដែល $0\le b\le\frac{\pi}{2}$ ។

ដំណោះស្រាយ ៖ ដោយព្រីមីទីវនៃ $f(x)=\cos x$ គឺ $F(x)=\sin x$ នោះយើងបាន $A=\int_0^b \cos x dx=[\sin x]_0^b=\sin b-\sin 0=\sin b$ ក្នុងករណីដែល $b=\frac{\pi}{2}$ នោះគេបានផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោង cosine ចន្លោះពី 0 ទៅ $\frac{\pi}{2}$ គឺ $\sin\frac{\pi}{2}=1$ ឯកតាផ្ទៃ ។)

នៅពេលដែលអ្នកប្រាជ្ញគណិតវិតទ្យាជនជាតិបារាំងម្នាក់ Gollesde Roberval ដំបូងបានស្វែងរកផ្ទៃរបស់ខ្សែកោងអនុគមន៍ sine និង cosine នៅក្នុងឆ្នាំ 1635 ។

ឧទាហរណ៍ 9 រកកំហុសក្នុងការគណនាខាងក្រោម ៖

$$\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{3}=\frac{-1}{3}-1=-\frac{4}{3}$$

ដំណោះស្រាយ ៖

ចំពោះការគណនាខាងលើគឺខុសព្រោះ $f(x)=\frac{1}{x^2}\ge 0$ ហើយ លក្ខណៈ 6 នៃអាំងតេក្រាលនោះ $\int_a^b f(x)dx\ge 0$ ពេលដែល $f(x)>0$ ។ ចំពោះទ្រឹស្តីបទនៃអាំងតេក្រាលអាចគណនាអាំងតេក្រាលបានលុះត្រាតែអនុគមន៍នោះមានន័យ ឬជាប់នៅចន្លោះនោះ ។ វាមិនអាចគណនាបានចំពោះអនុគមន៍ $f(x)=\frac{1}{x^2}$ នៅចន្លោះ $[-1,3]$ បានទេ ព្រោះ $f(x)$ មិនកំណត់ចំពោះ $x=0$ ទេ

ដូចនេះ $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx$ គ្មានចម្លើយ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល និងអាំងតេក្រាល

Differentiation and Integration as Inverse Processes

ក្នុងចំណុចខាងលើនេះ សរុបមកគេចែកអាំងតេក្រាលចេញជា ពីរផ្នែក ។

ទ្រឹស្តីបទ៖

ចំពោះអនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$

1. បើ $g(x)=\int_a^x f(t)dt,$ នោះ $g'(x)=f(x)$

2. $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$ ដែល F ជាព្រីមីទីវ នាំ f នោះ $F'(x)=f(x)$

ចំពោះផ្នែកទី 1 យើងអាចសរសេរបាន

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(t)$$

នេះគឺជារបៀបបកស្រាយមួយ ដែលគេនិយាយថាប្រសិនប់អនុគមន៍ F គឺជាដេរីវេទីមួយរបស់វា ហើយអាំងតេក្រាលរបស់វាកំណត់បាន នោះយើងនិងអាចរកឃើញតែម្លអនុគមន៍ដើម F បាន។ ដោយយេបានមកពីព្រីមីទីវ $F(b)-F(a)$ ។ ទាំងនេះគឺជា ពីរផ្នែកនៃទ្រឹស្តីបទគ្រឹះរបស់ Calculus ដែលបាននិយាយថា អនុគមន៍ឌីផេរ៉ង់ស្យែលនិងអាំងតេក្រាលមានទំនាក់ទំនងនិងគ្នា ។

ទ្រឹស្តីបទគ្រឹះនៃ Calculus គឺជាទ្រឹស្តីបទដែលពិតប្រាកដហើយសំខាន់បំផុតក្នុងទ្រឹស្តីបទមួយនេះ ក្នុងការគណនា និងមិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះវាជាផលបូកសម្មតិកម្មដ៏អស្ចារ្យមួយដែលបានបង្កើតឡើងដោយមនុស្ស។

មុនពេលដែលបានរកឃើញវា គឺជាពេលមួយដែល Eudoxus និង Archimedes ក្នុងពេលដែល Galileo និង Fermat មានបញ្ហាក្នុងការស្វែងរកផ្ទៃក្រឡា មាឌ និងអនុគមន៍ដែលមានភាពស៊ាំញុំមួយទើបធ្វើឲ្យមានការរកឃើញទេពកោសល្យមួយនេះ ។ ប៉ុន្តែ ឥឡូវវិធីនេះត្រូវបានធ្វើរួចជាស្រេចដែលលោក Newton និង Leibniz បានធ្វើការស្វែងរកទ្រឹស្តីបទនោះ។ ហើយពួកយើងនិងជួបនៅក្នុងជំពូកនេះដែលជាការបង្ហាញទេព្យកោសល្យក្នុងការដោះស្រាយបញ្ហាដែលមិនដែលធ្លាប់ឃើញមកដល់ ពួកយើង ។

មានសល់មិនទាន់បានបកច្រើនទៀតក្នុងទំព័រ ៤២៥

5.3 លំហាត់

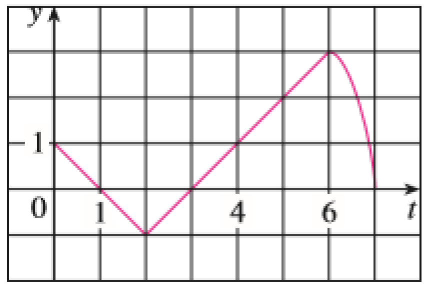
១ .ចូលពន្យល់ន័យថា » differentiation និង អាំងតេក្រាល are inverse processes «

២ .គណនា $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ នៅពេលដែល f ត្រូវបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

(a) . វាយតម្លៃ $g(x)$ បើ $x = 0,1,2,3,4,5$ និង 6 ។

(b). រកតម្លៃប្រហែលរបស់ $g(7)$

(c). តើអនុគមន៍ g មានតម្លៃអតិបរិមារប៉ុន្មាន ?ហើយមានតម្លៃអប្បបរមារស្មើរប៉ុន្មាន?

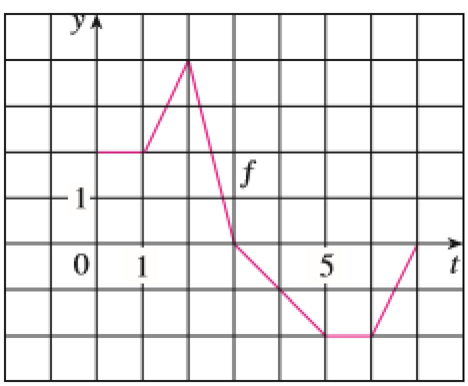


3. គណនា $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ នៅពេលដែល f ត្រូវបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

(a). រកតម្លៃនៃ $g(0), g(1), g(2), g(3),$ និង $g(6)$

(b) . តើ g កើននៅចន្លោះណា?

(c) . តើ g មានតម្លៃអតិបរមានស្មើរប៉ុន្មាន?



4. គណនា $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ នៅពេលដែល f ត្រូវបានបង្ហាញដូចខាងក្រោម៖

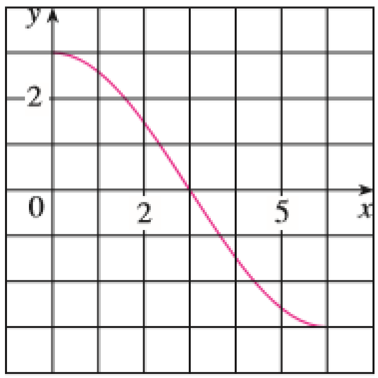
(a) . គណនាតម្លៃ $g(0),$ និង $g(6)$

(b) . គណនាតម្លៃនៃ $g(x)$ បើ $x=1,2,3,4,$ និង 5

(c) . តើអនុគមន៍ g កើននៅចន្លោះណា ?

(d) . តើអនុគមន៍ g មានតម្លៃអតិបរិមានស្មើរប៉ុន្មាន ?

(e) . គូសក្រាហ្វ g។



ាមនពីរវិធីគឺ

(a). ប្រើតាមទ្រឹស្តីបទនៃវិធានអាំងតេក្រាល

(b) . វាយតម្លៃអាំងតេក្រាលដោយប្រើប្រាស់វិធីសាស្រ្តបំបែក

5. $g(x)=\int_1^x t^2 dt$

6. $g(x)=\int_0^x (2+\sin t)\,dt$

7-18 ដោយប្រើប្រាស់ទ្រឹស្តីបទ ចូរគណនារកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

7. $g(x)=\int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt$

8. $g(x)=\int_3^x e^{t^2-t}dt$

9. $g(s)=\int_5^s (t-t^2)dt$

10. $g(r)=\int_0^r \sqrt{x^2+4}dx$

11. $F(x)=\int_x^\pi \sqrt{1+\sec t}\,dt$ ដែល $\left[\int_x^\pi \sqrt{1+\sec t}\,dt=-\int_\pi^x \sqrt{1+\sec t}\,dt\right]$

12. $G(x)=\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$

13. $h(x)=\int_1^{e^x} \ln t\ dt$

14. $h(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}dz$

15. $y=\int_0^{\tan x} \sqrt{t+\sqrt{t}}\,dt$

16. $y=\int_0^{x^4} \cos^2\theta d\theta$

17. $y=\int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1+u^2}du$

18. $y=\int_{\sin x}^{1} \sqrt{1+t^2}\,dt$ ។

19-44 .គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

19. $\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x\right)dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}dx$

21. $\int_1^4\left(5-2t+3t^2\right)dt$

22. $\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9\right)du$

23. $\int_1^9 \sqrt{x}dx$

24. $\int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx$

25. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin\theta d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} edx$

27. $\int_0^1 (u+2)(u-3)du$

28. $\int_0^4 (4-t)\sqrt{t}dt$

29. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

30. $\int_0^2 (y-1)(2y+1)dy$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 tdt$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\ \tan\theta d\theta$

33. $\int_1^2 (1+2y)^2\,dy$

34. $\int_0^3\left(2\sin x-e^x\right)dx$

35. $\int_1^2 \frac{v^3+3v^6}{v^4}dv$

36. $\int_1^{18}\sqrt{\frac{3}{z}}dz$

37. $\int_0^1 \left(x^6+e^x\right)dx$

38. $\int_0^1 \cosh t\ dt$

39. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1+x^2}dx$

40. $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}du$

41. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}du$

42. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

43. $\int_0^{\pi} f\left(x\right)dx$ នៅពេលដែល $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x & , 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x & , \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases}$

44. $\int_{-2}^{2} f\left(x\right)dx$ នៅពេលដែល $f\left(x\right)=\begin{cases}2 & , \ -2\le x\le 0\\ 4-x^2 & , \quad 0<x\le 2\end{cases}$

45-48 តើមានកំហុសអ្វីបានកើតឡើងចំពោះលំហាត់ខាងក្រោម ?

45. $\int_{-2}^{1} x^{-4}dx=\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^{1}=-\frac{3}{8}$

46. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}dx=\left[-\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2}=\frac{3}{2}$

47. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sec\theta\tan\theta\ d\theta=\left[\sec\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=-3$

48. $\int_0^{\pi} \sec^2 x\ dx=\left[\tan x\right]_0^{\pi}=0$

49-52. ប្រើក្រាបចំពោះក្រាបដែលឲ្យខាងក្រោម រួចគូរធ្នូតលើលក្ខខណ្ឌ x ដែលឲ្យ ។ បន្ទាប់មក គណនាផ្ទៃក្រឡារបស់វា។

49. $y=\sqrt[3]{x},\quad 0\le x\le 27$

50. $y=x^{-4},\quad 1\le x\le 6$

51. $y=\sin x\ ,\quad 0\le x\le \pi$

52. $y=\sec^2 x\ \ ,\ \ 0\le x\le \frac{\pi}{3}$

53-54 .គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម រួចបកស្រាយផ្ទៃតាមក្រាប៖

53. $\int_{-1}^{2} x^3dx$

54. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} \cos x\ dx$

55-59. រកព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

55. $g(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{u^2-1}{u^2+1}du$ ព្រោះ $\left(\int_{2x}^{3x} f(u)du=\int_{2x}^{0} f(u)du+\int_{0}^{3x} f(u)du\right)$

56. $g(x)=\int_{1}^{1+2x} t\sin t\ dt$

57. $F(x)=\int_{x}^{x^2} e^{t^2}dt$

58. $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{2x}\arctan t\ dt$

59. $y=\int_{\cos x}^{\sin x}\ln(1+2v)dv$

61. តើក្នុងចន្លោះនៃក្រាប $y=\int_0^x\frac{t^2}{t^2+t+2}dt$ បែរភាពផតចុះក្រោមឬទេ ?

62. បើ $f(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^2}dt$ និង $g(y)=\int_3^y f(x)dx,$ រក $g''\left(\frac{\pi}{6}\right)$

63. បើ $f(1)=12,$ ហើយ f' ជាអនុគមន៍ជាប់ហើយ $\int_1^4 f'(x)dx=17$ ។ រកតម្លៃនៃ $f(4)$ ។

6.4. អនុគមន៍មានកំហុស

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$ គឺបានប្រើដើម្បីរកតម្លៃប្រហែល ស្ថិតិ និងវិស្វកម្ម៖

(a). បង្ហាញថា $\int_a^b e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left[erf(b)-erf(a)\right]$

(b). បង្ហាញថាអនុគមន៍ $y=e^{x^2}erf(x)$ បំពេញលក្ខខ័ណ្ឌសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'=2xy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ។

66. គេមានអនុគមន៍អាំងតេក្រាល sine គឺ $Si(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$

(អាំងតេក្រាល $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ មិនកំណត់ចំពោះ $t=0$ ទេ។ ប៉ុន្តែវាមានលីមីតស្មើរមួយនៅពេលដែល $t\to 0$, នោះយើងអាចនិយាយថា $f(0)=1$ ហើយធ្វើឲ្យ f នៅលើ)។

(a). ចូរគូរក្រាបនៃ Si

(b). តើអនុគមន៍នេះមានតម្លៃ x ស្មើរប៉ុន្មានដែលធ្វើឲ្យវាមានអតិបរិមា?

(c). រកកូអរដោនេត្រង់ចំណុចមួយនៃអនុគមន៍ដើម។

(d). តើអនុគមន៍នេះមានអាស៊ីមតូតទ្រេតដែរឺទេ?

(e). ដោះស្រាយសមីការខាងក្រោម ៖

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt=1$$

67-68. គណនា $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ នៅពេលដែល f ជាអនុគមន៍ដែលត្រូវបានបង្ហាញខាងក្រោម

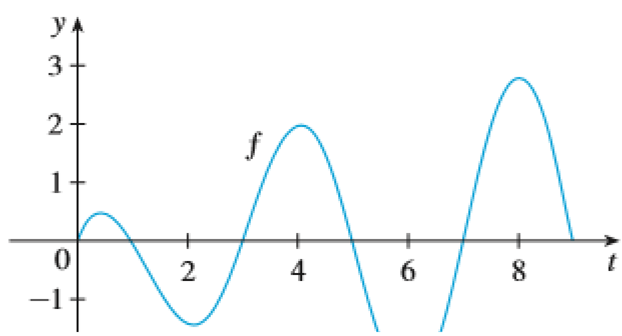
(a). គណនាតម្លៃ x ដែលធ្វើឲ្យអតិបរិមារ និងអប្បបរមារនៃអនុគមន៍ g កើតមានឡើង ។

(b). តើអនុគមន៍ g មានតម្លៃអតិបរិមារស្មើរប៉ុន្មាន?

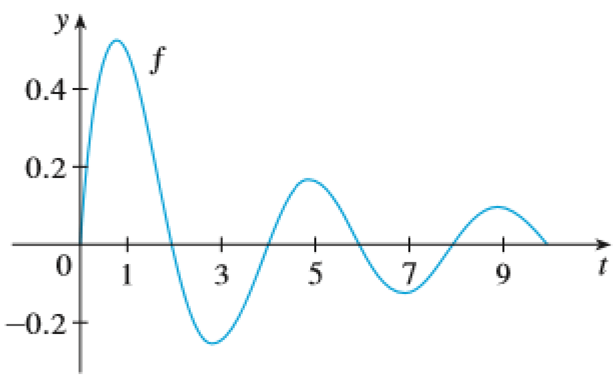
(c). តើអនុគមន៍ g ចុះនៅចន្លោះណា?

(d) Sketch the graph of g.

67.



68.



69-70. គណនាលីមីតនៃផលបូលខាងក្រោមដែលមានដែនកំណត់ $[0,1]$

69. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}$

70. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+......+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

71. បង្ហាញថាសមីការ (3) ពិតចំពោះ $h<0$

72. បើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ g និង h ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវ រកចម្លើយខាងក្រោម ៖

$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$

73. (a). បង្ហាញថា $1\le\sqrt{1+x^3}\le 1+x^3$ បើ $x\ge 0$

(b). បង្ហាញថា $1\le\int_0^1\sqrt{1+x^3}\,dx\le 1.25$

74. (a). បង្ហាញថា $\cos\left(x^2\right)\ge\cos x$ បើ $0\le x\le 1$

(b). បង្ហាញចំពោះវិសមភាព $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\left(x^2\right)dx\ge\frac{1}{2}$ ។

75. បង្ហាញថា $0\le\int_5^{10}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx\le 0.1$ ដោយប្រៀបធៀបអាំងតេក្រាលជាមួយអនុគមន៍ធម្មតា។

76. គេមាន៖ $f(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0 \\ x & , \ 0\le x\le 1 \\ 2-x & , 1<x\le 2 \\ 0 & , x>2\end{cases}$

និង $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

(a). Find an expression for $g(x)$ similar to the one for $f(x)$

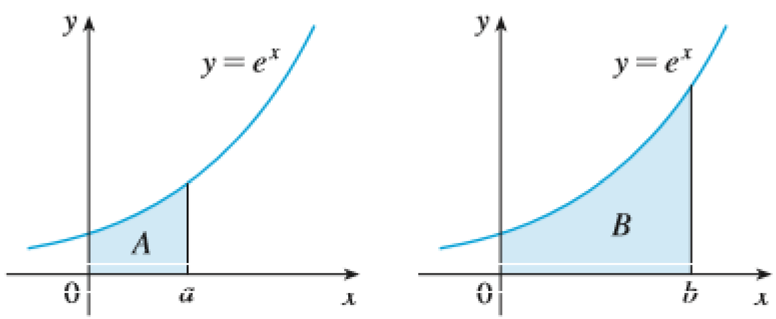
(b). គូរក្រាបនៃ f និង g ។

(c). តើនៅពេលណាដែល f មិនអាចកំណត់បាន ?តើនៅពេលណាដែល g មិនអាចកំណត់បាន?

77. រកអនុគមន៍ f និងa ចំពោះករណីខាងក្រោម៖

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt=2\sqrt{x}\ , \quad \forall x>0$$

78. រកផ្ទៃនៃផ្នែក B ដែលស្មើរនឹង 3 ដងនៃផ្នែក A គេឲ្យដូចរូបខាងក្រោម៖



5.4 អាំងតេក្រាលមិនកំណត់ និងអាំងតេក្រាលប្តូរអថេរ

អាំងតេក្រាលមិនកំណត់

ទាំងពីរផ្នែកនៃទ្រឹស្តីបទគ្រឹះគឺសុទ្ធតែបង្ហាញថា អនុគមន៍ជាប់គឺមានដេរីវេនិងអាំងតេក្រាល។

ផ្នែកទី១ ៖និយាយថា បើ f គឺជាអនុគមន៍ជាប់ នោះគេបាន $\int_a^x f(t)dt$ គឺជាព្រីមីទីវនៃ f ។

ផ្នែកទី 2 ៖ និយាយថា បើ $\int_a^b f(x)dx$ អាចគណនាបានដោយស្មើ $F(b)-F(a)$ នៅពេលដែល F ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ f យើងនិងកំណត់ព្រីមីទីវដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនោះ។ ពីព្រោះតាមទំនាក់ទំនងទ្រឹស្តីបទគ្រឹះបានបង្ហាញថា $\int f(x)dx$ គឺជាការរកព្រីមីទីវ នៃ f ដែលគេហៅថា អាំងតេក្រលមិនកំណត់។

គេកំណត់សរសេរបាន ៖ $\int f(x)dx = F(x)$ ដែល $F'(x) = f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍៖ យើងអាចសរសេរ

$\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+c$ ពីព្រោះថា $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+c\right) = x^2$

ដូចនេះ យើងអាចនិយាយបានថាមានចំនួនគត់មួយនៅ

1. លក្ខណៈនៃអាំងតេក្រាលមានដូចខាងក្រោម៖

$\int cf(x)dx = d\int f(x)dx$

$\int kdx = kx+c$

$\int\left[f(x)+g(x)\right] = \int f(x)+\int g(x)$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$

$\int e^x dx = e^x+c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int \sin xdx = -\cos x+c$

$\int \cos xdx = \sin x+c$

$\int \sec^2 xdx = \tan x+c$

$\int \csc^2 xdx = -\cot x+c$

$\int \sec x\tan xdx = \sec x+c$

$\int \csc x\cot xdx = -\csc x+c$

$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1}x+c$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

រំលឹកឡើងវិញចំពោះទ្រឹស្តីបទត្រង់ចំណុច 4.9.1 គេបាននិយាយថា អាំងតេក្រាលនៃ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ -\frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍ 1 ៖ រកអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

$$\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx$$

ដំណោះស្រាយ ៖ យើងប្រើទំនាក់ទំនងរបស់យើងក្នុងតារាងទី 1 យើងបាន

$$\begin{aligned}\int \left(10x^4 - 2\sec^2 x\right)dx &= 10\int x^4 dx - 2\int \sec^2 x dx \\ &= 10\frac{x^2}{5} - 2\tan x + c \\ &= 2x^5 - 2\tan x + c\end{aligned}$$

អ្នកគួរតែពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នកដោយធ្វើឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

ឧទាហរណ៍ 2 ៖ គណនា $\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$

ដំណោះស្រាយ៖ នេះមិនមែនជាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ដែលចូលទម្រង់ណាមួយក្នុងតារាងទី 1 នោះទេ ។ ដូចនេះយើងអាចបំបែកទម្រង់ត្រីកោណមាត្រនេះជាទម្រង់មួយទៀតគឺ៖

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta &= \int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta \\ &= \int \csc\theta \cot\theta d\theta = -\csc\theta + c\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍ 3 ៖ គណនា $\int_0^3 \left(x^3 - 6x\right)dx$

ដំណោះស្រាយ៖ ប្រើ FTC2 និងតារាងទី 1 យើងបាន៖

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-6\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{1}{4}3^4-3\cdot 3^2\right)-\left(\frac{1}{4}0^4-3\cdot 0^2\right)$$

$$=\frac{81}{4}-27-0+0=-6.75$$

ប្រៀបធៀបការគណនានេះជាមួយនិង ឧទាហរណ៍ 2(b) ក្នុងផ្នែក 5.2។

ឧទាហរណ៍ 4 ៖ រក $\int_0^2 \left(2x^3-6x+\frac{3}{x^2+1}\right)dx$ និងទាញលទ្ធផលជាផ្ទៃ។

ដំណោះស្រាយ ៖ តាមទ្រឹស្តីបទយើងបាន

$$\int_0^2 \left(2x^3-6x+\frac{3}{x^2+1}\right)dx=\left[2\frac{x^4}{4}-6\frac{x^2}{2}+3\tan^{-1}x\right]_0^2$$

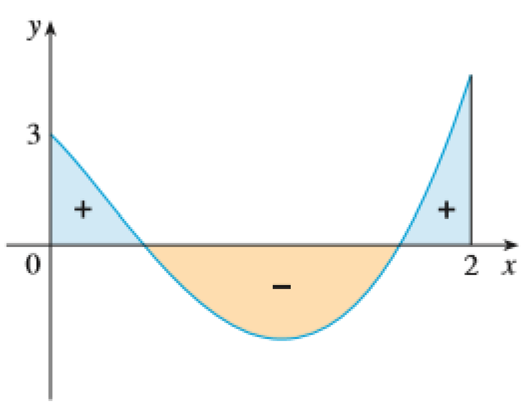
$$=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^2+3\tan^{-1}x\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(2^4\right)-3\left(2^2\right)+3\tan^{-1}2-0$$

$$=-4+3\tan^{-1}2$$

នេះគឺជាលទ្ធផលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនេះ។ ប្រសិនបើចម្លើយវាជាលេខជាក់លាក់នោះគេអាចប្រើ ម៉ាស៊ីនគិតលេខរកតម្លៃនៃ $\tan^{-1}2$ បាន ។ នោះយើងបានចម្លើយថ្មីគឺ

$$\int_0^2 \left(2x^3-6x+\frac{3}{x^2+1}\right)dx\approx -0.67885$$



ឧទាហរណ៍ 5 ៖ គណនា $\int_1^9 \left(\frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}\right)dt$

ដំណោះស្រាយ ៖ ទីមួយយើងសរសេរអាំងតេក្រាលឲ្យមានទម្រង់ធម្មតាសិនដោយបំបែកភាគបែងចេញពីគ្នា គេបាន

$$\int_0^9 \frac{2t^2+t^2\sqrt{t}-1}{t^2}dt = \int_0^9 \left(2+t^{1/2}-t^{-2}\right)dt$$

$$= \left[2t+\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^9 = \left[2t+\frac{2}{3}t^{3/2}+\frac{1}{t}\right]_1^9$$

$$= \left(2\cdot 9+\frac{2}{3}\cdot 9^{3/2}+\frac{1}{9}\right)-\left(2\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}+\frac{1}{1}\right)$$

$$= 18+18+\frac{1}{9}-2-\frac{2}{3}-1 = 32\frac{4}{9}$$

ការអនុវត្តន៍

ផ្នែកទី 2 តាមទ្រឹស្តីបទបាននិយាយថា ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះគេបាន

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

នៅពេលដែល F ជាដេរីវេណាមួយនៃ f ។ នោះមានន័យថា $F'=f$ ដូចនេះសមីការខាងលើអាចសរសេរបានជា $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$

យើងដឹងថា $F'(x)$ តំណាងឲ្យ តម្លៃនៃ $y=F(x)$ និងតម្លៃទៅកាន់ x និង $F(b)-F(a)$ គឺជាការប្តូរនៅក្នុង y នៅពេលដែល x ប្តូរពី a ទៅ) b ចំណាំ y អាចកើនឡើង ថយចុះ ហើយកើនឡើងមកម្តងទៀត។ ដូចនោះ y អាចនឹងប្តូរទិសដៅពី $F(b)-F(a)$ បាន (ដូច្នេះយើងអាចធ្វើតាមទម្រង់ FTC2 ក្នុងពាក្យដូចខាងក្រោម៖

ផ្នែក 5.4 អាំងតេក្រាលមិនកំណត់និងការផ្លាស់ប្តូរទ្រឹស្តីបទ៖

អាំងតេក្រាលនៃអត្រាការផ្លាស់ប្តូរបានមកពី ៖ $\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a)$

គំរូដំបូងនេះអាចគណនាអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូរបានទាំងអស់ ក្នុងធម្មជាតិ ជីវសាស្រ្តនិង វិទ្យាសាស្រ្ត ផងដែលយើងអាចពិនិត្យមើលបានក្នុងផ្នែក 3.7។ នោះយើងអាចមើលប្រវែងដែលយើងអាចគិតបានដូចជា

- ប្រសិបបើ $V(t)$ គឺជាតម្លៃនៃទឹកក្នុងអាងមួយនៅខណៈពេល t ណាមួយ នោះ $V'(t)$ គឺជាអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូររបស់ទឹកចូលទៅក្នុងអាងទឹងនៅខណៈពេល t ។

ដូចនេះ $\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt = V(t_2) - V(t_1)$ នេះគឺជាការផ្លាស់ប្តូរបរិមាណនៃទឹកក្នុងអាងនៅចន្លោះពេល $t\,1$និង t_2 ។

- ប្រសិនបើ $[\,C](t)$ គឺជាការប្រមូលផ្តុំ)កំហាប់(សារធាតុគីមីណាមួយក្នុងខណៈពេល t នោះអត្រានៃការផ្លាស់ប្តូររបស់វាគឺជាដេរីវេ $d[C]/dt$ ដូចនេះ $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}dt = [C](t_2) - [C](t_1)$ នេះគឺជាការផ្លាស់ប្តូរកំហាប់នៃ C នៅចន្លោះពេល t_1 ទៅ t_2

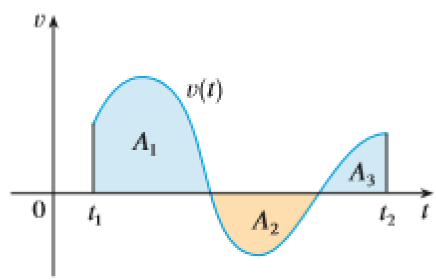
- ប្រសិនបើ ម៉ាស់នៃយុថ្កាមួយត្រូវបានដាក់នៅចំណុច x មួយគឺ $m(x)$ នោះបន្ទាត់នោះមានតម្លៃ $\rho(x) = m'(x)$ ។ ដូចនេះ $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}dt = n(t_2) - n(t_1)$ គឺជាការផ្លាស់ប្តូរចំនួនមនុស្សក្នុងកំឡុងពេល t_1 ទៅ t_2 ។) មនុស្សកើនឡើងនៅពេលដែលមានមនុស្សកើត ហើយនិងថយចុះមកវិញនៅពេលដែលមនុស្សស្លាប់។ យើងនិងដឹងពីការផ្លាស់ប្តូរកាន់នៅតែច្បាស់នៅពេលដែលដឹងចំនួនមនុស្សកើតនិងមនុស្សស្លាប់ច្បាស់(។
- ប្រសិនបើ $C(x)$ គឺជាតម្លៃនៃផលិតផល x រួមនៃផលិតផលនោះ។ នោះតម្លៃនៃការវិនិយោគគឺជាដេរីវេ $C'(x)$ ដូនេះ $\int_{x_1}^{x_2} C'(x)dx = C(x_2) - C(x_1)$ គឺជាកំណើនក្នុងតម្លៃនៅពេលដែលផលិតផលនោះមានការកើនឡើងពី x_1 ទៅ x_2 ។
- ប្រសិនបើ វត្ថុមួយផ្លាស់ទីលើគន្លងត្រង់មួយត្រង់ទីតាំងមួយតាងដោយអនុគមន៍ $s(t)$ នោះវិទ័រល្បឿនរបស់វាតាងដោយ $v(t) = s'(t)$ ដូចនេះ

(2) $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$ នេះគឺជាការផ្លាស់ប្តូរទីតាំង ឬបម្លាស់ទីនៃវត្ថុក្នុងខណៈពេល t_1ទៅ t_2 ។ ក្នុងផ្នែក 5.1 យើងបានប៉ាន់ស្មានរួចមកហើយថាវាត្រឹមត្រូវសម្រាប់ករណីដែលអង្គធាតុមួយផ្លាស់ទីតាមទិសដៅវិជ្ជមាន ប៉ុន្តែយើងបានបង្ហាញរួចមកហើយថាវាពិតរហូត ។

- ប្រសិនបើយើងចង់គណនាចម្ងាយដែលវត្ថុនោះធ្វើដំណើរក្នុងរយៈពេលណាមួយនោះយើងត្រូវពិនិត្យមើលថានៅពេលដែល $v(t) \geq 0$ (ភាគល្អិតស្ថិតក្នុងផ្នែកវិជ្ជមាន) និងពិនិត្យមើលនៅពេលដែល $v(t) \leq 0$ (ភាគល្អិតស្ថិតក្នុងផ្នែកអវិជ្ជមាន(។ ក្នុងករណីទាំងពីរនេះចម្ងាយវាគេអាចដាក់ក្នុងតម្លៃដាច់ខាតមួយគឺ $|v(t)|$ នោះគេកំណត់សរសេរដោយ

(3) $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| t =$ ចម្ងាយសរុបនៃការធ្វើដំណើរ

រូបទី3 បង្ហាញពីករណីទាំងពីរគឺការផ្លាស់ទីនិងប្រវែងនៃការធ្វើដំណើរអាចបង្ហាញឲ្យឃើញក្នុងក្រុមនៃផ្ទៃខាងក្រោមនៃក្រាបវិទ័រ។



បម្លាស់ទី $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A$

ប្រវែង $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

- សំទុះនៃវត្ថុតាងដោយ $a(t) = v'(t)$ ដូចនេះ $\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ គឺជាបម្លាស់ប្តូរវិទ័រនៅខណៈ t_1 ទៅ t_2 ។

ឧទាហរណ៍ 6 ៖ ភាគល្អិតមួយបានផ្លាស់ទីលើគន្លងត្រង់មួយដោយល្បឿននៅខណៈ t គឺ $v(t) = t^2 - t - 6$ (គិតជា m/s)

(a) រកបម្លាស់ទីរបស់ភាគល្អិតចន្លោះពេល$1 \leq t \leq 4$ ។

(b) រកប្រវែងក្នុងការធ្វើដំណើររបស់ភាគល្អិតក្នុងខណៈពេលខាងលើ។

ដំណោះស្រាយ៖

(a) រកបម្លាស់ទីរបស់ភាគល្អិត

តាមសមីការ (2) គេបានបម្លាស់ទីគឺ៖

$$s(4)-s(1)=\int_1^4 v(t)\,dt=\int_1^4 (t^2-t+6)\,dt$$

$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t\right]_1^4=-\frac{9}{2}$$

នោះមានន័យថាភាគល្អិតផ្លាស់ទីបាន $4.5m$ ឆ្ពោះទៅរកផ្នែកអវិជ្ជមាន។

(b) គណនាចម្ងាយដែលភាគល្អិតចរបាន

ចំណាំ $v(t)=t^2-t+6=(t-3)(t+2)$ ហើយ $v(t)\le 0$ នៅចន្លោះ $[1,3]$ និង $v(t)\ge 0$ នៅចន្លោះ $[3,4]$ នោះតាមសមីការ (3) ប្រវែងនៃការធ្វើដំណើរគឺ

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt=\int_1^3 [-v(t)]\,dt+\int_3^4 v(t)\,dt$$

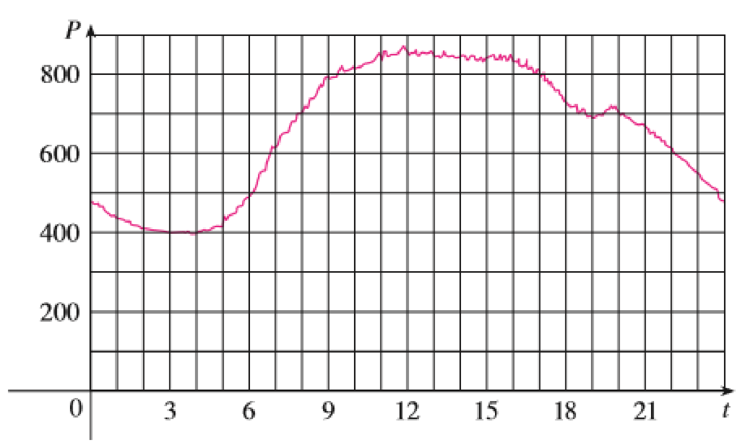
$$=\int_1^3 (-t^2+t-6)\,dt+\int_3^4 (t^2-t+6)\,dt$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-6x\right]_1^3+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+6t\right]_3^4$$

$$=\frac{61}{6}\approx 10.17m$$

ឧទាហរណ៍ 7 ៖ រូបទី 4 បង្ហាញពីការសំទុះនៃការចំណាយក្នុងទីក្រុង San Francisco សម្រាប់មួយថ្ងៃក្នុងខែកញ្ញា (P គិតជា MW , t គិតជាម៉ោងដែលចាប់ផ្តើមឡើងនៅខណៈពេលពាក់កណ្តាលយប់)។ រកចំណាយថាមពលសរុបដែលបានប្រើក្នុងរយៈពេលមួយថ្ងៃនេះ។

រូបទី 4



ដំណោះស្រាយ៖ សំទុះអត្រាផ្លាស់ប្តូរនៃចំណាយគឺ ៖ $P(t)=E'(t)$ តាមទ្រឹស្តីនៃការផ្លាស់ប្តូរគេបាន៖

$$\int_0^{24} P(t)\,dt=\int_0^{24} E'(t)\,dt=E'(24)-E(0)$$

នេះជាចំណាយថាមពលសរុបនៃការប្រើប្រាស់ក្នុងមួយថ្ងៃ ។ យើងប៉ាន់ស្មានតម្លៃដោយប្រើ ច្បាប់ចំណុចកណ្តាល 12 subintervals និង $\Delta t=2$ គេបាន៖

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx \left[P(1)+P(3)+P(5)+......+P(21)+P(23)\right]\Delta t\\ &\approx (440+400+420+620+790+840+850+840+810+690+670+550)\Delta t\\ &=15,840\end{aligned}$$

ដូចនេះក្នុងការចំណាយថាមពលមួយថ្ងៃ អស់ប្រហែល $15,840\ MWh$ ។

តើយើងដឹងវាដោយរបៀបណាថាតម្លៃស្មើប៉ុណ្ណឹងនៃការប្រើប្រាស់ថាមពលក្នុងឧទាហរណ៍ 7 ?

អាំងតេក្រាល $\int_0^{24} P(t)dt$ គឺកំណត់ដោយលីមីតនៃផលបូកដែលបានមកពី $P(t_i^*)$ ។ ឥឡូវ $P(t_i^*)$ គិតជា MW និង Δt គិតជា h ដូចនេះចម្លើយរបស់វាគិតជា MWh ។វាដូចគ្នាគឺពិតក្នុងលីមីត។ ខ្នាតនៃ $\int_a^b f(x)dx$ គឺជាផលនៃខ្នាតសម្រាប់ $f(x)$ និងខ្នាតសម្រាប់ x ។

5.4 លំហាត់

1-4. បង្ហាញថាអនុគមន៍ព្រីមីទីវខាងក្រោមត្រឹមត្រូវតាមរូបមន្ត៖

1. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+c$

2. $\int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

3. $\int \cos^3 x dx=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$

4. $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}dx=\frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx}+c$

5-18. រកអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

5. $\int\left(x^2+x^{-2}\right)dx$

6. $\int\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

7. $\int\left(x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-2\right)dx$

8. $\int\left(y^3+1.8y^2-2.4y\right)dy$

9. $\int(u+4)(2u+1)\,du$

10. $\int v\left(v^2+2\right)^2 dv$

11. $\int\frac{x^3-2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\int\left(x^2+1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\int(\sin x+\sinh x)\,dx$

14. $\int\sec t(\sec t+\tan t)\,dt$

15. $\int(\theta-\csc\theta\cot\theta)\,d\theta$

16. $\int\sec t(\sec t+\tan t)\,dt$

17. $\int\left(1+\tan^2\alpha\right)dx$

18. $\int\frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$

19-20. រកអនុគមន៍ដើមនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយបង្ហាញក្រាបរបស់វាក្នុងប្លង់តែមួយ៖

19. $\int\left(\cos x+\frac{1}{2}x\right)dx$

20. $\int\left(e^x-2x^2\right)dx$

21-46. គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

21. $\int_{-2}^{3}\left(x^2-3\right)dx$

22. $\int_{1}^{2}\left(4x^3-3x^2+2x\right)dx$

23. $\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{4}t^3-t\right)dt$

24. $\int_{0}^{3}\left(1+6w^2-10w^4\right)dw$

25. $\int_{0}^{2}(2x-3)\left(4x^2+1\right)dx$

26. $\int_{-1}^{1}t(t-t)^2\,dt$

27. $\int_{0}^{\pi}\left(5e^x+3\sin x\right)dx$

28. $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx$

29. $\int_{1}^{4}\left(\frac{4+6u}{\sqrt{u}}\right)du$

30. $\int_{0}^{4}\left(3\sqrt{t}-2e^t\right)dt$

32. $\int_0^4 \frac{\sqrt{y}-y}{y^2}dy$

33. $\int_1^2 \left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx$

34. $\int_1^0 \left(5x-5^x\right)dx$

35. $\int_0^1 \left(x^{10}+10^x\right)dx$

36. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2\theta d\theta$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\theta+\sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$

39. $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$

40. $\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\sinh x+\cosh x}dx$

41. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$

42. $\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$

43. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2-1}{t^4-1}dt$

44. $\int_0^2 |2x-1|\,dx$

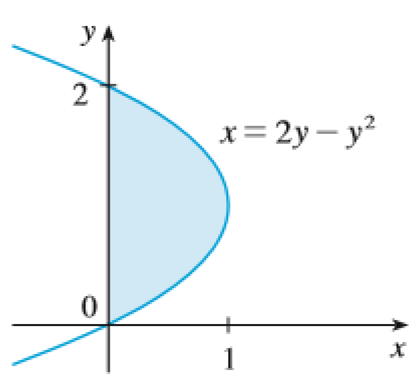
45. $\int_{-1}^2 \left(x-2|x|\right)dx$

46. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx$ ។

47. ប្រើក្រាប់ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលរបស់ x ដែលកាត់ក្រាប $y=1-2x-5x^4$ ។ បន្ទាប់មកប្រើទ្រឹស្តីបទគ្រឹះដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡាដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមនៃក្រាបតាមតម្លៃ x ដែលបានរកឃើញខាងលើ។

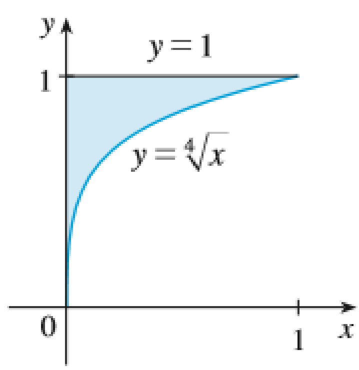
48. ប្រើតាមលំនាំនៃលំហាត់ទី 47 ទាំងដោយប្តូរក្រាបនៃអនុគមន៍ y ទៅជា $y=\left(x^2+1\right)^{-1}-x^4$ ។

49. ផ្ទៃនៃតំបន់ដែលខណ្ឌដោយក្រាបនៃប៉ារ៉ាបូល $x=2y-y^2$ ផ្នែកខាងស្តាំនៃអ័ក្ស (តំបន់ដែលមានពណ៌ស្រទំដូចក្នុងរូប) កំណត់ដោយអាំងតេក្រាល $\int_0^2\left(2y-y^2\right)dy$ ។ រកផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយតំបន់នោះ។



50. តំបន់ដែលមានផ្ទៃស្រទំត្រូវបានខ័ណ្ឌដោយអ័ក្ស y និងបន្ទាត់ $y=1$ ជាមួយនិងលក្រាប $y=\sqrt[4]{x}$ ។

គណនាផ្ទៃនៃតំបន់នោះដោយសរសេរ x ជាអនុគមន៍នៃ y រួចគណនាតម្លៃនោះ (លំនាំដូចលំហាត់ 49) ។



51. ប្រសិនបើ $w'(t)$ គឺជាអនុគមន៍តម្លៃលេខណាមួយដែលកំណត់អាយុរបស់ក្មេងគិតជាឆ្នាំ។

តើ $\int_5^{10} w'(t)dt$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន ?

52. ខ្សែនៃចរន្តអគ្គិសនីមួយត្រូវបានកំណត់ដោយសមីការ $I(t)=Q'(t)$ (មើលឧទាហរណ៍ 3 ក្នុងចំណុចទី 3.7) ។តើ $\int_a^b I(t)dt$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន ?

53. ប្រេងកាតក្នុងធុងមួយតាងដោយ $r(t)$ gallons/mn នៅខណៈ t ។ តើ $\int_0^{120} r(t)dt$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន ?

54. ក្រុមសត្វឃ្មុំចាប់ពី 100 ក្បាល និងកើនឡើងតាមអនុគមន៍ $n'(t)$ ក្បាលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។

តើ $100+\int_0^{15} n'(t)dt$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន?

55. ក្នុងផ្នែក 4.7 យើងកំណត់ដែលសរសេរនៅទំព័រដើមឲ្យអនុគមន៍ $R'(x)$ ដូចជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $R(x)$ នៅពេលដែល x មានតម្លៃកំណត់ ។ តើ $\int_{1000}^{5000} R'(x)dx$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន?

56. បើ $f(x)$ គឺជាចម្ងាយផ្លូវលំដែលមានអនុគមន៍នឹង x គិតជា miles ដែលគិតចម្ងាយលើផ្លូវលំ ។

តើ $\int_3^5 f(x)dx$ មានតម្លៃស្មើប៉ុន្មាន ?

57. ប្រសិនបើ x ជាទំហំក្នុង ម៉ែត្រ ហើយ $f(x)$ គឺជាទំហំមួយក្នុង ញូតុន។ តើ $\int_0^{100} f(x)dx$ មានទំហំអ្វី?

58. ប្រសិនបើខ្នាតរបស់ x ជា feet ហើយខ្នាតរបស់ $a(x)$ ជា pounds per foot ។ តើ da/dx មានខ្នាតអ្វី? តើខ្នាតនៃ $\int_2^8 a(x)dx$ មានដែរីទេ?

59-60. អនុគមន៍ល្បឿនមួយ (m/mn) ដែលជារបស់ភាគល្អិតមួយដែលធ្វើចលនាផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់ត្រង់មួយ។ រក៖

(a). បម្លាស់ទី

(b). ចម្ងាយដែលធ្វើដោយភាគល្អិតក្នុងកំឡុងពេលដែលឲ្យដូចខាងក្រោម។

59. $v(t)=3t-5, \quad 0\le t\le 3$

60. $v(t)=t^2-2t-8, \quad 1\le t\le 6$

61-62. អនុគមន៍សំទុះមួយ (m/s^2) ហើយមានល្បឿនដើម គឺធ្វើឲ្យភាគល្អិតផ្លាស់ទីតាមបន្ទាត់ត្រង់។រក

(a). ល្បឿនជាអនុគមន៍ទៅនឹង t

(b). ចម្ងាយក្នុងការធ្វើដំណើរក្នុងចន្លោះពេលដែលឲ្យខាងក្រោម។

61. $a(t)=t+4, \quad v(0)=5, \quad 0\le t\le 10$

62. $a(t)=2t+3, \quad v(0)=-4, \quad 0\le t\le 3$

63. ប្រវែងនៃដងយុថ្កាមួយ មានប្រវែង $4m$ គឺឲ្យដោយអនុគមន៍ $\rho(x)=9+2\sqrt{x}$ គិតជា kg/m ដែល x គិតជាង m នៅចុងនៃយុថ្កា ។ រកម៉ាស់សរុបនៃយុថ្កា ។

64. ទឹកហូរមកពីបាតនៃអាងស្តុកមួយឲ្យដោយសមីការ $r(t)=200-4t \quad (l/mn)$ ដែល $0\le t\le 50$ ។ រកកំណើននៃទឹកដែលហូរចេញពីអាងស្តុកទឹកនោះនៅខណៈ $10mn$ ដំបូង។

65. ល្បឿននៃឡានមួយត្រូវបានផ្ទៀងដោយនាឡិកាស្ទង់ល្បឿនមួយកំណត់ក្នុងចន្លោះពេល $10s$ និងត្រូវបានកត់ទុកក្នុងតារាងខាងក្រោម។ ប្រើ Midpoint Rule ដើម្បីគណនាចម្ងាយដែលធ្វើដំណើរដោយឡាននេះ ។

$t(s)$	$v(mi/h)$	$t(s)$	$v(mi/h)$
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

អាំងតេក្រាលដោយប្រើវិធីសាស្ត្រជំនួស

ដោយសារតែតាមទ្រឹស្តីបទគ្រឹះ គឺវាផ្តោតសំខាន់ទៅលើការរកដេរីវេរបស់អនុគមន៍នោះ។ ប៉ុន្តែពួកយើងមិនអាចអនុគមន៍ដេរីវេងាយរបស់វាបានទេ ដូចជា

(1). $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

ដើម្បីរកអាំងនេះបានយើងប្រើ Problem-solving of intriducing something extra ។ នៅពេលដែលយើងប្រើវិធីសាស្ត្រពិសេសនោះយើងបានរូបមន្តថ្មីមួយផ្សេងទៀត ។ យើងអាចប្តូរអថេរ x ទៅជាអនុ

គមន៍ថ្មីមួយទៀតដែលមានអថេរ u ដែលមាន $u=1+x^2$ ។ បន្ទាប់យើងដេរីវេ u គេបាន $du=2xdx$ ។ ចំណាំប្រសិនបើ du ស្ថិតក្នុងអាំងតេក្រាលស្រាប់នោះគេអាចជំនួសអថេរថ្មីបានក្នុងអាំងតេក្រាលចាស់មានន័យថាអាំងតេក្រាលអាចជំនួសទៅក្នុង សមីការ (1) បាន ។ នោះគេអាចសរសេរបាន៖

$$(2)\quad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int \sqrt{1+x^2}\,2xdx=\int \sqrt{u}\,du$$
$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

ប៉ុន្តែឥឡូវយើងអាចពិនិត្យមើលថាចម្លើយអាំងតេក្រាលត្រូវឬខុសគេប្រើ Chain Rule ដើម្បីរកព្រីមីទីវចុងក្រោយរបស់សមីការ (2)៖

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=2x\sqrt{x^2+1}$$

ជាទូទៅ៖ វិធីនេះគេធ្វើនៅពេលណាដែលអាំងតេក្រាលនោះអាចសរសេរជាទម្រង់ $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx$ ដែល $F'=f$ ។

$$(3)\qquad \int F'\left(g(x)\right)g'(x)\,dx=F\left(g(x)\right)+c$$

ពីព្រោះ ដោយតាមច្បាប់ Chain Rule គេបាន៖

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right]=F'\left(g(x)\right)g'(x)$$

ប្រសិនបើគេប្តូរអថេរគេបាន $u=g(x)$ តាមសមីការ (3) គេបាន ៖

$$\int F'\left(g(x)\right)g'(x)\,dx=F\left(g(x)\right)+c=\int F'(u)\,du$$

ដោយ $F'=f$ យើងអាចសរសេរកាត់ជា៖

$$\int f\left(g(x)\right)g(x)'\,dx=\int f(u)\,du$$

នោះគេអាចគណនាបានដោយគោរព្វតាមវិធាននេះ។

(4) តាមសម្រាយខាងលើ ប្រសិនបើ $u=g(x)$ គឺជាអនុគមន៍ឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលកំណត់លើដែនកំណើត I ហើយ f ជាប់នៅលើ I ។

គេកំណត់សរសេរ៖ $\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$

ចំណាំគេអាចប្រើតាមវិធីប្តូរអថេរបានលុះត្រាណាតែអនុគមន៍នោះអាចគោរពតាម Chain Rule នៃ

ឌីផេរ៉ង់ស្យែល ។ ប្រសិនបើ $u=g(x)$ នោះ $du=g'(x)dx$ នោះគេអាចប្តូរអថេរពី dx មកជា du បានតាមសមីការ (4) ។

សរុបមក តាមវិធីសាស្រ្តប្តូរអថេរយើងអាចនិយាយបានថា ៖ វាជាវិធីសាស្រ្តដែលបង្កលក្ខណៈងាយស្រួលដោយប្តូរពី dx ដែលស្មុកស្មាញរួចមកតាង du ដើម្បីឲ្យមានភាពងាយស្រួលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលវិញ។

ឧទាហរណ៍១ ៖ ចូររក $\int x^3\cos\left(x^4+2\right)dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងតាង $u=x^4+2$ ពីព្រោះ $du=4x^3dx$ នោះគេបាន $x^3dx=\frac{1}{4}du$

តាមវិធីសាស្រ្តប្តូរអថេរគេបាន ៖

$$\begin{aligned}\int x^3\cos\left(x^4+2\right)dx &= \int \cos u\cdot\frac{1}{4}du=\frac{1}{4}\int\cos u\,du\\ &=\frac{1}{4}\sin u+c\\ &=\frac{1}{4}\sin\left(x^4+2\right)+c\end{aligned}$$

ចំណាំយើងអាចរកតម្លៃជាក់លាក់បានលុះត្រាតែយើងស្គាល់តម្លៃពិតរបស់ x ។

ឧទាហរណ៍2 ៖ គណនា $\int\sqrt{2x+1}dx$

ដំណោះស្រាយ១៖ តាង $u=2x+1$ នោះគេបាន $du=2dx$ នាំឲ្យ $dx=\frac{1}{2}du$

តាមវិធីសាស្រ្តប្តូរអថេរគេបាន៖

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

ដំណោះស្រាយ 2 ៖ តាង $u=\sqrt{2x+1}$ នោះគេបាន $du=\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ នោះ $dx=\sqrt{2x+1}du=udu$

)ឬ $u^2=2x+1$ នោះ ($2udu=2dx$ គេបាន ៖

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int u \cdot udu = \int u^2 du$$

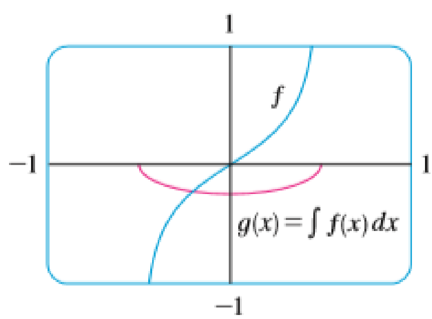
$$= \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + c$$

ឧទាហរណ៍ 3 ៖ រក $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $u=1-4x^2$ នាំឲ្យ $du=-8xdx$ នោះគេបាន $xdx=-\frac{1}{8}du$ និង

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2\sqrt{u}\right) + c = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-4x^2}\right) + c$$



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$g(x) = \int f(x)dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}$$

ក្នុងចំលើយឧទាហរណ៍ទី 3 នេះយើងបានធ្វើដោយប្រើឌីផេរ៉ង់ស្យែលរួចមកហើយ ប៉ុន្តែចូរពិនិត្យមើលជាមួយនិងក្រាបវិញ។ក្នុងរូបទី 1 នេះយើងបានប្រើកុំព្យូទ័រដើម្បីគូសក្រាបអាំងតេក្រាលនៃ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$ និង ក្រាប់នៃអនុគមន៍ $g(x)=-\frac{1}{4}\sqrt{1-x^2}$ (ក្នុងករណីដែល $c=0$) ។ កំណត់ចំណាំ អនុគមន៍ $g(x)$ ថយចុះនៅពេលដែល $f(x)$ អវិជ្ជមាន ហើយវាកើនឡើងនៅពេលដែល $f(x)$ វិជ្ជមាន ហើយវាមានអប្បរមារនៅពេលដែល $f(x)=0$ ។ ដូចនេះវាសមាមាត្រគ្នាតាមការបកស្រាយតាមក្រាបនេះ នោះអនុគមន៍ $g(x)$ គឺជាដេរីវេនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

ឧទាហរណ៍ 4 ៖ គណនា $\int e^{5x}dx$

ដំណោះស្រាយ ៖ ប្រសិនបើយើងតាង $u=5x$ ហើយ $du=5dx$ នោះ $dx=\frac{1}{5}du$ គេបាន

$$\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{u}+c=\frac{1}{5}e^{5x}+c$$

ឧទាហរណ៍1 ដូចខាងក្រោម ៖

$$\int x^3\cos(x^4+2)dx=\int\cos\left(x^4+2\right)\cdot x^3dx=\frac{1}{4}\int\cos\left(x^4+2\right)\cdot\left(4x^3\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos\left(x^4+2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)dx=\frac{1}{4}\sin\left(x^4+2\right)+c$$

ជាធម្មតាក្នុងដំណោះស្រាយឧទាហរណ៍ 4 គេអាចសរសេរបាន៖

$$\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d}{dx}\left(e^{5x}\right)dx=\frac{1}{5}e^{5x}+c$$

ដំណោះស្រាយនេះគេច្រើនប្រើវាចំពោះអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះព្រោះវាខ្លីហើយងាយស្រួលយល់។

ឧទាហរណ៍ 5 ៖ រក $\int\sqrt{1+x^2}\,x^5dx$

ដំណោះស្រាយ៖ ចំពោះ x^5 យើងអាចបំបែកជា $x^4\cdot x$

$$\int\sqrt{1+x^2}\,x^5dx$$

តាង $u=1+x^2$ នាំឲ្យ $du=2xdx$ គេបាន $xdx=\frac{1}{2}du$

$u = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 1 \Leftrightarrow x^4 = (u-1)^2$ នោះគេទាញបាន ៖

$$\int \sqrt{1+x^2}\, x^5 dx = \int \sqrt{1+x^2}\, x^4 \cdot x dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u-1)^2 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\left(u^2 - 2u + 1\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - 2 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) + c$$

ឧទាហរណ៍ 6 ៖ គណនាតម្លៃ $\int \tan x dx$

ដំណោះស្រាយ៖ ដំបូងយើងត្រូវបំបែកវាឲ្យទៅជាអនុគមន៍ sine និង cosine សិន

គេសរសេរបាន $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

តាង $u = \cos x$ នាំឲ្យ $du = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -du$ គេបាន

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{u} du$$

$$= -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$$

ដែល $-\ln|\cos x| = \ln\left(|\cos x|^{-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{|\cos x|}\right) = \ln|\sec x|$

ដូចនេះគេអាចសរសេរថា $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$ (5)

អាំងតេក្រាលកំណត់

នៅពេលដែលយើងគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ គឺមានវិធីពីរក្នុងការដោះស្រាយ ។

វិធីទី 1 គឺការគណនាតាមអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ទី1 បន្ទាប់មកយើងប្រើ Fundamental Theotrem ។

យ៉ាងណាមិញដូចជាការប្រើក្នុងលទ្ធផលនៃឧទាហរណ៍ទី 2 យើងមាន
$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \left|\int \sqrt{2x+1}dx\right|_0^4$$
$$= \left|\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right|_0^4 = \frac{1}{3}(9)^{3/2} - \frac{1}{3}(1)^{3/2}$$
$$= \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

វិធីមួយទៀតគេឃើញមានប្រើតិចតួចបំផុតគឺគេប្តូរវាទៅជាលីមីតនៃអាំងតេក្រាលនៅពេលដែលអាំងតេក្រាលមានបម្រែបម្រួល។

(6) ទ្រឹស្តីបទ៖ បើ g' គឺជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ ហើយអនុគមន៍ f គឺជាអនុគមន៍ជាប់លើផ្នែកនៃ $u = g(x)$ នោះគេបាន

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

សម្រាយបញ្ជាក់ ៖

គេមាន F ជាព្រីមីទីវនៃ f ហើយតាមសមីការ (3) គេមាន $F(g(x))$ គឺជាព្រីមីទីវមួយផ្សេងទៀតនៃ $f(g(x))g'(x)$ ដូចនេះតាមផ្នែកទី 2 នៃ Fundamental Theorem យើងបាន៖

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

But, applying FTC2 a second time , we also have $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \left[F(u)\right]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$

ឧទាហរណ៍ 7 ៖ គណនា $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ ប្រើតាម (6)

ដំណោះស្រាយ៖ តាង $u = 2x+1$ និង $dx = \frac{1}{2}du$ ដើម្បីរកលីមីតនៃអាំងតេក្រាលបានគឺ

នៅពេល $x = 0,\ u = 2(0)+1$ និង $x = 4,\ u = 2(4)+1 = 9$

នោះគេបាន៖

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9$$
$$= \frac{1}{3}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{26}{3}$$

ឧទាហរណ៍ 8 ៖ គណនាតម្លៃ $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$

ដំណោះស្រាយ ៖ តាង $u = 3-5x$ នោះ $\Rightarrow dx = -\frac{1}{5}du$ $du = -5dx$

នៅពេល $x = 1 \Rightarrow u = -2$ នៅពេលដែល $x = 2 \Rightarrow u = -7$ នោះគេទាញបាន៖

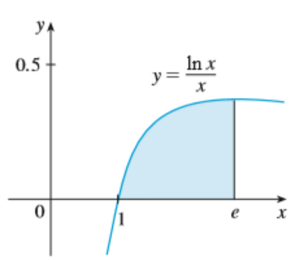
$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}$$
$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

ឧទាហរណ៍ 9 ៖ គណនា $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

ដំណោះស្រាយ ៖ យើងតាង $u = \ln x$ ពីព្រោះដេរីវេវាគឺ $du = \frac{dx}{x}$ មានរាងដូចអាំងតេក្រាល

នៅពេលដែល $x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ និង $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$ គេបាន៖

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$



លំហាត់

1-6 គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលដោយប្រើតាមលក្ខខណ្ឌដែលឲ្យខាងក្រោម៖

1. $\int e^{-x}dx, \quad u=-x$

2. $\int x^3\left(2+x^4\right)^5 dx, \quad u=2+x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx, \quad u=x^3+1$

4. $\int \frac{dt}{(1-6t)^4}, \quad u=1-6t$

5. $\int \cos^3\theta\sin\theta d\theta, \quad u=\cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}dx, \quad u=1/x$

7-48 . គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម៖

7. $\int x\sin x^2 dx,$

8. $\int x^2e^{x^3}dx$

9. $\int (1-2x)^9 dx$

10. $\int (3t+2)^{24} dt$

11. $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}dx$

12. $\int \sec^2 2\theta d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5-3x}$

14. $\int u\sqrt{1-u^2}du$

15. $\int \sin \pi t dt$

16. $\int e^x\cos\left(e^x\right)dx$

17. $\int \frac{e^u}{\left(1-e^u\right)^2}du$

18. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

19. $\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}\,dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3+1}\,dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\int \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta$

23. $\int \sec^2\theta \tan^3\theta\, d\theta$

24. $\int \sqrt{x}\sin\left(1+x^{3/2}\right)dx$

25. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\int \frac{dx}{ax+b}$

27. $\int \left(x^2+1\right)\left(x^3+3x\right)^4 dx$

28. $\int e^{\cos t}\sin t\,dt$

29. $\int 5^t \sin\left(5^t\right)dt$

30. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

31. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

32. $\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}\,dx$

33. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

34. $\int \frac{\cos\left(\pi/x\right)}{x^2}\,dx$

35. $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\,dx$

36. $\int \frac{2^t}{2^t+3}\,dt$

37. $\int \sinh^2 x\cosh x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

40. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

41. $\int \cot x\,dx$

42. $\int \sin t\sec^2\left(\cos t\right)dt$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}$

44. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

45. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

46. $\int x^2\sqrt{2+x}\,dx$

47. $\int x\left(2x+5\right)^8 dx$

48. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

49-52. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ដោយធ្វើការផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយរបស់អ្នក ដែលបានរករកឃើញនិងអនុគមន៍ដេរីវេរបស់វា (ដោយ $c=0$)

49. $\int x\left(x^2-1\right)^3 dx$

50. $\int \tan^2\theta\sec^2\theta d\theta$

51. $\int e^{\cos x}\sin x dx$

52. $\int \sin x\cos^4 x dx$

53-73. គណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលកំណត់ខាងក្រោម៖

53. $\int_0^1 \cos\left(\pi t/2\right)dt$

54. $\int_0^1 (3t-1)^{50} dt$

55. $\int_0^1 \sqrt{1+7x}dx$

56. $\int_0^3 \frac{dx}{5x+1}$

57. $\int_0^{\pi} \sec^2\left(t/4\right)dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\cot\pi t dt$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

60. $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(x^3+x^4\tan x\right)dx$

62. $\int_0^{\pi/2}\cos x\sin\left(\sin x\right)dx$

63. $\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}dx$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4\sin x dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

68. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$

69. $\int_e^{e^4}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2}\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

71. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}dz$

72. $\int_0^{T/2}\sin\left(2\pi t/T-\alpha\right)dt$

73. $\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}$

74. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f\left(x\right)=\sin\sqrt[3]{x}$ ជាអនុគមន៍សេសនិងប្រើតាមតម្លៃភាពពិតដើម្បីបង្ហាញថា

$0\le\int_1^3 \sin\sqrt[3]{x}dx\le 1$

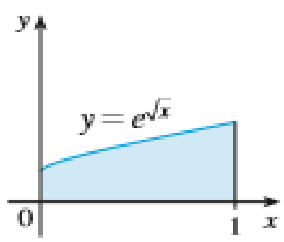
75-76. ប្រើក្រាបដើម្បីរកតម្លៃនៃផ្ទៃដែលស្ថិតនៅក្រោមក្រាបរបស់អនុគមន៍ដែលឲ្យ។ រកផ្ទៃក្នុងចម្លោះដែលឲ្យ

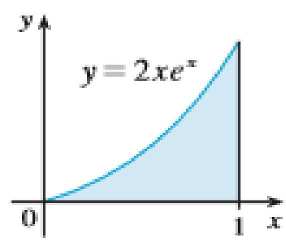
75. $y=\sqrt{2x+1},\quad 0\le x\le 1$

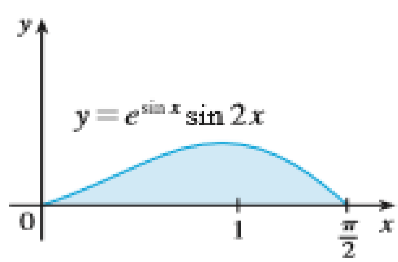
76. $y=2\sin x-\sin 2x,\quad 0\le x\le\pi$

77. គណនា $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}dx$ ដោយសរសេរវាជាផលបូកនៃពីរអាំងតេក្រាលនិង

79. តើតំបន់ណាមួយនៃផ្ទៃខាងក្រោមមានតម្លៃស្មើគ្នា ?ហេតុអ្វី?







85. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $\int_0^4 f\left(x\right)dx=10$ រក $\int_0^2 f\left(2x\right)dx$ ។

86. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $\int_0^9 f(x)dx = 4$ រក $\int_0^3 xf(x^2)dx$ ។

87. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ □ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$ សម្រាប់ករណីដែល $f(x) \geq 0$ និង $0 < a < b$ គូរដ្យាក្រាមនិងបកស្រាយសមីការធរណីមាត្រដែលស្មើទៅនិងផ្ទៃក្រឡា ។

88. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើ □ ស្រាយបញ្ជាក់ថា

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

សម្រាប់ករណីដែល $f(x) \geq 0$ គូរដ្យាក្រាមនិងបកស្រាយសមីការធរណីមាត្រដែលស្មើទៅនឹងផ្ទៃក្រឡា ។

89. ប្រសិនបើ a និង b ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ចូរបង្ហាញថា

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

90. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[0,\pi]$ តាង $u = \pi - x$ ដើម្បីបង្ហាញថា

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

91. ប្រើតាមលំហាត់ 90 ខាងលើដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

92. (a) ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ ចូរស្រាយថា

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$$

(b) ប្រើតាម (a) ចូរគណនា $\int_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$ និង $\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$

True-False Quiz

1. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះបិទ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ។

2. ប្រសិនបើ f និង g គឺជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ

$\int_a^b [f(x)g(x)]dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$

3. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b 5f(x)dx = 5\int_a^b f(x)dx$

4. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\int_a^b xf(x)dx = x\int_a^b f(x)dx$

5. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ និង $f(x) \geq 0$ នោះ $\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$

6. ប្រសិនបើ f' ជាប់លើចន្លោះ $[1,3]$ នោះ $\int_1^3 f'(v)dv = f(3) - f(1)$

7. ប្រសិនបើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ ហើយ $f(x) \geq g(x)$ នៅពេលដែល $a \leq x \leq b$ នោះ

$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

8. ប្រសិនបើ f និង g ជាឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង $f(x) \geq g(x)$ ដែល $a < x < b$ នោះគេបាន $f'(x) \geq g'(x)$ ដែល $a < x < b$

9. ស្រាយថា $\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\sin x}{(1+x^4)^2}\right)dx = 0$

10. ស្រាយថា $\int_{-5}^{5}(ax^2 + bx + c)dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)dx$

11. បង្ហាញថា គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ទាំងអស់គឺមានអនុគមន៍ដេរីវេ។

12. បង្ហាញថា គ្រប់អនុគមន៍ជាប់ទាំងអស់មាន antiderivatives។

13. ស្រាយថា $\int_0^3 e^{x^2}dx = \int_0^5 e^{x^2}dx + \int_5^3 e^{x^2}dx$

14. ប្រសិនបើ $\int_0^1 f(x)dx = 0$ នោះ $f(x) = 0$ ដែល $0 \leq x \leq 1$ ។

15. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ នោះ $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right)=f(x)$

16. រក $\int_0^2 \left(x-x^3\right)dx$ តាងឲ្យផ្ទៃដែលស្ថិតនៅក្រោមក្រាប $y=x-x^3$ ។

17. រក $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^4}dx=-\frac{3}{8}$ ។

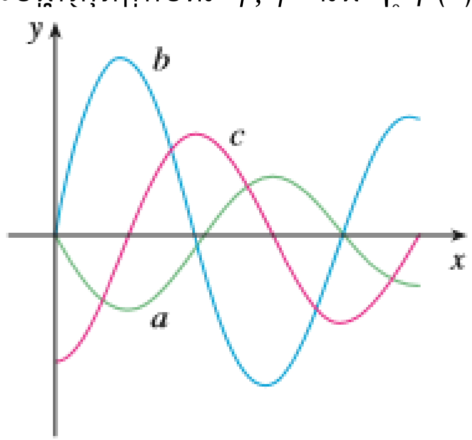
18. ប្រសិនបើ f មិនជាប់នៅត្រង់ 0 នោះ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មិនមានតម្លៃទេ។

លំហាត់អនុវត្ត

3. គណនា $\int_0^1\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)dx$ ដោយបកស្រាយវាក្នុងក្រុមនៃផ្ទៃ។

5. ប្រសិនបើ $\int_0^6 f(x)dx=10$ និង $\int_0^4 f(x)dx=7$ រក $\int_4^6 f(x)dx$ ។

7. រូបខាងក្រោមនេះបង្ហាញពីក្រាបនៃ f, f' និង $\int_0^x f(t)dt$ ។ ដាក់ឈ្មោះក្រាប រួចពន្យល់ពីជំរើសរបស់អ្នក។



8. គណនា ៖

(a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right)dx$

(b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}dx$

(c) $\dfrac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9-38 គណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល

9. $\int_1^2 \left(8x^3+3x^2\right)dx$

10. $\int_0^\tau \left(x^4-8x+7\right)dx$

11. $\int_0^1 \left(1-x^9\right)dx$

12. $\int_0^1 (1-x)^9\,dx$

13. $\int_1^9 \dfrac{\sqrt{u}-2u^2}{u}\,du$

14. $\int_0^1 \left(\sqrt[4]{u}+1\right)^2 du$

15. $\int_0^1 y\left(y^2+1\right)^5 dy$

16. $\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\,dy$

17. $\int_1^5 \dfrac{dt}{(t-4)^2}$

18. $\int_0^1 \sin(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2\cos\left(v^3\right)dv$

20. $\int_{-1}^1 \dfrac{\sin x}{1+x^2}\,dx$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{t^4\tan t}{2+\cot t}\,dt$

22. $\int_0^1 \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

23. $\int \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 dx$

24. $\int_1^{10} \dfrac{x}{x^2-4}\,dx$

25. $\int \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$

26. $\int \dfrac{\csc^2 x}{1+\cot x}\,dx$

27. $\int \sin \pi t\cos \pi t dt$

28. $\int \sin x\cos(\cos x)\,dx$

29. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \tan x\ln(\cos x)\,dx$

32. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$

34. $\int \sinh(1+4x)dx$

35. $\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{1+\sec\theta}d\theta$

36. $\int_0^{\pi/4}(1+\tan t)^3\sec^2 t dt$

37. $\int_0^3 \left|x^2-4\right|dx$

38. $\int_0^4 \left|\sqrt{x}-1\right|dx$

39-40 គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ខាងក្រោម ។ អធិប្បាយនិងពិនិត្យមើលចម្លើយរបស់អ្នក ដោយគូរក្រាបនៃអនុគមន៍ទាំងពីរ ដោយដឹងថា $(c=0)$

39. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

40. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

41. គូរក្រាបដែលឲ្យដោយអនុគមន៍ គណនាតម្លៃផ្ទៃក្រឡានៃតំបន់ដែលបន្ទាត់ស្ថិតនៅក្រោមក្រាប $y=x\sqrt{x}$ នៅចន្លោះ $0\le x\le 4$ ។

42. គូរក្រាបនៃអនុគមន៍ $f(x)=\cos^2 x\sin x$ និងប្រើក្រាបនេះដើម្បីស្រាយពីតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ ។ បន្ទាប់មកគណនាតម្លៃអាំងតេក្រាលដែលគាំទ្រការស្រាយរបស់អ្នក។

43-48 រកដេរីវេនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម៖

43. $F(x)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt$

44. $F(x)=\int_x^1 \sqrt{t+\sin t}\,dt$

45. $g(x)=\int_0^{x^4}\cos(t^2)dt$

46. $g(x)=\int_1^{\sin x}\frac{1-t^2}{1+t^4}dt$

47. $y=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{e^t}{t}dt$

47. $y=\int_{2x}^{3x+1}\sin(t^4)dt$

49-50 Use លក្ខណៈ 8 នៃអាំងតេក្រាលដើម្បីគណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2+3}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x+1}dx$

51-54 ប្រើលក្ខណៈ នៃអាំងតេក្រាលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការខាងក្រោម៖

51. $\int_0^1 x^2 \cos x dx \le \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{-1} x dx \le \pi / 4$

53. $\int_0^1 e^x \cos x dx \le e-1$

54. $\int_0^1 x \sin^{-1} x dx \le \pi / 4$

55. ប្រើច្បាប់ចំណុចកណ្តាលដែល $n=6$ ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលនៃ $\int_0^3 \sin\left(x^3\right) dx$

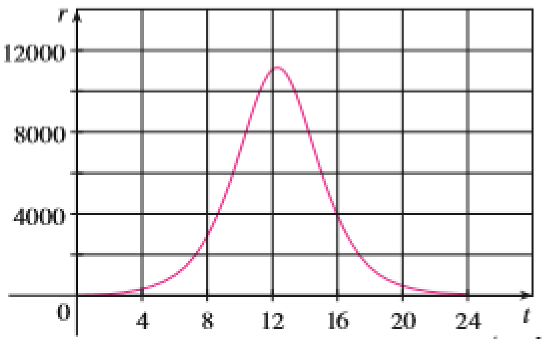
56. ភាគល្អិតមួយបានផ្លាស់ទីលើគន្លងត្រង់មួយជាមួយនិងល្បឿនតាងដោយអនុគមន៍ $v(t)=t^2-t$ ដែល v គិតជា m/s ។ រក (a) រកបម្លាស់ទី និង (b) រកចម្ងាយចរដែលភាគល្អិតផ្លាស់ទីលើគន្លងចន្លោះពេល $[0,5]$ ។

57. គេឲ្យ $r(t)$ ជាអត្រាដែលប្រេងក្នុងពិភពលោកបានបាត់បង់ នៅពេល t គិតជាឆ្នាំដែលចាប់ផ្តើមពី $t=0$ ក្នុងថ្ងៃទី 1 ខែ មករា ឆ្នាំ 2000 ។ និង $r(t)$ គិតជាបារ៉ែតក្នុងមួយឆ្នាំ ។ តើ $\int_0^8 r(t) dt$ មានតម្លៃស្មើរប៉ុន្មាន ?

58. ប្រព័ន្ធរាដាបានចាប់យកល្បឿននៃអ្នករត់ម្នាក់នៅខណៈពេលដូចខាងក្រោម។ ប្រើតាមច្បាប់ចំណុចកណ្តាលដើម្បីគណនាចម្ងាយនៃអ្នករត់ក្នុងចម្លោះពេល $5s$

$t(s)$	$v(m/s)$	$t(s)$	$v(m/s)$
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. ហ្វូងសត្វឃ្មុំមួយក្រុមមានអត្រាកើនឡើង តាងដោយ $r(t)$ ក្បាលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ដូចមានបង្ហាញតាមក្រាប r ខាងក្រោម។ ប្រើតាមច្បាប់ នៃចំណុចកណ្តាលជាមួយនឹង 6 ឯកតាដើម្បីគណនាកំណើននៃសត្វឃ្មុំក្នុងចន្លោះពេល 24 សប្តាហ៍ដំបូង។



60. គេឲ្យ $f(x)=\begin{cases}-x-1, & -3\le x\le 0\\ -\sqrt{2-x^2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$

គណនា $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ បកស្រាយអាំងតេក្រាលដើម្បីរកផ្ទៃរបស់វា។

61. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ និង $\int_0^2 f(x)dx=6$ គណនាតម្លៃ $\int_0^{\pi/2} f(2\sin\theta)\cos\theta d\theta$ ។

63. គណនាតម្លៃនៃចំនួនគត់ c ដែលជាផ្ទៃស្ថិតនៅខាងក្រោមនៃក្រាប $y=\sinh cx$ ដែលស្ថិតនៅចន្លោះ $x=0$ និង $x=1$ គឺវាមានតម្លៃស្មើរ 1 ។

65. ប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់ ដែលមាន $\int_1^x f(t)dt=(x-1)e^{2x}+\int_1^x e^{-t}f(t)dt$ គ្រប់តម្លៃ x ។

ចូររករូបមន្តជាក់លាក់របស់ $f(x)$ ។

66. សន្មត់ថា h ជាអនុគមន៍ ដែល $h(1)=-2,\ h'(1)=2,\ h''(1)=3,\ h(2)=6,\ h'(2)=5,\ h''(2)=13$ និង h'' គឺជាអនុគមន៍ជាប់គ្រប់តម្លៃ។ គណនា $\int_1^2 h''(u)\,du$ ។

67. ប្រសិនបើ f' ជាអនុគមន៍ជាប់លើចន្លោះ $[a,b]$ ។ ចូរបង្ហាញថា $2\int_a^b f(x)f'(x)dx=\left[f(b)\right]^2-\left[f(a)\right]^2$ ។

68. រក $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{1+t^3}\,dt$ ។

69. ប្រសិនបើ f ជាប់លើចន្លោះ $[0,1]$ ។ស្រាយថា $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx$ ។

70. គណនា $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9+\left(\frac{2}{n}\right)^9+\left(\frac{3}{n}\right)^9+......+\left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$

71. ឧបមាថា f ជាអនុគមន៍ជាប់ដែល $f(0)=0, f(1)=1, f'(x)>0$ និង $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$ ។ រកតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ ។

លំហាត់

1. ប្រសិនបើ $x\sin\pi x=\int_0^{x^2} f(t)dt$ នៅពេលដែល f ជាអនុគមន៍ជាប់។ រក $f(4)$ ។

2. រកតម្លៃអតិបរិមារនៃផ្ទៃដែលស្ថិតនៅផ្នែកខាងក្រោមនៃក្រាប $y=x+1/x$ ដែលគិតពី $x=a$ ទៅ $x=a+1.5$ គ្រប់តម្លៃ $a>0$ ។

3. ប្រសិនបើ $\int_0^4 e^{(x-2)^4}dx=k$ ។ រកតម្លៃនៃ $\int_0^4 xe^{(x-2)^4}dx$ ។

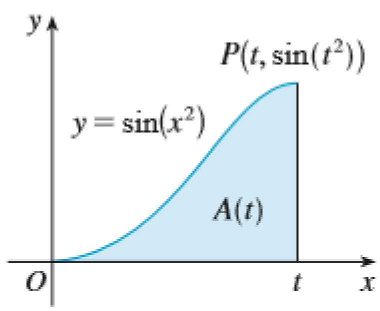
5. ប្រសិនបើ $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ ដែល $g(x)=\left[1+\sin\left(t^2\right)\right]dt$ ។ រក $f'(\pi/2)$

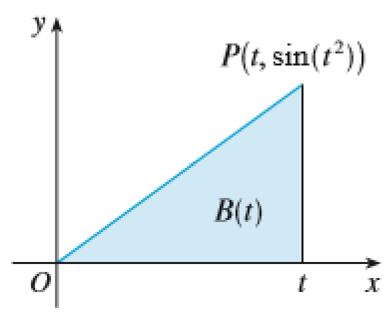
6. ប្រសិនបើ $f(x)=\int_0^x x^2\sin\left(t^2\right)dt$ រក $f'(x)$ ។

7. គណនា $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1-\tan 2t)^{1/t}\,dt$

8. ក្នុងរូបដែលបានបង្ហាញទាំងពីរផ្នែកទីមួយគឺ $A(t)$ គឺជាផ្ទៃដែលបានបង្ហាញខាងក្រោមនៃក្រាប $y=\sin(x^2)$ គិតពី 0 ទៅ t និង $B(t)$ គឺជាផ្ទៃនៃត្រីកោណដែលផ្តុំដោយ $o,P,$ និង $(t,0)$ ។

រកលីមីត $\lim_{t\to 0^+} A(t)/B(t)$ ។





9. រកចន្លោះ $[a,b]$ ដើម្បីគណនាតម្លៃនៃអាំងតេក្រាល $\int_a^b (2+x-x^2)\,dx$ មានតម្លៃអតិបរិមារ។

10. ប្រើអាំងតេក្រាលដើម្បីគណនាផលបូក $\sum_{i=1}^{10000}\sqrt{i}$ ។

11. (a) គណនា $\int_0^n [|x|]\,dx$ នៅពេលដែល n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

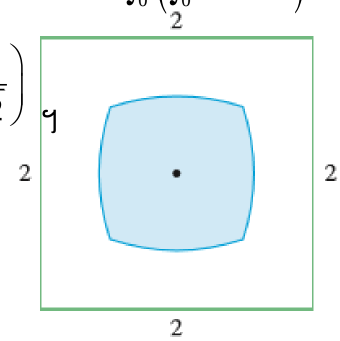
(b) គណនា $\int_a^b [|x|]\,dx$ នៅពេលដែល a និង b ជាចំនួនពិតដែល $0\le a<b$ ។

12. រក $\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$

13. ឧបមាថាមេគុណនៃគូបមួយតាងដោយ $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ បំពេញដោយសមីការ $a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=0$ បង្ហាញថាសមីការ $P(x)=0$ មានឬសមួយនៅចន្លោះ 0 និង 1 ។ តើអ្នកអាចទាញជាទូទៅនៃលទ្ធផលសម្រាប់ដឺក្រេទី n បានដែរឺទេ ?

14. បង្ហាញថាប្រសិនបើ f ជាអនុគមន៍ជាប់នោះ $\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$ ។

15. គណនា $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}\right)$ ។



មេរៀនទី៣ តិចនិចអាំងតេក្រាល

៣.ក. ចាប់ផ្ដើម

យើងបានសិក្សារួចមកហើយចំពោះការគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍មួយ។បើតាមទ្រឹស្ដីបទមូលដ្ឋានគ្រឹះគណនា(Fundamental Theorem of Calculus)យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍មួយបាន បើសិនជាយើងស្គាល់ព្រីមីទីវរបស់វា។ ខាងក្រោមនេះជារូបមន្តអាំងតេក្រាលសំខាន់ដែលយើងបានរៀនកន្លងមក៖

$$\int a dx = ax + C,\ \ a, C \text{ ជាចំនួនថេរ}$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ \ a > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

ការគណនាអាំងតេក្រាល មិនសុទ្ធតែយើងអាចគណនាទាំងអស់នោះទេ អនុគមន៍ខ្លះងាយស្រួលក្នុងរក អនុគមន៍ព្រីមីទីវ អនុគមន៍ខ្លះមានការពិបាកក្នុងរក អនុគមន៍ព្រីមីទីវ និង មួយចំនួនទៀតពុំមានព្រីមីទីវទេ។ ចំពោះអនុគមន៍ដែលគ្មានព្រីមីទីវ ឬរកព្រីមីទីវ មិនឃើញគឺមិនអាចគណនាអាំងតេក្រាលបានទេ។

នៅក្នុងជំពូកនេះ យើងនឹងសិក្សាបន្ថែមទៀតអំពីតិចនិចនៃការគណនាអាំតេក្រាល ចំពោះអនុគមន៍មានលក្ខណៈស្មុគស្មាញបន្ថែមទៀត ។ យើងនឹងប្រើប្រាស់រូបមន្តដែលយើបានរៀនកន្លងមក ភ្ជាប់ជាមួយវិធីសាស្ត្រថ្មីដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ដែលលំបាកទាំងនោះ។ តិចនិចនៃការគណនាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ទាំងនោះគឺរួមមាន ការគណនាអាំងតេក្រាល ដោយប្តូរអថេរ ដោយផ្នែក ប្រើថ្នាក់នៃអនុគមន៍ពិសេស ដូចជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង អនុគមន៍សនិទាន។

៣.ខ. អាំងតេក្រាលដោយប្តូរអថេរ(រំលឹក)

ការប្តូរអថេរក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល ធ្វើឡើងដើម្បីងាយស្រួលក្នុងការរកអនុគមន៍ព្រីមីទីវតែប៉ុននោះ។ វាកើតចេញពីច្បាប់ច្រវ៉ាក់(Chain Rule) ឬ ព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍បណ្តាក់។

បើ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មានដេរីវេនិង $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ មានដេរីវេលើ $f(\mathbb{R})$តាង $h(x)=g(f(x))$ ។ តាមទ្រឹស្តីបទនៃអនុគមន៍បណ្តាក់ h មានដេរីវេ។

$$[g(f(x))]'=f'(x)g'(f(x))$$

តាម Fundamental Theorem of Calculus គេបាន

$$\int g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\,\mathrm{dx}\ =g(f(x))+\mathrm{C}$$

បើយើងតាង $u=f(x)$ នោះ $du=f'(x)dx$ គេបាន

$$\int g'(u)du\ =g(u)+c$$

ឧទាហរណ៍១៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \mathrm{xe}^{x^2}\mathrm{dx}$។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $u=x^2\Longrightarrow du=2xdx$ នោះគេបាន $dx=\frac{du}{2}$

$$\int xe^{x^2}\,dx=\int\frac{e^u du}{2}=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

ឧទាហរណ៍២៖

សិក្សាតិចនិចដោយការប្រៀបធៀបនូវការគណនាអាំងតេក្រាល ចំនួនបីដែលមានទំរង់ស្រដៀងគ្នា:

$$ក.\int \frac{4}{x^2+9}dx$$

$$ខ.\int \frac{4x}{x^2+9}dx$$

$$គ.\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx$$

ក.តាមតារាងរូបមន្ត

$$\int \frac{4}{x^2+9}dx = 4\int \frac{1}{x^2+3^2}dx = \frac{4}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

ខ.តាមវិធីដោយប្តូរអថេរ $u = x^2 + 9$ នោះ $du = 2xdx$ គេបាន៖

$$\int \frac{4x}{x^2+9}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+3^2}dx$$

$$= 2\int \frac{du}{u}$$

$$= 2ln\,|u| + C$$

$$= 2ln(x^2+9) + C$$

គ. ករណីនេះយើងសង្កេតឃើញថា ដឺក្រេពហុធាភាគយក និងពហុធាភាគបែង ស្មើគ្នា នោះគេអាចចែក ដើម្បីទទួលបានអនុគមន៍សនិទាន ដែលភាគយកមានដឺក្រេទាបជាងភាគបែង។

$$\int \frac{4x^2}{x^2+9}dx = 4\int \frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx$$

$$= 4\int \left(\frac{x^2+9}{x^2+9} - \frac{9}{x^2+9}\right)dx$$

$$= \int 4\,dx - \int \frac{36}{(x^2+3^2)}dx$$

$$= 4x - 12\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

តាមរយះដំណោះស្រាយខាងលើនេះយើងសង្កេតឃើញថាការគណនាអាំងតេក្រាលគឺមានលក្ខណៈបទបែនទៅតាមរបៀបផ្សេងៗគ្នា គឺបើអាចគណនាបាន នោះយើងនឹងខិតខំរកវិធីណាដែលមានលក្ខណៈងាយជាងគេតាមតែអាចធ្វើបាន។

លំហាត់

1-4: ជ្រើសរើសចម្លើយដែលត្រឹមត្រូវ ចំពោះអនុគមន៍ ព្រីមីទីវ

1). $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$(a).\ 2\sqrt{x^2+1}+C \qquad (b).\ \sqrt{x^2+1}+C$

$(c).\ \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+C \qquad (d).\ \ln(x^2+1)+C$

2). $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}$

$(a).\ \ln\sqrt{x^2+1}+C \qquad (b).\ \frac{2x}{(x^2+1)^2}+C$

$(c).\ \tan^{-1}x+C \qquad (d).\ \ln(x^2+1)+C$

3). $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}$

$(\mathrm{a}).\ \ln(\sqrt{x^2+1})+C \qquad (b).\ \frac{2x}{(x^2+1)^2}+C$

$(c).\ \tan^{-1}x+C \qquad (d).\ \ln(x^2+1)+C$

4). $\frac{dy}{dx} = x\cos(x^2+1)$

$(a).\ 2x\sin(x^2+1)+C \qquad (b).\ -\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C$

$(c).\ \frac{1}{2}\sin(x^2+1)+C \qquad (d).\ -2x\sin(x^2+1)+C$

5-14: ជ្រើសរើសរូបមន្តអាំងតេក្រាល ប្រើដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

5. $\int (5x-3)^2 dx$ 6. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-4}dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}dx$ 8. $\int \frac{2}{(2x-1)^2+4}dx$

9. $\int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 10. $\int -\frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}dx$

11. $\int t\sin t\,dt$ 12. $\int \sec 5x\tan 5x\,dx$

13. $\int (\cos x)e^{\sin x}\,dx$ 14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$

15-52: គណនាអាំងតេក្រាល

15. $\int 14(x-5)^6 dx$ 16. $\int \frac{9}{(t-8)^2} dt$

17. $\int \frac{7}{(z-10)^7} dz$ 18. $\int t^2 \sqrt[3]{t^3-1} dt$

19. $\int \left[v + \frac{1}{(3v-1)^3}\right] dx$ 20. $\int \left[x - \frac{5}{(3x+5)^2}\right] dx$

21. $\int \frac{t^2-3}{-t^2+9t+1} dx$ 22. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} dx$

23. $\int \frac{x^3}{x-1} dx$ 24. $\int \frac{4x}{x-8} dx$

25. $\int \frac{e^x}{(1+e^x)} dx$ 26. $\int \left(\frac{1}{7x-2} - \frac{1}{7x+2}\right) dx$

27. $\int (5+4x^2)^2 dx$ 28. $\int x\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

29. $\int x \cos 2\pi x^2 \, dx$ 30. $\int \sec 4x \, dx$

31. $\int \csc \pi x \cot \pi x \, dx$ 32. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$

33. $\int e^{11x} dx$ 34. $\int \csc^2 x \, e^{\cot x} \, dx$

35. $\int \frac{2}{e^{-x}+1} dx$ 36. $\int \frac{5}{3e^x-2} dx$

37. $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$ 38. $\int (\tan x)[\ln(\cos x)] dx$

39. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x} dx$ 40. $\int \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} d\alpha$

41. $\int \frac{1}{\cos \theta - 1} dx$ 42. $\int \frac{2}{3(\sec x - 1)} dx$

43. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-(4t+1)^2}} dx$ 44. $\int \frac{1}{9+5x^2} dx$

45. $\int \frac{\tan\left(\frac{2}{t}\right)}{t^2} dx$ 46. $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dx$

$$47.\ \int \frac{1}{\sqrt{10x-x^2}}dx \quad 48.\ \int \frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{4x^2-8x+3}\right)}dx$$

$$49.\ \int \frac{4}{4x^2+4x+65}dx \quad 50.\ \int \frac{1}{x^2-4x+9}dx$$

$$51.\ \int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx \quad 52.\ \int \frac{12}{\sqrt{3-8x-x^2}}dx$$

៣.គ. គណនាអាំងតេក្រាលតាមផ្នែក

តិចនិចទូទៅនៃការគណនាអាំងតេក្រាលគឺជាការគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។ នៅក្នុងវិធីគណនាអាំងតេក្រាល ដោយផ្នែកគឺទាមទារឱ្យយើងស្វែងយល់និងចងចាំនូវរូបមន្តមូលដ្ឋានដំបូលៗនៃអាំងតេក្រាលដែលបានរៀនកន្លងមកនៅមេរៀនអាំងតេក្រាល។

បើយើងមានពីរអនុគមន៍ f និង g ជាពីរអនុគមន៍មានឌីផេរ៉ង់ស្យែល នោះ

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Fundamental of Calculus យើងបាន

$$\int [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]dx \ = f(x)g(x)$$

ឬ

$$\int \ f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad [1]$$

សមីការ[1] ហៅថា រូបមន្តអាំងតេក្រាល ដោយផ្នែក។ រូបមន្តនេះ គេនិយមសរសេរវា ដោយប្តូរ ទៅជា $u = f(x)$ និង $v = g(x)$ នោះ គេបាន $du = f'(x)dx$ និង $dv = g'(x)dx$ ជំនួសក្នុង[1] គេបាន

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad [2]$$

ឧទាហរណ៍3៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int$ xsin xdx ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាមទ្រឹស្តី[1],យើងតាង $f(x) = x$ និង $g'(x) = \sin x$។ នោះយើងបាន $f'(x) = 1$ និង $g(x) = -\cos x$។ តាមរូបមន្ត ដោយផ្នែក

$$\int x \sin x \, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) \, dx$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

តាមទ្រឹស្តីបទ[2], យើងតាង

$$\begin{aligned} & u = x \qquad dv = \sin x \, dx \\ \text{នោះ:} \quad & du = dx \qquad v = -\cos x \end{aligned}$$

គេបាន

$$\int x \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

សម្គាល់: បំពោះការតាងអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក មិនមែនចេះតែតាង សម្រាប់ u និង dv ទេ គឺកាតតាងនោះត្រូវធ្វើងឡើងយ៉ាងណា ឱ្យអាំងតេក្រាល $\int vdu$ ងាយស្រួលជាងមុន។ ក្នុងករណីឧទាហរណ៍ខាងលើ បើសិនជាយើងតាង $u = \sin x$ និង $dv = xdx$ នោះយើងបាន $du = \cos x$ និង $v = \frac{x^2}{2}$ ដូចនេះយើងបានអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx$$

ចំពោះការតាងបែបនេះ គឺយើងទទួលបានអាំងតេក្រាល $\int x^2 \cos x\, dx$ មានការពិបាកជាងមុនក្នុងការគណនា។ ដូចនេះគេតាង$u = f(x)$ ដែលដេរីវេរបស់វាមានលក្ខណៈងាយជាងមុន(មិនស្មុគស្មាញ)ដូចគ្នាចំពោះការតាង $dv = g'(x)dx$ ដែលយើងប្រាកដថាអាចគណនា v បាន។

ឧទាហរណ៍៤៖

គណនាតម្លៃ $\int \ln x dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $u = \ln x$ និង $dv = dx$ គេបាន $du = \frac{1}{x}dx$ និង $v = x$។ នោះយើងបាន

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + C$$

ឧទាហរណ៍ ៥៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int t^2 e^t dt$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងឃើញថាពេលយើងដេរីវេ អនុគមន៍ t^2 យើងនឹងទទួលបានអនុគមន៍ងាយជាមុន ហើយ អនុគមន៍ e^x ជាអនុគមន៍ដែលអាចគណនាអាំងតេក្រាលបាន ។

ដូចនេះយើងតាង $u = t^2$ និង $dv = e^t dt$ នាំឱ្យ $du = 2t$ និង $v = e^t$ គេបាន

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int t e^t dt$$

យើងសង្កេតឃើញថា អាំងតេក្រាល $\int t e^t dt$ គឺតាមវិធីដោយផ្នែកម្តងទៀតដោយ តាង $u = t$ និង $dv = e^t dt$ នាំឱ្យ $du = dt$និង $v = e^t$ គេបាន

$$\int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt$$
$$= t e^t - e^t + C$$

ដូចនេះ គេបាន

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int t e^t dt$$

$$= t^2e^t - 2(te^t - e^t + C)$$
$$= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C_1, \qquad C_1 = -2C$$

ឧទាហរណ៍ ៦៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int e^x \sin x dx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងសង្កេតឃើញថា e^x ជាអនុគមន៍ងាយនៅពេលដែលយើងដេរីវេ។ នោះយើងតាង $u = e^x$ និង $dv = \sin x$ គេបាន

$du = e^x dx$ និង $v = -\cos x$ នាំឱ្យអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគឺ

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

ក្នុងករណីនេះ យើងត្រូវគណនា $\int e^x \cos x dx$ តាមវិធីដោយផ្នែកម្តងទៀត។

ពេលនេះយើងធ្វើដូចគ្នានឹងអាំងតេក្រាលលើកដំបូងដែរ គឺ យើងតាង $u = e^x$ និង $dv = \cos x$ នោះគេបាន $du = e^x dx$ និង $v = \sin x$ នាំឱ្យអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគឺ

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

ឥឡូវនេះ យើងជំនួសក្នុងអាំងត្រាលខាងដើម គេបាន

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x)dx$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$
$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$
$$\Leftrightarrow 2c = -e^x \cos x + e\hat{\ }x \sin x$$

ដូចនេះគេចែកអង្គទាំងពីរដោយ 2 រួចបូកនឹងចំនួនថេរមួយ

$$c = \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x) + C$$

ដូចគ្នាដែរ តាម Fundamental of Calculus យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលកំណត់ដោយផ្នែកតាមរបៀមដូចគ្នា។តាមរូបមន្ត[1] មានន័យថា យើងដោះស្រាយដោយប្រើ f និង g ជាពីរអនុគមន៍ជាប់មានដេរីវេលើចន្លោះ $[a,b]$ គេបានរូបមន្តគឺ

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

ឧទាហរណ៍៧៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^1 tan^{-1} xdx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $u = tan^{-1}x$ និង $dv = dx$ នោះគេបាន $du = \frac{1}{1+x^2}dx$ និង $v = x$ នាំឱ្យអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគឺ

$$\int_0^1 tan^{-1}xdx = [xtan^{-1}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= 1 \cdot tan^{-1}1 - 0 \cdot tan^{-10} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

ពេលនេះយើងគណនា អាំងតេក្រាល $\int \frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{dx}$ តាមវិធីប្តូរអថេរ ដោយ តាង $t = 1 + x^2$ គេបាន $dt = 2xdx$ បើអញ្ចឹងគេបាន $xdx = \frac{dt}{2}$ ហើយពេលដែល $x = 0, t = 1$ និង ពេល $x = 1, t = 2$ គេបាន

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2}[\ln t]_1^2$$

$$= \frac{\ln 2}{2}$$

ដូចនេះ

$$\int_0^1 tan^{-1}xdx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ ។

ឧទាហរណ៍៨៖ ទាញ បង្ហាញថា

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

ដែល $n \geq 2$ ជាចំនួនគត់។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ចំពោះការគណនា អាំងតេក្រាល $\int sin^n x dx$ យើងប្រើវិធីដោយផ្នែកដោយតាង $u = sin^{n-1} x,\ dv = sin\, x dx$

នោះគេបាន $du = (n-1)\cos x\, sin^{n-2} x dx, v = -\cos x$

នាំឱ្យ

$$\int sin^n x dx = -\cos x \cdot sin^{n-1} x + (n-1)\int sin^{n-2} x\, cos^2 x\, dx$$

តែដោយហេតុថា $cos^2 x = 1 - sin^2 x$, យើងបាន

$$\int sin^n x dx = -\cos x\, sin^{n-1} x + (n-1)\int sin^{n-2} x dx - (n-1)\int sin^n x dx$$

យើងដោះស្រាយដោយទាញរកអាំងតេក្រាលដែលយើងចង់បាន

$$n\int sin^n x dx = -\cos x\, sin^{n-1} x + (n-1)\int sin^{n-2} x dx$$

ឬ $$\int sin^n x dx = \frac{1}{n}(-\cos x\, sin^{n-1} x) + \frac{(n-1)}{n}\int sin^{n-2} x dx$$

លំហាត់២

ក. គណនាអាំងតេក្រាល ដោយវិធីគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកតាមការជ្រើសរើស u និង dv

$$1. \int x^2 \ln x dx\ ; \quad u = \ln x, dv = x^2 dx$$

$$2. \int \theta\ \cos\theta\ d\theta\ ; u = \theta, dv = \cos\theta$$

ខ. គណនាអាំងតេក្រាល

3. $\int x\cos 5x\,dx$ 4. $\int ye^{0.2y}\,dy$

5. $\int te^{-3t}dt$ 6. $\int (x-1)\sin\pi x\,dx$

7. $\int (x^2+2x)\cos x\,dx$ 8. $\int t^2 \sin\beta t\,dt$

9. $\int \ln\sqrt[n]{x}\;dx$ 10. $\int \sin^{-1}x\,dx$

11. $\int \tan^{-1}4t\,dt$ 12. $\int p^5 \ln p\,dp$

13. $\int t\sec 2t\,dt$ 14. $\int s2^s ds$

15. $\int (\ln x)^2 dx$ 16. $\int t\sinh mt\,dx$

17. $\int e^{2\theta}\;\sin 3\theta\,d\theta$ 18. $\int e^{-\theta}\;\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int z^3e^z\,dz$ 20. $\int \tan^2 x\,dx$

21. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$ 22. $\int (\sin^{-1}x)^2 dx$

23. $\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos\pi x\,dx$ 24. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx$

25. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$ 26. $\int_4^9 \ln y\;\sqrt{y}\;dy$

27. $\int_1^3 r^3\ln r\,dr$ 28. $\int_0^2 \pi\,t^2\;\sin 2t\,dt$

29. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\;dy$ 30. $\int_1^{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

31. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos^{-1}x\,dx$ 32. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\;dx$

33. $\int \cos x\ln(\sin x)dx$ 34. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\;dr$

$$35. \int_1^2 x^4 (\ln x)^2 dx \qquad 36. \int_0^t e^x \sin(t-s) ds$$

គ.ធ្វើការជំនួសប្តូរអថេររួចបន្ទាប់មកអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

$$37. \int cos\,\sqrt{x}\,dx \qquad 38. \int t^3 e^{-t^2}\,dt$$

$$39. \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta\ \ cos(\theta^2) d\theta \qquad 40. \int_0^{\pi} e^{\cos t} sin\ 2tdt$$

$$41. \int\ xln\ (x+1)dt \qquad 42. \int\ sin\ (ln\ x)dx$$

ឃ. គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់ ។ បង្ហាញថាចម្លើយរបស់ដោយត្រឹមត្រូវគូសក្រាហ្វអនុគមន៍ទាំងពីរ គឺអនុគមន៍ និង ព្រីមីទីវអនុគមន៍ ដោយយក $C = 0$ ពី 43 ដល់ 46

$$43. \int xe^{-2x}\,dx \qquad 44. \int x^{\frac{3}{2}}\,ln\ xdx$$

$$45. \int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx \qquad 46. \int x^2\ sin\ 2xdx$$

៣. ខ. លំហាត់បន្ថែម:

47. បង្ហាញថា

$$\int sin^2 x\ \ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

រួចប្រើផ្នែកនេះទាញរករូបមន្តនៃ $\int sin^4 xdx$ ។

48 a. ទាញបង្ហាញរូបមន្ត

$$\int cos^n xdx \ =\frac{1}{n}\ cos^{n-1}x\,sin\,x+\frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}\,xdx$$

b. ប្រើផ្នែក a គណនា $\int cos^2 xdx$ ។

c. ប្រើផ្នែក a និងផ្នែក b ដើម្បីគណនា $\int cos^4 xdx$ ។

49 a. ទាញបង្ហាញរូបមន្ត

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n xdx \ =\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}\,xdx$$

ដែល $n\geq\ 2$ ជាចំនួនគត់។

b. ប្រើផ្នែក a គណនា \int0 ^ \pi/2 sin^3xdx និង \int0 ^ \pi/2 sin^5xdx ។

c. ប្រើផ្នែក a បង្ហាញ រូបមន្តអាំងតេក្រាល នៃស្វ័យគុណសេសរបស់អនុគមន៍ ស៊ីនុស

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}\,xdx\ =\frac{2\cdot\ 4\cdot\ 6\cdots\ 2n}{3\cdot\ 5\cdot\ 7\cdots\ (2n+1)}$$

50 បង្ហាញថា

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n} xdx\ =\frac{1\cdot\ 3\cdot\ 5\cdots\ (2n-1)}{2\cdot\ 4\cdot\ 6\cdots\ 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

51-54 ប្រើការគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ទាញរូបមន្តខាងក្រោម

$$51.\int (ln\,x)^n dx = x(ln\,x)^n - n\int (ln\,x)^{n-1}\ dx$$

$$52.\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}\,e^x\ dx$$

$$53.\int tan^n xdx\ =\ \frac{tan^{n-1}\,x}{n-1}-\int tan^{n-2}\,xdx\ ,(n\neq 1)$$

$$54.\int sec^n x\,dx\ =\ \frac{tan\,x\cdot sec^{n-2}x}{n-1}+\frac{(n-2)}{(\,n-1)}\int sec^{n-2}\,xdx\ ,(n\neq 1)$$

55. ប្រើលំហាត់ 51 ដើម្បីគណនា $\int (ln\,x)^3 dx$ ។

56. ប្រើលំហាត់ 52 ដើម្បីគណនា $\int x^4e^xdx$ ។

57-58 គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃតំបន់ខ្សែកោងទាំងនេះ

57. $y = x^2lnx,\ y = 4\ln x$

58. $y = x^2e^{-x}\ ,\ y = xe^{-x}$

59-60 ប្រើក្រាហ្វ ដើម្បីរកតម្លៃប្រហែល នៃ x អាប់ស៊ីសរបស់ចំនុចប្រសព្វនៃខ្សែកោងដែលគេឱ្យខាងក្រោម។ រួចរកតម្លៃប្រហែលក្រឡាផ្ទៃខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងនោះ។

$$59.\ y =\ sin^{-1}\left(\tfrac{1}{2}x\right), y = 2 - x^2$$

60. $y = xln(x+1), y = 3x - x^2$

61-63] ប្រើវិធី សំបកស៊ីឡាំង ដើម្បីរកមាឌដែលករឡើងដោយការបង្វិលដែលខ័ណ្ឌដោយខ្សែកោងជុំវិញអាប់ស៊ីដែលគេឱ្យៈ

61. $y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ y = 0\ ,\ 0 \le\ x \le 1$ ជុំវិញ y អាប់ស៊ីស

62. $y = e^x,\ y = e^{-x}\ ,\ x = 1$ ជុំវិញ y អាប់ស៊ីស

63. $y = e^{-x}\ ,\ y = 0\ ,\ x = -1\ ,\ x = 0\ ;$ ជុំវិញ $x = 1$

64] គណនាមាឌដែលករកើតឡើងដោយការបង្វិលផ្ទៃដែលខ័ណ្ឌដោយ ខ្សែកោង $y = ln\,x\ ,\ y = 0$ និង $x = 2$ ជុំវិញអ័ក្សនិមួយៗខាងក្រោម

ក. y អាប់ស៊ីស

ខ. x អាប់ស៊ីស ។

65. គណនាតម្លៃមធ្យមនៃ $f(x) = x\,sec^2x$ នៅលើចន្លោះ $[0, \frac{\pi}{4}]$ ។

66. រ៉ុកកែតមួយពន្លឿនខ្លួនរបស់វាដោយការដុតប្រេងរបស់វា ដូចនេះម៉ាសរបស់វាគឺថយចុះទៅតាមពេលវេលា។ សន្មត់ថា ម៉ាសវាដំបូង (រួមទាំងប្រេងរបស់វា) គឺ m ។ ប្រេងត្រូវបានប្រើប្រាស់ដោយអត្រា r ហើយចំហាយចេញនៃឧស្ម័នទាំងអស់ត្រូវបានច្រានចេញដោយល្បឿនថេរ v_e (ទាក់ទងទៅនឹងរ៉ុកែត)។ គំរូល្បឿនរបស់រ៉ុកែត ខណៈពេល t បានឱ្យដោយសមីការ

$$v(t) = -gt - v_e \ln\frac{m - rt}{m}$$

ដែល g ជាសំទុះកើតឡើងដោយសារទំនាញដី និង t គឺមិនមានតម្លៃធំទេ។ បើ $g = 9.8m/s^2$, $m = 30{,}000kg$, $r = 16okg/s$ និង $v\_e = 3000m/s$ ចូររកកម្ពស់រ៉ុកែត មួយនាទីដំបូងបន្ទាប់ពីវាចាប់ផ្តើមផ្លាស់ទី។

67. ភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីលើគន្លងត្រង់ដោយមានល្បឿន $v(t) = t^2e^{-t}$ ម៉ែត្រក្នុងមួយនាទី បន្ទាប់ពី t នាទី។ តើភាគល្អិតនឹងផ្លាស់ទីបានចម្ងាយប៉ុន្មាននៅអំឡុងពេល t នាទីដំបូង?

68. បើ $f(0) = g(0) = 0$ និង $f"$ និង $g"$ ជាអនុគមន៍ជាប់ ។ បង្ហាញថា

$$\int_0^a f(x)g"(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f"(x)g(x)dx$$

69. ឧបមាថា $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(4) = 3$ និង $f"$ ជាអនុគមន៍ជាប់។ គណនា តម្លៃនៃ $\int_1^4 xf"(x)dx$ ។

70. (a) ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក បង្ហាញថា

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

(b) បើ f និង g ជាពីរអនុគមន៍មានចំរាស់ និងអនុគមន៍ f' ជាប់, បង្ហាញថា

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

[ការណែនាំ: ប្រើផ្នែក (a) និងជំនួស ដោយ $y = f(x)$]

(c) ក្នុងករណីដែល f និង g ជាអនុគមន៍វិជ្ជមាន និង $b > a > 0$, ចូរគូដដ្យាក្រាមតាងលក្ខណ:ធរណីមាត្រ នៃផ្នែក (b)។

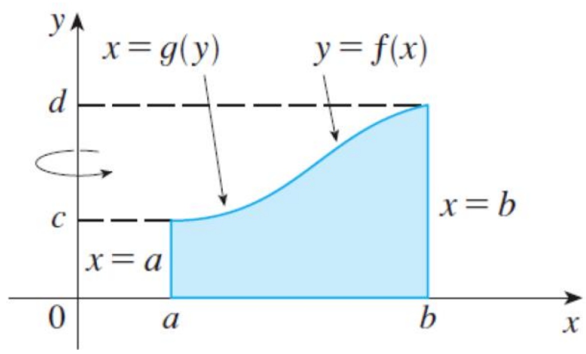
(d) ប្រើផ្នែក (b) គណនាអាំងតេក្រាល $\int_1^e \ln x dx$ ។

71.] ឥឡូវនេះយើនិយាយពីរូបមន្ត $v = \int_a^b 2\pi\, xf(x)dx$, ដោយការប្រើសំបកស៊ីឡាំង ប៉ុន្តែយើងក៏អាចប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដើម្បីបង្ហាញវា ដែលធ្វើឡើងក្នុងករណី f ជាអនុគមន៍ប្រកាន់មានន័យថាអនុគមន៍នេះមានអនុគមន៍ចម្រាស់ g ។ ប្រើរូបភាព ដើម្បីបង្ហាញថា

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi\, [g(y)]^2 dy$$

ដោយធ្វើការជំនួសមួយ $y = f(x)$ និង ប្រើអាងតេក្រាលដោយផ្នែកលើលទ្ធផលនៃអាំងតេក្រាល ដើម្បីបង្ហាញថា

$$V = \int_a^b 2\pi\, xf(x)dx$$



72. គេឱ្យ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x dx$ ។

(a) បង្ហាញថា $I_{2n+1} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$ ។

(b) ប្រើលំហាត់ 50 ដើម្បីបង្ហាញថា

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) ប្រើផ្នែក (a) និង (b) ដើម្បីបង្ហាញថា

$$1 \geq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \geq \frac{2n+1}{2n+2}$$

រួចទាញបង្ហាញថា $lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ ។

(d) ប្រើប្រាស់ផ្នែក (c) និងលំហាត់ 40 និង 50 ដើម្បីបង្ហាញថា

$$lim_{n\to\infty} (\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

តាមរយៈរូបមន្តនេះយើង អាចសរសេរជាទំរង់

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

៣.ឃ. អាំងតេក្រាលអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

នៅក្នុងផ្នែកនេះ ការគណនាអាំងតេក្រាលគឺ ផ្តោតទៅលើអនុគមន៍ដែលមានជាប់កន្សោមអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ទាមទារនូវការចងចាំរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ និង លក្ខណៈទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង ជាមុនសិន ព្រោះវានឹងផ្តល់នូវគន្លឹះដើម្បីបំលែងកន្សោមដែលស្មុគស្មាញ ទៅរកកន្សោមដែលងាយ។ជាឧទាហរណ៍ យើងនឹងលើកយកការគណនាអាំងតេក្រាលគំរូមួយ លើ អនុគមន៍ កូស៊ីនុសដែលជាប់ស្វ័យគុណ ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \cos^3 x dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

បើយើងធ្វើការប្តូរអថេរ ដោយ $u = \cos x$ ភ្លាមៗវាហាក់មិនបានផ្តល់នូវគន្លឹះដោះស្រាយដល់យើងទេ ព្រោះ $du = -\sin x dx$ ។ ប៉ុន្តែវាមិនអញ្ចឹងទេ វាបានផ្តល់ក្នុងករណីនេះថា ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល ស្វ័យគុណកូស៊ីនុស យើងទាមទារឱ្យមានកត្តាផលគុណ អនុគមន៍ស៊ីនុស។ ដូចគ្នាដែរចំពោះ អាំងតេក្រាល ស្វ័យគុណ អនុគមន៍ស៊ីនុស យើងក៏ត្រូវការកត្តាអនុគមន៍ កូស៊ីនុស។

ដូចនេះចំពោះ $\int \cos^3 x dx$ យើងគិតគូរ អនុគមន៍ $\cos^3 x$ គឺអាចសរសេរជា $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x$ ។ ពីរូបមន្ត $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ យើងអាច សរសេរ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ គេបាន

$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$

ឥឡូវនេះយើងត្រឡប់ទៅ វិធីការប្តូរអថេររបស់យើវិញ ដែល $u = \sin x$ នោះ $du = \cos x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

$$= \int (1 - u^2) du = u - 1\ 3\, u^3 + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

ជាទូទៅ យើងប្រើវិធីដោះស្រាយអាំងតេក្រាលដែលទាក់ទងនឹង ស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ sin និង cos រៀងគ្នា យើងគ្រាន់តែរកនូវកត្តាផលគុណ cos និង sin រៀងគ្នា។ រួចប្រើរូបមន្ត $cos^2x + sin^2x = 1$ ដែលធ្វើឱ្យយើងអាចប្រើវិធីប្តូរអថេរបាន។

ឧទាហរណ៍៖

គណនា អាំងតេក្រាល $\int sin^5x\, cos\,\hat{}2\, xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ក្នុងករណីនេះយើងអាចសរសេរ $cos^2x = 1 - sin^2x$ ដែលតាមរយៈរូបមន្តនេះ យើងអាចសរសេរកន្សោមខាងលើ ដោយគ្មានអនុគមន៍ cos គឺមានជាប់តែអនុគមន៍ sin ។

$$sin^5x\, cos^2\, x = (\, sin^2x)^2\, cos^2x\, sinx = (1 - \, cos^2x)^2\;\, cos^2x\, sin\, x$$

ប្រើវិធីជំនួស $u = \, cos\, x$ នោះ $du = -\, sin\, xdx$ គេបាន

$$\begin{aligned}\int sin^5x\, cos^2xdx \quad &= \int \,(\, sin^2x)^2\, cos^2x\, sinxdx\\ &= \int (1 - \, cos^2x)^2\;\, cos^2x\, sin\, xdx\\ &= \int (1 - u^2)^2u^2(-du)\\ &= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)du\\ &= -\left(\frac{u^2}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C\\ &= -\,\frac{1}{3}cos^3x + \frac{2}{5}cos^5x - \frac{1}{7}cos^7x + 7\end{aligned}$$

តាមឧទាហរណ៍មុនៗ យើងឃើញថា ចំពោះអាំងតេក្រាល លើស្វ័យគុណសេសនៃ ស៊ីនុស ឬកូស៊ីនុស ដែលយើអាចបំបែក ដោយដាក់ជាកត្តាដែលមានកត្តាតែមួយគត់មានស្វ័យគុណគូ។ បើសិនជា ទាំងអនុគមន៍ ស៊ីន ទាំងអនុគមន៍ កូស៊ីនុស សុទ្ធតែមានស្វ័យគុណគូ វិធីបំបែកខាងលើមិនអាចប្រើបានទេ។ ចំពោះករណីនេះ គេត្រូវប្រើរូបមន្តផ្សេងទៀតនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គឺរូបមន្តកន្លះមុំ

$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \, cos\, 2x)$ និង $cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \, cos\, 2x)$

ឧទាហរណ៍៖ គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{\pi} sin^2\, xdx$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

បើសិនជាយើង ប្រើ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ នោះយើងមិនទទួលបានអនុគមន៍ងាយក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនេះទេ។ ដូចនេះយើងប្រើរូបមន្តកន្លះមុំ នៃអនុគមន៍ $sin^2x = 1 - cos\,2x$ គេបាន

$$\int_0^\pi sin^2xdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - cos\,2x)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,sin\,2x\right)\right]_0^\pi$$
$$= \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\,sin\,2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}sin\,0\right) = \frac{1}{2}\pi$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនា អាំងតេក្រាល $\int sin^4xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះដោយប្រើអាំងតេក្រាលដោយប្រើរូបមន្ត $\int sin^nxdx$ ដែលយើងបានរកឃើញកន្លងមក។ ប៉ុន្តែយើងក៏អាចគណនាដោយប្រើ វិធីមួយទៀតគឺ សរសេរ $sin^4x = (sin^2x)^2$ រួចប្រើរូបមន្តកន្លះមុំ។ គេបាន

$$\int sin^4xdx = \int (sin^2x)^2dx$$
$$= \int \left(\frac{1 - cos\,2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\,cos\,2x + cos^2 2x)\,dx$$

ពេលនេះយើងអនុវត្តន៍រូបមន្តកន្លះមុំបន្តទៀត $cos^2 2x = 1 + 2\,cos\,4x$ នោះយើបាន

$$\int sin^4xdx = \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\,cos\,2x + \frac{1}{2}\,(1 + cos\,4x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$

ដើម្បីងាយចងចាំ ក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល រាង $\int \sin^m x \cos^n x dx$, ដែល $m \geq 0$ និង $n \geq 0$ ដែលសុទ្ធតែជាចំនួនគត់។

វិធីគណនា អាំងតេក្រាល $\int \sin^m x \cos^n x dx$:

(a) បើស្វ័យគុណនៃ $\cos$ ជាស្វ័យគុណសេស ($n = 2k + 1$) នោះគឺយើងអាច ប្រើកត្តា $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ នោះគេបាន

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx$$

រួចយើងប្តូរអថេរដោយ $u = \sin x$ ។

(b) បើ សិនជាស្វ័យគុណនៃ $\sin$ ជាស្វ័យគុណសេស ($n = 2k + 1$) នោះគឺយើងអាច ប្រើកត្តា $\sin^2 x = 1 - \cos^2$x នោះគេបាន

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \cos^m x (\sin^2 x)^k \sin x dx$$

$$= \int \cos^m x (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx$$

រួចយើងប្តូរអថេរដោយ $u = \cos x$ ។

(c)បើសិនជាស្វ័យគុណ ទាំង $\sin$ ទាំង $\cos$ សុទ្ធតែគូ នោះយើងប្រើ រូបមន្តកន្លះមុំ

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)$$

ពេលខ្លះយើងប្រើរូបមន្តជំនួយមួយទៀតគឺ

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

យើងអាចប្រើវិធីស្រដៀងគ្នាដែរ ចំពោះការគណនាអាំងតេក្រាល $\int \tan^m x \sec^n x dx$ ។ ដោយហេតុថា $(\frac{d}{dx})\tan x = \sec^2 x$ តាមលក្ខណៈនេះយើងអាច ញែកកត្តា $\sec^2 x$ និងបំលែង ឱ្យមានស្វ័យ

គុណគូ រួចប្រើរូបមន្ត $sec^2x = 1 + tan^2x$ ឬ ម្យ៉ាងទៀត យើងសង្កេតឃើញថា $(\frac{d}{dx})sec\,x = sec\,x tan\,x$ យើងអាចញែក កត្តា $sec\,x tan\,x$ ហើយបំលែងជាស្វ័យគុណគូ នៃ tan ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនា អាំងតេក្រាល $\int tan^6x\,sec^4xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

បើយើងញែកកត្តា sec^2x នោះយើងដាក់ កត្តាដែលនៅសល់ សរសេរទៅជាអនុគមន៍ តង់សង់ ដោយប្រើរូបមន្ត $sec^2x = 1 + tan^2x$ រួចប្រើវិធីប្តូរអថេរ ដោយតាង $u = tan\,x$ នោះ $du = sec^2xdx$ ។ គេបាន

$$\int tan^6x\,sec^4xdx = \int tan^6x\,sec^2x\,sec^2xdx$$

$$= \int tan^6x(1 + tan^2x)sec^2xdx$$

$$= \int u^6(1 + u^2)du$$

$$= \int (u^6 + u^8)du$$

$$= \frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9 + C$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x + \frac{1}{9}tan^9x + C$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int tan^5x\,sec^7xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

បើតាមឧទាហរណ៍ពីខាងលើ យើងញែក sec^2x នោះយើងនឹងសល់ sec^5x ដែលពិបាកក្នុងការបំបែកមកជាអនុគមន៍ តង់សង់។ ប៉ុន្តែទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ យើងអាចញែកជាមួយកត្តា $tan\,x\,sec\,x$ ហើយតួដែលនៅសល់មានស្វ័យគុណគូ នោះយើងអាចបំបាត់ តង់សង់ តាមអនុគមន៍ដោយ

ប្រើរូបមន្ត $tan^2x = sec^2x - 1$ ។ បើដូចនេះ យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះ ដោយការប្តូរអថេរ $u = sec\ x$, $du = sec\ xtan\ xdx$:

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x\sec^7 xdx &= \int \tan^4 x\sec^6 x\sec x\tan xdx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^2\sec^6 x\tan xdx \\ &= \int (u^2 - 1)^2 u^6 du \\ &= \int (u^4 - 2u^2 + 1)u^6 du = \int (u^10 - 2u^8 + u^6)dx \\ &= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{1}{7}u^7 + C \\ &= \frac{1}{11}\sec^{11} x - \frac{2}{9}\sec^9 x + \frac{1}{7}\sec^7 x + C\end{aligned}$$

វិធីសាស្ត្រគណនាអាំងតេក្រាល $\int tan^m x sec^n x\, dx$:

(a) បើសិនជាស្វ័យគុណនៃ សេកង់(sec) ជាស្វ័យគុណគូ ($n = 2k,\ k \geq\ 2$), ប្រើកត្តា $sec^\wedge 2x$ ដោយប្រើ $sec^2x = 1 + tan^2x$ ដើម្បីសរសេរកន្សោមដែលនៅសល់ជាប់អនុគមន៍នៃ $tan\ x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1} x\sec^n xdx\& &= \int (\tan^2 x)^k\sec^{n-1}\sec x\tan xdx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k\sec^{n-1} x\sec x\tan xdx\end{aligned}$$

រួចតាងដោយប្តូរអថេរ $u = tan\ x$ ។

(b) បើសិនជាស្វ័យគុណនៃ តង់សង់ (tan) មានស្វ័យគុណសេស ($m = 2k + 1$) យើងនឹងរក្សាទុកកត្តា $\sec x\tan x$ ហើយប្រើរូបមន្ត $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ដើម្បីទទួលបាន កត្តាដែលនៅសល់បានជាអនុគមន៍ $sec\ x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k+1} x\sec^n xdx\& &= \int (\tan^2 x)^k\sec^{n-1}\sec x\tan xdx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k\sec^{n-1} x\sec x\tan xdx\end{aligned}$$

រួចតាងដោយប្តូរអថេរ $u = sec\, x$ ។

ចំពោះករណីផ្សេងទៀតយើងអាចប្រើប្រាស់អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ។ ពេលខ្លះទៀតយើងក៏អាចប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាល

$\int tan\, xdx = \ln|sec\, x| + C$

យើងក៏អាចត្រូវការប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ sec គេបាន

$$1\square \quad \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងគុណ បន្ថែមលើ $sec\, x$ ដោយប្រភាគដែលមានភាគយកនិងភាគបែង $sec\, x + tan\, x$ គេបាន

$$\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx + C$$
$$= \int \frac{\sec x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

បើយើងជំនួសដោយ $u = sec\, x + tan\, x$ នោះគេបាន $du = (sec\, xtan\, x + sec^2\, x)dx$

យើងបាន

$$\begin{aligned} \int \sec x dx \quad &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx + C \\ &= \int \frac{\sec x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int (1/u) du = \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int tan^3 xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងបំបែក tan^3x ជាកត្តា $tan^2 x$ រួចយើងប្រើរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ $tan^2x = sec^2 x - 1$ គេបាន

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1)\tan x dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan x dx\end{aligned}$$

តាង $u = tan\, x$ នោះយើង $du = sec^2\, xdx$

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan x dx \\ &= \int u du - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2}u^2 - \ln|\sec x| + C \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

បើសិនជាស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ តង់សង់ជាចំនួនគូ ហើយស្វ័យគុណនៃ សេកន sec ជាចំនួនសេស នោះយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលបានក្នុងអនុគមន៍ $sec\, x$ ។ ចំពោះការគណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ $sec\, x$ មានស្វ័យគុណគឺប្រើវិធីគណនាអាំងតេក្រាល ដោយផ្នែកដូចមានក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោម

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int sec^3 xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ឥឡូវយើងគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកដោយ

$$u = sec\, x \quad dv = sec^2 xdx$$

$du = sec\, xtan\, xdx \quad v = tan\, x$

គេបាន

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x| \\
\int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C
\end{aligned}$$

2□ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល (a). $\int \sin mx \cos nx dx$, (b). $\int \sin mx \sin nx dx$, (c). $\int \cos mx \cos nx dx$, យើងប្រើរូបមន្តខាងក្រោម

(a).$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$

(b).$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

(c). $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int\ sin\ 4x\ cos\ 5xdx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖ ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះ យើងប្រើរូបមន្ត $2a$ដូចខាងក្រោម

$$\begin{aligned}
\int \sin 4x \cos 5x dx &= \int \frac{1}{2}[\sin(-x) + \sin 9x]dx \\
&= \frac{1}{2}\int(-\sin x + \sin 9x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + C
\end{aligned}$$

1-49 គណនាអាំងតេក្រាល

1 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

2 $\int \sin^3 \theta \cos^4 \theta d\theta$

3 $\int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^5 \theta d\theta$

4 $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

5 $\int \sin^5(\pi x) \cos^5(\pi x) dx$

6 $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

7 $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$

8 $\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta$

9 $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)dt$

10 $\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^4 tdt$

11 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 xdx$

12 $\int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^{\theta}\right)^2 d\theta$

13 $\int t\sin^2 tdt$

14 $\int \cos\theta\cos^5(\sin\theta)d\theta$

15 $\int \frac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}} d\alpha$

16 $\int x\sin^3 xdx$

17 $\int \cos^2 x\tan^3 xdx$

18 $\int \cot^5\theta\sin^4\theta d\theta$

19 $\int \frac{\cos x+\sin 2x}{\sin x} dx$

20 $\int \cos^2 x\sin 2xdx$

21 $\int \tan x\sec^3 xdx$

22 $\int \tan^2\theta\sec^4\theta d\theta$

23 $\int \tan^2 xdx$

24 $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx$

25 $\int \tan^4 x\sec^6 xdx$

26 $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\tan^4\theta d\theta$

27 $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x\sec^4 xdx$

28 $\int \tan^5 x\sec^3 xdx$

29 $\int \tan^3 x\sec xdx$

30 $\int_0^{\pi/4} \tan^4 tdt$

31 $\int \tan^5 xdx$

32 $\int \tan^2 x\sec xdx$

33 $\int x\sec x\tan xdx$

34 $\int \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi} d\phi$

35 $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^5 xdx$

36 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 xdx$

37 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^5\phi\csc^3\phi d\phi$

38 $\int \csc^4 x\cot^6 xdx$

39 $\int \csc x dx$

40 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x dx$

41 $\int \sin 5\theta \cos 5x dx$

42 $\int \cos \pi x \cos 4\pi x dx$

43 $\int \sin \theta \sin 5\theta d\theta$

44 $\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin 2x} dx$

45 $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1+\cos 2x} dx$

46 $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\cos 4\theta} d\theta$

47 $\int \frac{1-\tan^2 x}{\sec^x} dx$

48 $\int \frac{dx}{\cos x-1}$

49 $\int x\tan^2 x dx$

50. បើ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan^6 x sec\, x dx = I$, ចូរសរសេរកន្សោម $\int x tan^8 x sec\, x dx$ ជាអនុគមន៍នៃ I ។

51-54 គណនាអាំងតេក្រាលមិនកំណត់។ បង្ហាញ និងពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នកដោយគួសក្រាហ្វអនុគមន៍ និងព្រីមីទីវរបស់វា ត្រង់ C=0 ។

51 $\int x\sin^2(x^2) dx$

52 $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$

53 $\int \sin 3x \sin 6x dx$

54 $\int \sec^4 \frac{x}{2} dx$

55 រកតម្លៃមធ្យមនៃអនុគមន៍ $f(x) = sin^2 x\, cos^2 x$ លើចន្លោះ $[-\pi, \pi]$ ។

56 គណនាអាំងតេក្រាល $\int \ sin\, x\, cos\, x dx$

(a) វិធីជំនួស $u = cos\, x$

(b) វិធីជំនួស $u = sin\, x$

(c) វិធី ប្រើរូបមន្ត $sin\, 2x = 2\, sin\, x\, cos\, x$

(d) វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក

ចូរពន្យល់ពីភាពខុសគ្នា ដែលអ្នកសង្កេតនៅក្នុងចម្លើយរបស់អ្នក។

57-58 គណនាក្រឡាផ្ទៃដែលខណ្ឌដោយខ្សែកោងខាងក្រោម

57 $y = \sin^2 x, y = \cos^2 x, \ -\pi/4 \le x \le \pi/4$

58 58. $y = \sin^3 x, y = \cos^3 x, \pi/4 \le x \le 5\pi/4$

59-60 ប្រើក្រាបនៃអនុគមន៍ ដើម្បីប៉ាន់ស្មានអាំងតេក្រាល។ បន្ទាប់មកប្រើវិធីសាស្ត្ររបស់អ្នកដែលបានសិក្សាកន្លងមក ដើម្បីផ្ទៀងផ្ទាត់ចម្លើយរបស់អ្នក

59 $\int_0^{2\pi} \cos^3 x dx$

60 $\int_0^2 \sin 2\pi x \cos 5\pi x dx$

61-64 រកមាឌដែលកើតចេញពីការបង្វិលផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីស។

61 $y = \sin x, y = 0, \ \pi/2 \le x \le \pi$; វិលជុំវិញ អ័ក្ស ox

62 $y = \sin^2 x, y = 0, \ 0 \le x \le \pi$; វិលជុំវិញ អ័ក្ស ox

63 $y = \sin x, y = \cos x, \ 0 \le x \le \pi/4$; វិលជុំវិញបន្ទាត់ $y = 1$

64 $y = \sec x, y = \cos x, \ 0 \le x \le \pi/3$; វិលជុំវិញបន្ទាត់ $y = -1$

65 ភាគល្អិតមួយផ្លាស់ទីលើបន្ទាត់ត្រង់ ជាមួយល្បឿនដែលមានអនុគមន៍ $v(t) = sin\, \omega\, t\, cos^2 \omega\, t$ ។ រកអនុគមន៍ទីតាំង $s = f(t)$ បើ $f(0) = 0$ ។

66 សនីក្នុងផ្ទះត្រូវបានផ្គត់ផ្គង់ជាទម្រង់ឆ្លាស់គ្នាដែលប្រែប្រួល $120V - 155V$ ជាមួយប្រេកង់ 60 ជុំក្នុងមួយនាទី(Hz)ក្នុងពេលថ្មីៗនេះ។ វ៉ុលទ័រដែលគេដែលចង្អុលគឺមានសមីការ

$$E(t) = 155\, sin\, (120\pi\, t)$$

ដែល t គិតជា នាទី។ វ៉ុលម៉ែត្រ RMS(root-mean-square) ដែលជារឺសការេនៃតម្លៃមធ្យម នៃ $(E(t))^2$ លើវង្វង់មួយ។

(a). គណនា វ៉ុលមែត្រ RMS នៅតាមផ្ទះក្នុងពេលថ្មីៗនេះ។

(b). ចង្កៀងអគ្គិសនីជាច្រើនត្រូវការ វ៉ុល RMS 220V ។ គណនាអំព្លីទុត A ត្រូវការសំរាប់តង់ស្យុងមធ្យម $E(t) = A\, sin\, (120\backslash pi\, t)$ ។

67-69 បង្ហាញរូបមន្តខាងក្រោមដែល m និង n ជាចំនួនគត់វិជ្ជមានៈ

67 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx$

68 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{បើ } m \neq m \\ \pi & \text{បើ } m = n \end{cases}$

69 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{បើ } m \neq n \\ \pi & \text{បើ } m = n \end{cases}$

70 ស៊េរី Fourier មានទម្រង់

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx$$
$$= a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_N \sin Nx$$

បង្ហាញថា មេគុណទី m គឺ a_m អោយដោយរូបមន្ត $a_m = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$

៣.ខ. វិធីជំនួសដោយប្រើអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

យើងបានធ្វើរួចហើយ អំពីវិធីជំនួសទូទៅ រួមទាំងវិធីដោយផ្នែកក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល។ នៅក្នុងការគណនា យើងក៏មានវិធីគណនាដោយប្តូរ អនុគមន៍ដែលត្រូវអាំងតេក្រាលទៅជាអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមានមាត្រ ប៉ុន្តែមិនសុទ្ធតែត្រូវបម្លែងទៅជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រទាំងអស់នោះទេ ដូចជាលំហាត់ក្នុងមេរៀនកន្លងមក។

ឥឡូវនេះយើងធ្វើការសង្កេតមួយចំពោះអាំងតេក្រាលដែលមានទំរង់ $\int \sqrt{(\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2)}\ \mathrm{dx}$, ដែល $a > 0$ ។ បើសិនជាយើងប្តូរអថេរ ដោយតាង $u = a^2 - x^2$, នោះសង្កេតឃើញថាការគណនាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ កាន់តែពិបាក។ បើសិនជាយើងប្តូរអថេរពីអថេរ x ទៅជា θ ដោយការតាង $x = a \sin\theta$ នោះអាចប្រើប្រាស់រូបមន្ត $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ ។

ដូចនេះយើងនឹងទទួលបាន

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a|\cos^2\theta|$

ហើយ $dx = a \cos\theta\, d\theta$ នោះគេបាន

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 |\cos\theta| \cos\theta d\theta = a^2 \int |\cos\theta| \cos\theta d\theta$

ជាទូទៅយើងអាចជំនួស $x = g(t)$ ក្នុងគោលបំណងបង្កើតការគណនាអាំងតេក្រាលថ្មីមួយដែលមានលក្ខណៈងាយស្រួលជាងមុន។ អនុគមន៍ $g(t)$ ត្រូវតែជាអនុគមន៍មានចម្រាស់ បើយើងជំនួស x ដោយ $g(t)$ នោះយើងនឹងទទួលបាន

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

វិធីជំនួសនេះហៅថា ការជំនួសចម្រាស់។

យើងសង្កេតឃើញថា បើយើងប្រើវិធីជំនួសចម្រាស់ ដោយយក $\mathrm{x} = \mathrm{a}\sin\theta$ វាពិតជាបានផ្ទៀងផ្ទាត់ លក្ខណៈអនុគមន៍មួយទល់មួយ ដោយបង្រួម θ នៅលើចន្លោះ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ។

តារាងខាងក្រោមនេះគឺជាបញ្ជីនៃវិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និងរូបមន្ត អនុគមន៍ត្រីមាត្រដែលត្រូវប្រើដើម្បីដោះស្រាយ:

ន្សោម	រាង	រូបមន្តដែលត្រូវប្រើ
$\sqrt{a^2 -}$	x $= a\sin$ $\leq \theta$ $\leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ប្រើជម 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288288288288288288288288288 288288288288288288288288
$\sqrt{a^2 +}$	x $= a\tan$ $\leq \theta$ $\leq \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\sqrt{x^2 -}$	x $= a\sec$ $\le \theta$ $< \frac{\pi}{2} \cup \pi$ $\le \theta$ $< \frac{3\pi}{2}$	ប្រើដម 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289289289289289289289289289 289289289289289289289289$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

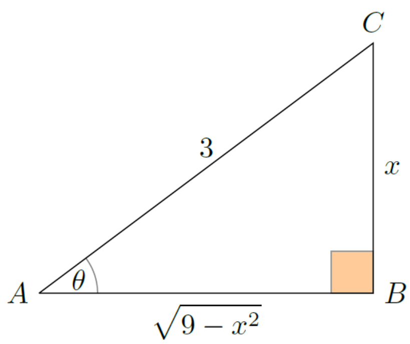
តាង $x = 3\,sin\theta$ ដែល $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ នោះគេបាន $dx = 3\,cos\,\theta\,d\theta$ និង

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

(ព្រោះ $cos\,\theta \ge 0$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) តាមវិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រគេបាន:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta} 3\cos\theta d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} d\theta = \int \cot^2\theta d\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)d\theta \\ &= -\cot^2\theta - \theta + C\end{aligned}$$

យើងមាន $x = 3\,sin\,\theta$,នោះ $sin\,\theta = \frac{x}{3}$ ។ ក្នុងករណីនេះតាមទំនាក់ទំនងត្រីកោណមាត្រ យើងកំណត់ជ្រុងឈមនៃត្រីកោណកែង មានរង្វាស់ x និង អ៊ីប៉ូតេនុសមានរង្វាស់ 3 ។



ឥឡូវនេះយើងត្រូវប្តូរមកអថេរដើមវិញគឺអថេរ x តាមរយៈការតាងខាងលើ។ នៅក្នុងការប្តូរនេះយើងត្រូវប្រើជាមួយទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង ដែលមានដូចនៅក្នុងរូបខាងលើ។ តាមរយៈការតាងខាងលើ យើងបាន $sin\,\theta = \frac{x}{3}$ ហើយតាមរូបខាងលើ មានន័យថាគេអាចគូសបានរូបត្រីកោណកែង ABC ដែលមាន $AB = \sqrt{9-x^2}\,, BC = x, AB = 3$ ។ នោះបាន

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

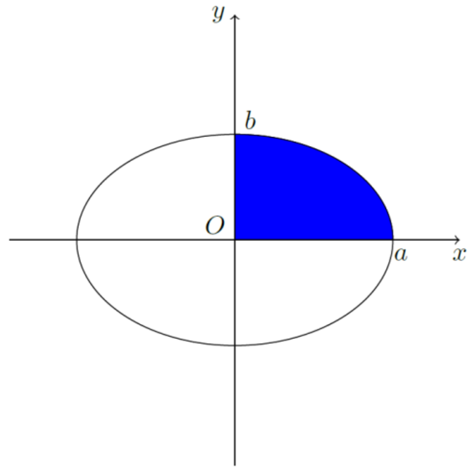
តាមរយៈរូបខាងលើ គឺ $\theta > 0$ នោះកន្សោម $cot\,\theta$ នៅតែពិត ចំពោះ $\theta < 0$ ។ ដោយហេតុថា $sin\,\theta = \frac{x}{3}$ គេបាន $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ ហើយនិង

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនា ក្រឡាផ្ទៃខាងក្នុងនៃអេលីប

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងដោះស្រាយរក y ចំពោះសមីការអេលីបខាងលើ

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

ឬគេបាន $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ដោយហេតុថា អេលីបមានបួនកាជ្រង់ដែលមាន ក្រឡាផ្ទៃស្មើៗគ្នា មានន័យថា A ក្រឡាផ្ទៃអេលីប ស្មើនឹងបួនដងនៃក្រឡាផ្ទៃនៃកាជ្រង់ទី១។ ដូចនេះដើម្បីគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃអេលីបទាំងមូលចាំបាច់យើត្រូវតែគណនាក្រឡាផ្ទៃនៃបំណែកអេលីបកាជ្រង់ទី១។

យើងឃើញថាកាជ្រង់ទី១ គេបានតម្លៃអនុគមន៍

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, 0 \le x \le a$$

ដូចនេះគេបាន

$$\frac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

ដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលនេះ យើងតាង x=a sin \theta នោះគេបាន dx=a cos \theta d\theta យើងសង្កេតឃើញថា បើ x=0 នោះ sin \theta =0 នាំឱ្យ \theta =0 ហើយបើ x=a នោះ sin \theta =1 នាំឱ្យ \theta = \pi 2 គេបាន

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sin^2\,\theta} = a\sqrt{1 - sin^2\,\theta} = a\,cos\theta$ ព្រោះ $sin\,\theta \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ដូចនេះគេបាន

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^1 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)d\theta \text{ ព្រោះ } \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$= 2ab\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right) = 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

យើងឃើញថា ចំពោះអេលីប ដែលមានអ័ក្ស a និង b គឺមានក្រឡាផ្ទៃ $\pi\,ab$ ហើយក្នុងករណី $a = b = r$ វាជារង្វង់ នោះវាមានក្រឡាផ្ទៃ $\pi\,r^2$ ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\ dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $x = 2tan\,\theta$ កំណត់លើ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ នោះ $dx = 2sec^2\,\theta\,d\theta$ យើងសង្កេតឃើញថា

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4\tan^2\theta + 4} = 2\sqrt{\tan^2\theta + 1} = 2\sqrt{\sec^2\theta} = 2\sec\theta$$

គេបាន

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}dx = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta}d\theta$$

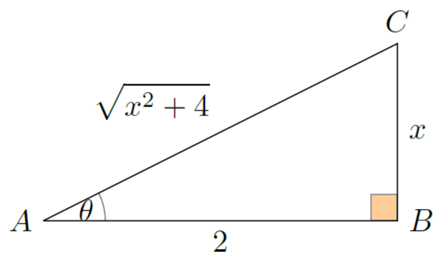
$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$

តែតាមលក្ខណៈត្រីកោណមាត្រ គេបាន

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

តាមរយៈការបំបែកកន្សោមខាងលើ គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}, \text{ តាង } u=\sin\theta \text{ គេបាន } du=\cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right)+C = -\frac{1}{4\sin\theta}+C \\ &= -\frac{\csc\theta}{4}+C\end{aligned}$$



ដោយប្រើរូបខាងលើ នោះយើងអាចកំណត់បាន $\csc\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$ នោះយើងបាន

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+C$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

នៅក្នុងករណីនេះយើងអាច យើងសង្កេតឃើញថា កន្សោមក្នុងរ៉ាឌីកាលរបស់ភាគបែង មានដឺក្រេដេរីវេស្មើនឹងភាគយក ដូចនេះយើងអាចប្រើវិធីប្តូរអេថេរ $u=x^2+4$ តែបើយើងប្តូរដោយ $x = 2tan\,\theta$ វាកាន់តែពិបាកក្នុងការគណនារកចម្លើយ។ យើងនឹងសង្កេតមើលទាំងពីររបៀបនេះ

របៀបទី១ៈ តាង $u=x^2+4$ គេបាន $du=2xdx$ ឬ $xdx=\frac{1}{2}du$ នាំឱ្យ

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u}+C = \sqrt{x^2+4}+C$$

របៀបទី២ៈ តាង $x=2tan\,\theta$ នាំឱ្យ $dx = \; d\theta$ គេបាន

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\tan\theta}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\cdot 2\sec^2\theta d\theta = \int \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}\cdot 2\sec^2\theta d\theta$$

$= \int \frac{\tan\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}\cdot 2\sec^2\theta d\theta = \int \frac{\tan\theta}{|\sec\theta|}\cdot 2\sec^2\theta d\theta$ ករណីនេះត្រូវគិតពីសញ្ញារបស់វា

តាមរយៈឧទាហរណ៍នេះ យើងត្រូវតែរកវិធីដោះស្រាយដែលងាយជាគេបំផុត។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$,ដែល $a > 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

របៀបទី១ៈ តាង $x = a\sec\theta$, ដែល $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ឬ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{4}$

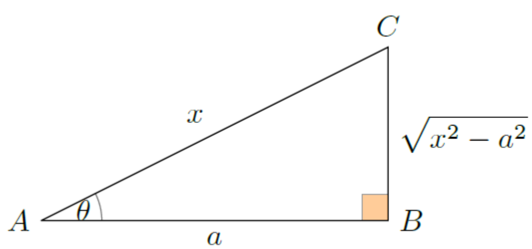
នោះគេបាន $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ ហើយ

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a\tan\theta$$

គេបាន

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \sec\int \theta d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

យើងមាន $x = a\sec\theta$,នោះ $\sec\theta = \frac{x}{a}$ ។ ក្នុងករណីនេះតាមទំនាក់ទំនងត្រីកោណមាត្រ យើងកំណត់ជ្រុងជាប់នៃត្រីកោណកែង មានរង្វាស់ a និង អ៊ីប៉ូតេនុសមានរង្វាស់ x ។



តាមរូបត្រីកោណកែងខាងលើនេះ មាន $\sec\theta = \frac{x}{a}$ គេបាន $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ ដូចនេះគេបាន

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

យក $C_1 = -\ln a + C$ គេបានរូបមន្ត

1□

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$
$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln a + C$$

របៀបទី២ៈ ចំពោះ $x > 0$ យើងប្រើអនុគមន៍ អ៊ីពែបូលិក ដើម្បីប្តូរអថេរ តាង $x = a\,cosh\,t$ ។ យើងដឹងថាតាមរូបមន្ត $cosh^2 t - sinh^2\,t = 1$ យើងបាន

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \sinh^2 t} = a\sinh t$$

ដោយហេតុថា $dx = a\,sinh\,tdt$ យើងបាន

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sinh t dt}{a\sinh t} = \int dt = t + C$$

ដោយយើងបានតាង cosh t= x a យើងបាន t= cosh_-1(x/a) និងរូបមន្ត

2□ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

\textbf សំគាល់ៈ តាមរបៀបដោះស្រាយទី២ នៅក្នុងខាងលើបានបង្ហាញថា ការជំនួសដោយប្រើអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក គឺអាចដូចការជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រដែរ ហើយពេលខ្លះការតាងដោយប្រើអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក អាចធ្វើឱ្យយើងទទួលបានអាំងតេក្រាលនៃអនុគមន៍ងាយជាងមុន។ ប៉ុន្តែជាទូទៅយើងច្រើនប្រើការជំនួសដោយប្រើអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ព្រោះរូបមន្តត្រីកោណមាត្រ ត្រូវបានប្រើប្រាស់ច្រើន។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(4x^2+9)^{3/2}} dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងសង្កេតឃើញថា$(4x^2+9)^{3/2} = \sqrt{(4x^2+9)^3}$ក្នុងករណីនេះ គឺប្រើការជំនួសដោយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ។

តាង $x = \frac{3}{2}\,tan\,\theta$ នោះយើងបាន $dx = \frac{3}{2}\,sec^2\theta\,d\theta$ និង

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{4\left(\frac{9}{4}\tan^2\theta + 9\right)} = \sqrt{9(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{9\sec^2\theta} = 3\sec\theta$$

ពេលដែល $x = 0, tan\,\theta = 0$ នោះ $\theta = 0$ និង នៅពេលដែល $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}, tan\,\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ នោះ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(4x^2+9)^{3/2}}dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta} \cdot \frac{3}{2}\sec^2\theta d\theta$$
$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\sin\theta d\theta$$

ឥឡូវនេះយើងប្រើវិធីជំនួស $u = \ cos\,\theta$ នោះ $du = -\,sin\,\theta\ d\theta$ និង

$$\text{បើ}\quad x = 0, u = 1 \qquad \text{បើ}\quad x = \frac{\pi}{3}, u = \ \frac{1}{2}$$

យើងបាន

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{3}} \frac{x^2}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1-u^2}{u^2}du$$
$$= \frac{3}{16}\int_1^{\frac{1}{2}} 1-u^{-2}du = \frac{3}{16}\left[u+\frac{1}{u}\right]_1^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{16}\left[\left(\frac{1}{2}+2\right)-(1+1)\right] = \frac{3}{32}$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ការគណនាអាំងតេក្រាលនេះ គឺត្រូវប្រើការជំនួសដោយអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដែលដំបូងយើងត្រូវ បំលែងកន្សោមក្នុងរ៉ាឌីកាល ដែលយើងអាចប្រើរូបមន្តដែលត្រូវតាង

$$3-2x-x^2 \ = 3-(x^2+2x) = 4-(x^2+2x+1)$$
$$= 4-(x+1)^2$$

ដំបូងយើងតាង $u = x + 1$ នោះ $du = dx$ និង $x = u - 1$ អញ្ចឹងយើងបាន

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = \int \frac{u - 1}{4 - u^2} du$$

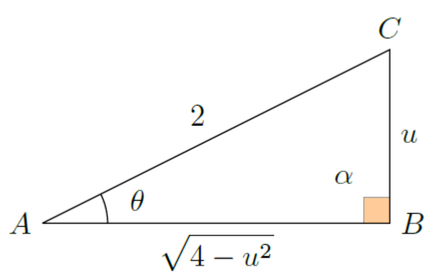
បន្ទាប់មក យើងអាចប្រើវិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដោយ $u = 2\sin\theta$ នោះយើងទទួលបាន $du = 2\cos\theta \; d\theta$ ហើយ

$$\sqrt{4 - u^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} = \sqrt{4(1 - \sin^2\theta)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

នោះគេបាន

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx &= \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}} du \\
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{\sqrt{4 - 4\sin^2\theta}} \cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int \frac{2\sin^2\theta - 1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta d\theta \\
&= \int (2\sin\theta - 1) d\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta + C
\end{aligned}$$

យើងមាន $u = 2\sin\theta$,នោះ $\sin\theta = \frac{u}{2}$ ។ ក្នុងករណីនេះតាមទំនាក់ទំនងត្រីកោណមាត្រ យើងកំណត់ជ្រុងឈមនៃត្រីកោណកែង មានរង្វាស់ u និង អ៊ីប៉ូតេនុសមានរង្វាស់ 2 ។



តាមរូបត្រីកោណកែងខាងលើ នោះយើងអាចគណនា $\cos\theta$ តាមរូបមន្តទំនាក់ទំនងមាត្រក្នុងត្រីកោណកែង គេបាន

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4 - u^2}}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -2\cos\theta - \theta + C$$
$$= -\sqrt{4-u^2} - \sin^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$
$$= -\sqrt{4-(x+1)^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

លំហាត់4៖

[1-3] គណនាដោយប្រើវិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ព្រមទាំងគូស និង ដាក់ឈ្មោះ ត្រីកោណកែងដែលត្រូវប្រើៈ

1 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

2 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx,$

3 $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx,$

[4-30] គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមៈ

4 $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$

5 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt$

6 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}dx$

7 $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

8 $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-16}}$

9 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

10 $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}dt$

11 $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

12 $\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}$

13 $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$

14 $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

15 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$

16 $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2-1}}dx$

17 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}dx}$

18 $\int \frac{dx}{[(ax)^2-b^2]}dx$

19 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

20 $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

21 $\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}dx$

22 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

23 $\int \sqrt{5+4x-x^2}dx$

24 $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}dt$

25 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

26 $\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}dx$

27 $\int \sqrt{x^2+2x}dx$

28 $\int \frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2}dx$

[31.] (a) ប្រើប្រាស់វិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ បង្ហាញថា

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(b) ប្រើប្រាស់វិធីជំនួស អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិកដោយតាង $x = a\,sinh\,t$ បង្ហាញថា

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

[32] គណនា

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)}dx$$

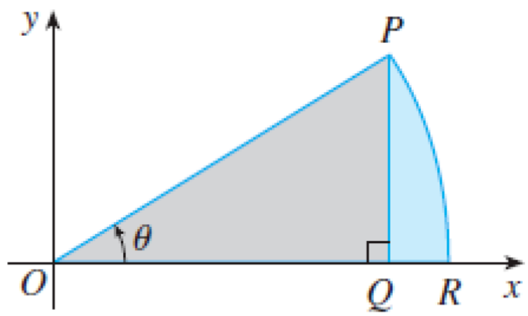
(a). ប្រើវិធីជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ។

(b). ប្រើការជំនួសអនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក ដោយតាង $x = a\,sinh\,t$ ។

[33.] គណនាតម្លៃមធ្យម នៃអនុគមន៍ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $1 \le x \le 7$ ។

[34.] គណនាក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងអ៊ីពែបូល $9x^2-4y^2=36$ និង $x=3$ ។

[35.] បង្ហាញរូបមន្តក្រឡាផ្ទៃ ចម្រៀកថាស់ កាំ r និង មុំ θ គឺ $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ ។ **ណែនាំៈ** ឧបមាថា $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ និងជារង្វង់ផ្ចិតនៅត្រង់គល់តម្រុយ មានសមីការ $x^2 + y^2 = 1$ នោះ A គឺជាក្រឡាផ្ទៃនៃត្រីកោណ POQ និង ក្រឡាផ្ទៃតំបន់ PQR ដូចក្នុងរូបខាងក្រោម។



[36.] គណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$$

គូសក្រាបអនុគមន៍ និងក្រាបអាំងតេក្រាលរបស់វា នៅលើក្រាបតែមួយ រួចពិនិត្យចម្លើយរបស់អ្នក។

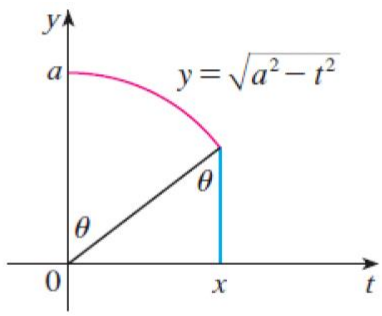
[37.] គណនាមាឌសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្ស ox នៃក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = \frac{9}{x^2+9}$, $y = 0,\ x = 0$ និង $x = 3$ ។

[38.] គណនាមាឌសូលីតដែលបានមកពីការបង្វិលជុំវិញអ័ក្ស $x = 1$ នៃក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោង $y = x\sqrt{1-x^2}$,និង $0 \leq x \leq 1$ ។

[39.] (a). ប្រើវិធីការជំនួសអនុគមន៍ត្រីកោណ ដើម្បីបង្ហាញថា

$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

(b). ប្រើរូបខាងក្រោម ដើម្បីផ្តល់លក្ខណៈធរណីមាត្រ នៃសមីការដែលមាននៅក្នុងចំណុច (a)។



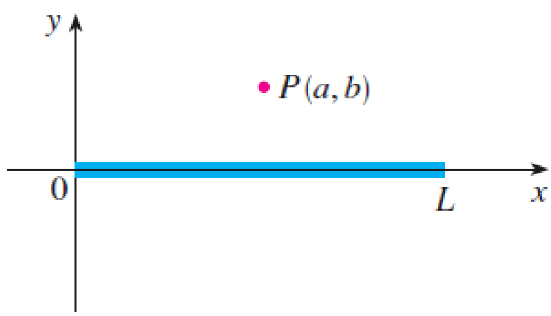
[40.] ប៉ារ៉ាបូល $y = \frac{1}{2}x^2$ ចែកថាស $x^2 + y^2 \leq 8$ ជាពីរផ្នែក។ គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃផ្នែកទាំងពីរនោះ។

[41.] Torus មួយគឺកើតឡើងពីការបង្វិលរង្វង់ $x^2 + (x - R)^2 = r^2$ ជុំវិញអ័ក្ស $0x$ ។ គណនាមាឌខាងក្នុងរបស់ Torusនោះ។

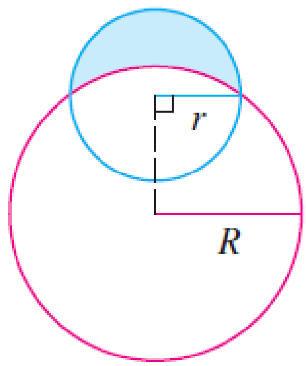
[42] ខ្សែបញ្ចូលភ្លើងមួយ មានប្រវែង L បង្កើតអគ្គិសនីនៅត្រង់ចំណុច P(a,b) ដែលអោយដោយសមីការ

$$E(P) = \int_{-a}^{l-a} \frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}} dx$$

ដែល λ ជាដង់ស៊ីតេបញ្ចូលក្នុងមួយឯកតាប្រវែងនៅលើខ្សែ និង ϵ_0 គឺជាលំហសេរី(មើលរូប) ។ គណនាអាំងតេក្រាលដើម្បីកំណត់កន្សោមចំពោះអគ្គិសនី E(P) ។



[43.] គណនាក្រឡាផ្ទៃនៃ ចំណិតព្រះចន្ទដែលខណ្ឌដោយខ្សែរង្វង់ពីរដែលមានកាំ r និង R (មើលរូប)



៣.ច. គណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍សនិទានដោយប្រើ ប្រភាគដោយផ្នែក

ក្នុងផ្នែកនេះយើងនឹងបង្កើតវិធីគណនាអាំងតេក្រាលចំពោះអនុគមន៍សនិទាន(ដែលមានភាគយក និងភាគបែងជាពហុធា) ដោយការបំបែកអនុគមន៍នោះជា ផលបូកអនុគមន៍ប្រភាគងាយ ដែលយើងហៅថា ប្រភាគផ្នែក។ មុននឹងឈានដល់វិធីគណនាអាំងតេក្រាល យើងពិនិត្យលើផលដកនៃប្រភាគដូចខាងក្រោម

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

ឥឡូវនេះយើងអនុវត្តន៍អាំងតេក្រាលលើអង្គសងខាងនៃសមីការខាងលើ

$$\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx \quad =\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

យើងសង្កេតឃើញថាក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនេះ ក្រោយពីបំបែកជាទំរង់ប្រភាគផ្នែក យើងអាចប្រើរូបមន្តគ្រឹះដែលបានសិក្សាកន្លងមកដែលប្រើវិធីគណនាយ៉ាងងាយ។

ដើម្បីប្រើវិធីប្រភាគផ្នែក ក្នុងការងារទូទៅ យើងត្រូវគិតពិចារណាលើប្រភាគសនិទានដែលត្រូវគណនាអាំងតេក្រាល

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ដែល P និង Q ជា ពហុធា។ យើអាចបំបែក f ជាផលបូកប្រភាគងាយបានបើសិនជា P មាន ដឺក្រេទាបជាងដឺក្រេ Q ។ ប្រភាគបែបនេះហៅថា ប្រភាគផ្ទាល់ (Proper)។

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$$

ដែល $a_n \neq 0$ នោះគេថា P មានដឺក្រេ n ហើយគេកំនត់សរសេរ $deg(P) = n$ ។

បើ f មិនផ្ទាល់ $(improper)$មានន័យថា $deg\,(P) \geq deg\,(Q)$ នោះ យើងត្រូវមានជំហាន បឋមនៃការចែក P នឹង Q ដែលមានសំណល់ $R(x)$ ដែល $deg\,(R) < deg(Q)$ នោះគេបានកន្សោម ផលចែកគឺ

1□

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

ដែល S និង R ជាពហុធា។

ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងក្រោមនេះ នឹងបង្ហាញខ្លះៗពីវិធីដំបូងដែលយើងត្រូវការប្រើ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយសារតែដឺក្រេភាគយកធំជាងដឺក្រេភាគបែង នោះយើងអាចរកសំណល់បាន

$$\begin{array}{rl}
 & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{2-2}
X - 1) & X^3 \;\; + X^2 \qquad\quad - 1 \\
 & -X^3 \;\; + X^2 \\ \cline{2-2}
 & 2X^2 \\
 & -2X^2 + 2X \\ \cline{2-2}
 & 2X - 1 \\
 & -2X + 2 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

ដូចនេះគេបាន

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

វិធីសាស្ត្របន្ទាប់គឺការសរសេរភាគបែងជាផលគុណកត្តាបើអាចធ្វើបាន។ យើងដឹងថាពហុធា Q ខ្លះអាចសរសេរជាផលគុណកត្តាដែលមានទំរង់លីនេអ៊ែ (ax+b) និង ពហុធាដឺក្រេទី២ ដែលមិនអាចដាក់ជាផលគុណកត្តាបាន (ax^2+bx+c=0,\ \ \text ដែល b^2-4ac<0)។ ជាឧទាហរណ៍, បើ Q(x)=x^4-16 ក្នុងករណីនេះយើងអាចសរសេរជា ផលគុណកត្តាបាន

$$Q(x)=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

ជំហានទី៣ គឺការសរសេរអនុគមន៍ប្រភាគផ្ទាល់ R(x)/Q(x) (ទំរង់សមីការ1) ជាផលបូកប្រភាគផ្នែក ក្នុងទំរង់

$$\frac{A}{(ax+b)} \text{ ឬ } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

តាមលក្ខណៈពីជគណិតពិតជាធានាថា យើងអាចធ្វើវាបាន។ វាមានករណីជាច្រើនកើតឡើងៈ

ករណី1: ការសរសេរកន្សោមភាគបែងជាផលគុណកត្តាលីនេអ៊ែខុសៗគ្នា មានន័យថាយើងអាចសរសេរ

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_kx+b_k)$$

ដែលគ្មានកត្តាណាមួយដូចគ្នា។ ក្នុងករណីនៃទ្រឹស្តីបទនៃប្រភាគផ្នែក នោះមានមេគុណ A_1 $,\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_\mathrm{n}$ ដែល

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

មេគុណខាងលើនេះអាចកំណត់បានតាមឧទាហរណ៍ខាងក្រោម។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយដឺក្រេភាគយកទាបជាងដឺក្រេភាគបែង នោះយើងមិនចាំបាច់ធ្វើប្រមាណវិធីចែក តែយើងសកល្បងសសេរភាគបែងជាផលគុណកត្តា

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

ដោយភាគបែងមានបីកត្តាខុសៗគ្នា នោះប្រភាគផ្នែកនៃអនុគមន៍គឺមានទំរង់

3□

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

ដើម្បីកំណត់តម្លៃ A, B និង C យើងគុណអង្គទាំងពីរ ដោយកន្សោមផលគុណ

$x(2x - 1)(x + 2)$ នោះយើងបាន

4□

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 1) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

យើងពន្លាតអង្គខាងស្តាំ នៃសមីការ 4 និង សរសេរវាជាទំរង់ស្តង់ដារបស់ពហុធា យើងបាន

5□

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

យើងឃើញថាសមីការខាងលើនេះពិត គ្រប់ x កាលណា មេគុណនៃកន្សោមអង្គទាំងពីរនេះស្មើគ្នា យើងបាន

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

ដោះស្រាយយើងបានចម្លើយ $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ និង $C = -\frac{1}{10}$ ហើយយើងបានអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx = \int \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x - 1| - \frac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

សម្គាល់: ចំពោះការដោះស្រាយ រកមេគុណ A, B និង C ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើ សមីការ 4 បើវាផ្ទៀងផ្ទាត់គ្រប់ x យើងអាចប្រើលីមីតលើអង្គសងខាងដោយ $x \to 0$ ទាញបាន A , $x \to \frac{1}{2}$

ទាញបាន B និង $x \to -2$ ទាញបាន C ព្រោះក្នុងសមីការ 4 ក្នុងការរក A, B, C, វាពិតកាលណា $x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -2$ ប៉ុន្តែមាន សៀវភៅជាច្រើនដែល គេយក $x = 1, x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)}$,ដែល $a \neq 0$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងប្រើវិធីប្រភាគផ្នែក

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

នោះយើងបាន

$A(x+a) + B(x-a) = 1$, ដែល $x \neq \pm a$

យើងអនុវត្តន៍លើអង្គទាំងពីរ លីមីត $x \to a$ និង $x \to -a$ នោះគេបាន $A = \frac{1}{2a}$ និង $B = -\frac{1}{2a}$ ។

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

យើងអាចសរសេរអាំងតេក្រាលជា

6□

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

ករណី 2: $Q(x)$ ជាផលគុណនៃកត្តាដែលមានកត្តាខ្លះច្រំដែលៈ

ឧបមាថា កន្សោម $a_1x + b_1$ ច្រំដែល r ដង មានន័យថា $(a_1x+b_1)^r$ ជាកត្តាមួយនៃ $Q(x)$ ។ នោះតួ $\frac{A}{a_1x+b_1}$ នៃសមីការ 2 គឺត្រូវបានជំនួសដោយ កន្សោម

7□

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

តាមមធ្យោបាយនេះ យើងអាចសរសេរកន្សោមខាងក្រោម

$$\frac{x^3-x+1}{x^2(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{(x-1)^3}$$

តាមការសរសេរខាងលើនេះយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលបានយ៉ាងងាយ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ជំហានដំបូងយើងចែកពហុធាររួចសរសេរជាផលបូក

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

ជំហានបន្ទាប់ គឺការសរសេរជាផលគុណកត្តា នៃកន្សោមភាគបែង $Q(x)=x^3-x^2-x+1$ ។ដោយ $Q(1)=0$ នេះមានន័យថា $x-1$ ជាកត្តាមួយនៃភាគបែង រួចប្រើវិធីចែក $Q(x)$ នឹង $x-1$ គេអាចសរសេរ

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= (x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

ដោយសារតែ កន្សោម x-1 កើតឡើងពីរដង គេបានផលបូកប្រភាគផ្នែកគឺ

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

យើងតម្រូវភាគបែងរួម $(x-1)^2(x+1)$ យើងបាន

8□

$$\begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2 \\ &= (A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C) \end{aligned}$$

យើងផ្ទឹមមេគុណនៃអង្គទាំងពីរគេបាន

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ A + B + C = 0 \end{cases}$$

យើងដោះស្រាយសមីការនេះយើងបាន $A = 1, B = 2,\ C = -1$ ហើយយើងបាន

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-2} - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-2} - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

ករណី៣ៈ $Q(x)$ មានផ្ទុកកត្តាដឺក្រេទី២ (ដែលគ្មានឫសជាចំនួនពិត) មិនច្រំដែលៈ

បើកន្សោម $Q(x)$ មានកត្តា $ax^2 + bx + c$ ដែល $b^2 - 4ac < 0$ នោះផលបូកប្រភាគផ្នែកនៃ $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ក្នុង សមីការ (2) និង (7) គឺមានកន្សោម

9□

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

ដែល A, B ជាចំនួនពិតដែលត្រូវកំណត់។ ជាឧទាហរណ៍ ចំពោះកន្សោម $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)}$ មានផលបូកនៃប្រភាគផ្នែកគឺ

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

ចំពោះកន្សោម 9 អាចគណនាអាំងតេក្រាលបាន ដោយការបំលែងភាគបែងទៅជារាង x^2\pm a^2 ក្នុងករណីនេះ យើងអាចប្រើរូបមន្តអាំងតេក្រាលបន្ថែមគឺ

10□

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

យើងសង្កេតឃើញថា $x^3+4x=x(x^2+4)$ ដែលមិនអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាបន្តទៀតបាន នោះយើងអាចសរសេរ

$$\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+4}$$

យើងគុណអង្គទាំងពីរ នឹង $x(x^2-4)$ គេបាន

$$\begin{aligned}2x^2-x+4 &= A(x^2+4)+(Bx+C)x\\ &= (A+B)x^2+Cx+4A\end{aligned}$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរ គេបាន

$$\begin{cases}A+B=2\\ C=-1\\ 4A=4\end{cases}$$

យើងដោះស្រាយសមីការនេះ យើងបាន

$$A=1, B=1, C=-1$$

ដូចនេះយើងបានអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\int \left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx$$

ដោយពិនិត្យអាំងតេក្រាលតួទីពីរ

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}dx=\int \frac{x}{x^2+4}dx-\int \frac{dx}{x^2+4}$$

យើងជំនួស $u = x^2 + 4$ នៅក្នុងអាំងតេក្រាលទី ១ $du = 2xdx$ រួចគណនាអាំងតេក្រាលទី២ដោយប្រើរូបមន្ត 10 ដែល $a = 2$ គេបាន

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$$
$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

ឧទាហរណ៍៖

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}dx$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ដោយដឺក្រេភាគយកមិនតូចជាងដឺក្រេភាគបែង នោះយើងធ្វើការចែកពហុធា

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

ដោយ $4x^2 - 4x + 3$ មិនអាចសរសេរជាផលគុណកត្តាបាន ព្រោះ $b^2 - 4ac = -32 < 0$ ។

ឡូវនេះយើងប្រើការបំពេញនៅភាគបែង យើងបានកន្សោមភាគបែងគឺ

$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$

តាង $u = 2x - 1$ នោះ $du = 2dx$ ហើយ $x = \frac{1}{2}(u + 1)$ គេបាន

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}dx &= \int \left(1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}\right)dx \\
&= x+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1)-1}{u^2+2}du = x+\frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}du \\
&= x+\frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}du-\frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}du \\
&= x+\frac{1}{8}\ln|u^2+2|-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C \\
&= x+\frac{1}{4}\ln(4x^2-4x+3)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)+C
\end{aligned}
$$

សំគាល់: ក្នុងឧទាហរណ៍ខាងលើយើងជំនួសអាំងតេក្រាល នៃប្រភាគផ្នែកដោយ ទំរង់

$$\frac{(\mathrm{Ax}+\mathrm{B})}{\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+c} \quad \text{ដែល} \quad b^2-4ac<0$$

យើងប្រើការបំពេញចំពោះភាគបែងដើម្បីយើងអាចគណនាតាមអាំងតេក្រាល ក្នុងទម្រង់

$$\int \frac{Cx+D}{u^2+a^2}du = C\int \frac{u}{u^2+a^2}du + D\int \frac{1}{u^2+a^2}du$$

ចំពោះផលបូកអាំងតេក្រាលទាំងពីរយើងអាចគណនាបានតាមរូបមន្តគ្រឹះ គឺអាំងតេក្រាលទី១ជាអនុគមន៍លោការីត និងអាងតេក្រាលទីពីរជា $\tan^{-1}$ ។

ករណីទី 4 $Q(x)$ ផ្ទុកដឺក្រេទី២ (មិនអាចបំបែកជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទី១)ច្រំដែលៈ

បើសិនជា $Q(x)$ មានកត្តា $(ax62+bx+c)^r$ ដែល $b^2-4ac<0$ នោះគេអាចជំនួសតួនៅផ្នែក 9 ដោយ ផលបូក

11□

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

ឧទាហរណ៍៖

សរសេរកន្សោមខាងក្រោមជាផលបូកប្រភាគផ្នែក

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$$

យើងគណនារកតម្លៃមេគុណគេបាន $A=-1, B=\frac{1}{8}$; $C=D=-1, E=\frac{15}{8}, F=-\frac{1}{8}$,\\ $G=H=\frac{3}{4}, I=-\frac{1}{2}, J=\frac{1}{2}$ ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

សរសេរកន្សោមជាផលបូកផ្នែក

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

យើងគុណអង្គទាំងពីរនឹង $x(x^2+1)^2$ គេបាន

$$\begin{aligned}-x^3+2x^2-x+1 &= A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)x+(Dx+E)x\\ &= A(x^4+2x^2+1)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+Dx^2+Ex\\ &= (A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A\end{aligned}$$

បើយើងផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការគេបានប្រព័ន្ធ

$$A+B=0, C=-1, 2A+B+D=2, C+E=-1,\ A=1$$

យើងទទួលបានចម្លើយ $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1,$ និង $E = 0$ អញ្ចឹងយើងទទួលបានអាំងតេក្រាល

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

ប៉ុន្តែយើងសង្កេតឃើញថាក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលពេលខ្លះការសរសេរជាផលបូកផ្នែកត្រូវបានជៀសវាង ឧទាហរណ៍:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)} dx$$

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល ដោយប្រើវិធីករណី III នោះយើងជំនួស

$u = x(x^2+3) = x^3 + 3x$ គេបាន $du = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)dx$

អញ្ចឹងគេបាន

$$\int \frac{x^2+1}{x\left(x^2+3\right)} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^3\right| + 3| + C$$

ការជំនួសឱ្យទៅជាសនិទានទូទៅ:

នៅក្នុងទម្រង់ខ្លះនៃកន្សោមមិនសនិទាន យើងអាចបំលែងវាឱ្យមានទម្រង់សនិទានបាន តាមវិធិដែលអាចធ្វើទៅបាន។ ក្នុងករណីពិសេសនេះ យើងលើកយកកន្សោមដែលមានរាង $\sqrt[n]{g(x)}$ គេអាចជំនួសដោយតាង $u = \sqrt[n]{g(x)}$ ។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាង $u=\sqrt{x+4}$ នោះគេបាន $u^2=x+4$ អញ្ចឹងគេបាន $x=u^2-4$ នោះ $dx=2udu$ នាំឱ្យ

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx &= \int \frac{u}{u^2-4}2udu = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}du\\ &= 2\int \left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du\end{aligned}$$

យើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះតាមរយៈការបំបែកជាផលគុណកត្តាផងដែរ u^2-4=(u-2)(u+2) រួចយើងប្រើសនិទានផ្នែកតាមរូបមន្ត 6 ដែល $a=2$ គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx &= 2\int du+\int \frac{8}{u^2-4}du = 2u+8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u-2}\right|+C\\ &= 2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍

[1-6] សរសេរប្រភាគសនិទានខាងក្រោមជាប្រភាគផ្នែក

1 $(a)\cdot\frac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$

(b). $\frac{10}{5x^2-2x^3}$

2 $(a)\cdot\frac{x}{x^2+x-2}$

(b). $\frac{x^2}{x^2+x+2}$

3 (a). $\frac{x^4+1}{x^5+4x^3}$

(b). $\frac{1}{(x^2-9)^2}$

4 (a). $\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-2}{x^2-2x+1}$

(b). $\frac{x^2-1}{x^3+x^2+x}$

5 (a). $\frac{x^6}{x^2-4}$

(b). $\frac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

6 (a). $\frac{t^6+1}{t^6+t^3}$

(b). $\frac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}$

[7-38] គណនាអាំងតេក្រាល

7 $\int \frac{x^2}{x-1} dx$

8 $\int \frac{3t-2}{t+1} dt$

9 $\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} dx$

10 $\int \frac{y}{(y+4)(2y-1)} dy$

11 $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx$

12 $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$

13 $\int \frac{ax}{x^2-bx} dx$

14 $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$

15 $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx$

16 $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6} dx$

17 $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$

18 $\int \frac{x^2-4x-10}{x^3-x} dx$

19 $\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} dx$

20 $\int \frac{x^2-5x+16}{(5x+1)(x-2)^2} dx$

21 $\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx$

22 $\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23 $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx$

24 $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x} dx$

25 $\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1} dx$

26 $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} dx$

27 $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

28 $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$

29 $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5} dx$

30 $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2} dx$

31 $\int \frac{1}{x^3-1} dx$

32 $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13} dx$

33 $\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3} dx$

34 $\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1} dx$

35 $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36 $\int \frac{x^4+2x^2+3x-2}{x^5+5x^3+5x} dx$

[39-52] គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោមដោយប្រើវិធីជំនួសប្តូរជាអនុគមន៍សនិទាន

39 $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

40 $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x} dx$

41 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$

42 $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$

43 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$

44 $\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x} dx$

45 $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} dx$ [ណែនាំ: ជំនួស $u = \sqrt[6]{x}$]

46 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx$

47 $\int \frac{x^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2} dx$

48 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-3\cos x} dx$

49 $\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2} dt$

50 $\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)} dx$

ប្រើអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក រួមជាមួយតិចនិចអាំងតេក្រាល គណនាអាំងតេក្រាល

50 $\int \frac{dx}{1+e^x} dx$

51 $\int \frac{\cosh t}{\sinh^2 t+\sinh^4 t} dt$

[55.] ប្រើក្រាហ្វនៃ $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ ដើម្បីសន្និដ្ឋានថា $\int_0^2 f(x)dx$ វិជ្ជមាន ឬអវិជ្ជមាន។ ប្រើក្រាហ្វដើម្បីប៉ានស្មានអាំងតេក្រាល និងប្រើប្រភាគសនិទានដើម្បីគណនាតម្លៃរបស់វាពិត។

[56.] គណនា

$\int \frac{1}{x^2+k}\,dx$

ដោយពិភាក្សាករណីទាំងអស់នៃចំនួនថេរ k ។

គណនាអាំងតេក្រាលដោយប្រើការបំពេញ និងប្រើរូបមន្ត 6

$$57. \int \frac{dx}{x^2-2x} \qquad 58. \int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$$

[59.] អ្នកគណិតវិទ្យាអាល្លឺម៉ង់ Kar Weierstrass(1815-1897)បានកត់សម្គាល់ថា ការជំនួស $t = tan\,(\frac{x}{2})$ នឹងបម្លែងប្រភាគនៃអនុគមន៍ $sin\,x$ និង $cos\,x$ ជាអនុគមន៍ដែលតែអថេរ t ។

(a). បើ $t = tan\,(\frac{x}{2}), -\pi < x < \pi$ គូសត្រីកោណកែង ឬប្រើរូបមន្តត្រីកោណ បង្ហាញថា

$$cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ និង } sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b). បង្ហាញថា

$$cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ និង } sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c). បង្ហាញថា

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

ប្រើការជំនួសក្នុងលំហាត់ 59 ដើម្បីបម្លែងទម្រង់អាំងតេក្រាលទៅជាអាំងតេក្រាល អនុគមន៍សនិទាននៃ t និង គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម

60 $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

61 $\int \frac{1}{3\sin x-4\cos x}dx$

62 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx$

63 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2+\cos x}dx$

គណនាក្រឡាផ្ទៃខណ្ឌដោយខ្សែកោងពី $x = 1$ ទៅ $x = 2$

64 $y=\frac{1}{x^3+x}$

65 $y=\frac{x^2+1}{3x-x^2}$

[66.] គណនាមាឌនៃសូលីតដែលកើតឡើងពីផ្ទៃខ្សែកោង $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$ ពី $x=0$ ទៅ $x=1$ ដោយវិលជុំវិញ

(a). អ័ក្សអាប់ស៊ីស (b). អ័ក្សអរដោនេ។

67. គេមានវិធីមួយនៃការបង្ហាញពីការកើនឡើងនៃ ចំនួនសត្វល្អិតដោយមិនប្រើថ្នាំសម្លាប់សត្វល្អិតគឺរាប់ទាំងចំនួនសត្វល្អិតឈ្មោលទាំងអស់ដែលអា(គ្មានកូន) ដែលពាក់ជាមួយជាមួយសត្វញី(អាចបង្កើតកូន) តែគ្មានកូន។ បើ P ជាចំនួននៃសត្វញីសរុប S ជាចំនួនសត្វឈ្មោលអាទាំងអស់ក្នុងជំនាន់និមួយៗ និង r ជាអត្រាកើនឡើងធម្មជាតិនៃសត្វល្អិត នោះសត្វល្អិតឈ្មោលសរុបគឺមានទំនាក់ទំនងនឹងពេល t ដោយ

$$t=\int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}dP$$

ឧបមាថា ចំនួនសត្វល្អិតមានសត្វឈ្មោលកើនឡើង 10,000 នៅអត្រា 0.10 និង 900 សត្វឈ្មោលអាទាំងអស់ត្រូវបានរាប់បញ្ចូល។ គណនាអាំងតេក្រាលដើម្បីផ្តល់សមីការដែលមានទំនាក់ទំនងរវាងសត្វឈ្មោលទាំងអស់ទៅនឹងរយៈពេល។ (សម្គាល់: ចំពោះលទ្ធផលមិនចាំបាច់ដោះស្រាយរកចម្លើយជាក់លាក់នៃ P)។

[68.] ដាក់កត្តា x^4+1 ជាផលគុណកត្តាដឺក្រេទី២ ដោយប្រើវិធីបន្ថែមបន្ថយតួ។ ប្រើប្រាស់កត្តានេះដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល

$$\int \frac{1}{x^4+1}dx$$

៣.ឆ. វិធីសាស្ត្រនៃការគណនាអាំងតេក្រាល

យើងបានសិក្សាលើវិធីសាស្ត្រមូលដ្ឋានគណនាអាំងតេក្រាលមួយចំនួនដែល យើងតែងតែប្រើដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាលលើអនុគមន៍ដែលមានព្រីមីទីវជាក់លាក់។ ជានេះទៅទៀតយើងក៏អាចគណនាអាំង

តេក្រាលដោយប្រើរូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាលផងដែរ។ ខាងក្រោមនេះជា តារាងនៃរូបមន្តអាំងតេក្រាល ដែលគេបានរកឃើញ និងដែលយើងគួរតែចង់ចាំ។

រូបមន្តគ្រឹះអាំងតេក្រាល ដែលមិនបញ្ចូលចំនួនថេរ

1 $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ (n \neq -1)$
2 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$
3 $\int e^x dx = e^x$
4 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
5 $\int \sin x dx = -\cos x$
6 $\int \cos x dx = \sin x$
7 $\int \sec^2 x dx = \tan x$
8 $\int \csc^2 x dx = -\cot x$
9 $\int \sec x \tan x dx = \sec x$
10 $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$
11 $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$
12 $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x|$
13 $\int \tan x dx = \ln|\sec x|$
14 $\int \cot x dx = \ln|\sin x|$
15 $\int \sinh x dx = \cosh x$
16 $\int \cosh x dx = \sinh x$
17 $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
18 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right),\ a > 0$
19 $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$
20 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp a^2}\right|$

អញ្ចឹងមុនពេលគណនាអាំងតេក្រាល យើងមាន 4 ជំហានក្នុងការគិតដើម្បីគណនាអាំងតេក្រាល បោះអនុគមន៍នោះមានព្រីមីទីវដាក់លាក់។ ជំហានទាំង 4 នោះគឺ៖

1. គណនា ឬសម្រួលកន្សោមដែលត្រូវអាំងតេក្រាលបើអាចៈ

ពេលខ្លះមុនពេលគណនាអាំងតេក្រាលយើងអាចបំលែង ឬសម្រួលកន្សោមដែលត្រូវអាំងតេក្រាលមុន។

ឧទាហរណ៍៖ មុនការគណនាអាំងតេក្រាលទាំងនេះ

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx &= \int (\sqrt{x}+x)dx \\
\int \frac{\tan\theta}{\sec\theta}d\theta &= \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta d\theta \\
&= \int (\sin\theta\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx \\
\int (\sin x+\cos x)^2 dx &= \int (\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x)dx
\end{aligned}$$

$$= \int (1+2\sin x\cos x)dx$$

2.រកមើលការជំនួយជាក់លាក់: យើងព្យាយាមស្វែករកការជំនួសអនុគមន៍ u=g(x) ដែលដេរីវេរបស់វាគឺ du=g'(x)dx ដែលទម្រង់នេះកើតឡើងព្រមគ្នា។ ជាឧទាហរណ៍

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$

ក្នុងករណីនេះយើងសម្គាល់ឃើញថា បើ $u = x^2 - 1$ នោះយើងបាន $du = 2xdx$ ដូចនេះ យើងប្រើវិធីជំនួសក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលនេះ។

3. ការបែងចែកទៅតាមទម្រង់: បើសិនជាជំហានទី 1 និងទី2 មិនអាចគណនាអាំងតេក្រាលបាន យើងមើលទម្រង់នៃអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលរួមមាន

(a).ទម្រង់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ: បើ $f(x)$ ជាផលគុណនៃស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ $sin\,x$ និង $cos\,x$,ឬនៃ $tan\,x$ និង $sec\,x$,នៃអនុគមន៍ $cot\,x$ និង $csc\,x$ យើងជំនួសដោយប្រើវិធីក្នុងផ្នែក 7.2

(b). អនុគមន៍សនិទាន: អនុគមន៍សនិទាន នោះយើងប្រើការគណនាក្នុង ផ្នែក 7.4 ដែលមានទំនាក់ទនងប្រភាគផ្នែក។

(c). **អាំងតេក្រាលដោយផ្នែក:** បើ $f(x)$ ជាផលគុណពហុធា និងអនុគមន៍ដូចជា ត្រីកោណ អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល លោការីត) នោះយើងសាកល្បងតាមអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក ដោយការជ្រើសរើស u និង dv តាមវិធីក្នុងផ្នែក 7.3។

(d). **រ៉ាឌីកាល:** ក្នុងករណីពិសេស នៃការជំនួស ដែលក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលដែលកន្សោមមានរ៉ាឌីកាល៖

(i). បើ $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ កើតឡើង យើងប្រើការជំនួសដោយ អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ដូចមាននៅក្នុងតារាងផ្នែក 7.3។

(ii). បើ $\sqrt[n]{ax+b}$កើតឡើង ប្រើការជំនួសឱ្យទៅជា $u=\sqrt[n]{ax+b}$។ ជាទូទៅយើងធ្វើដូចគ្នាចំពោះ $\sqrt[n]{g(x)}$។

(4). **ការសាកល្បងម្តងទៀត:** បើជំហាន 3 ដំបូងនៃការគណនាអាំងតេក្រាល មិនអាចរកចម្លើយបាន ត្រូវចាំថាយើមានវិធីគណនាអាំងតេក្រាលពីរសំខាន់ គឺ វិធីការជំនួស និង ដោយផ្នែក។

(a). **ការជំនួសសាកល្បង:** បើមិនអាចជំនួសក្នុង ជំហានទី២ មិនអាចទាញរកគន្លឹះដោះស្រាយបាននោះយើងត្រូវរកវិធីជំនួសមួយដែលត្រឹមត្រូវ។

(b). **សាកល្បងវិធីដោយផ្នែក:** វិធីអាំងតេក្រាលដោយផ្នែកគឺត្រូវបានគេប្រើច្រើនបំផុតដូចដែលមាននៅក្នុងជំហានទី3 (c) ជួនកាលវាមានប្រយោជន៍ចំពោះអនុគមន៍ដែលនៅតែឯងដែរ (Single Function)។ តាមផ្នែក 7.1 យើងអាងប្រើវាចំពោះអនុគមន៍ដូចជា $tan^{-1}x$, $sin^{-1}x$ និង $ln\,x$ ព្រមទាំងអនុគមន៍ចំរាស់នៃអនុគមន៍ទាំងនេះផងដែរ។

(c). **ការរចេះរៀបចំក្នុងការអាំងតេក្រាល:** ការរៀបចំពីលក្ខណៈពិជគណិត(មានន័យថាការរៀបចំ ភាគបែង ឬការប្រើប្រាស់រូបមន្តត្រីកោណមាត្រអោយបានត្រឹមត្រូវ) គឺមានសារប្រយោជន៍ ដើម្បីបម្លែងអាំងតេក្រាលជាទម្រង់ងាយមួយដែលអាចដោះស្រាយបាន។ ឧទាហរណ៍:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-\cos x} &= \int \frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx\end{aligned}$$

(d). **ធ្វើទំនាក់ទំនងទៅលំហាត់កន្លងមកៈ** ពេលដែលយើងគណនាអាំងតេក្រាលពេលខ្លះទាមទារអោយយើងមាន

បទពិសោធន៍ក្នុងការដោះស្រាយដែលអាចធ្វើឱ្យយើងសោះស្រាយបានចំពោះលំហាត់ដែលមានទម្រង់បករហាក់ប្រហែលគ្នា ឬបម្លែងទៅជាទម្រង់ដែលធ្លាប់ដោះស្រាយកន្លងមក ។ ជាឧទាហរណ៍ៈ ក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាល $\int tan^2 x sec\, x\, dx$ យើងបម្លែងដោយប្រើរូបមន្ត

$tan^2 x = sec^2 - 1$

នោះយើងបាន

$$\int tan^2 x sec\, x\, dx = \int sec^3 x dx - \int sec\, x dx$$

បើសិនជា យើងបានគណនា $\int sec^3\, x dx$ នោះយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាលនេះបាន។

(e).**ការវិធីគណនាច្រើនៈ** ពេលខ្លះការគណនាអាំងតេក្រាលមួយគឺត្រូវការវិធីគណនាអាំងតេក្រាលពីរ ឬបី។ ក្នុងការគណនាអាំងតេក្រាលប្រភេទនេះគឺប្រើវិធីដដែលៗច្រើនដង ឬផ្សេងគ្នាច្រើនដង។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

ក្នុងជំហានទី១ យើងអាចសរសេរ

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \tan^3 x \sec^3 x dx$$

អាំងតេក្រាលនេះមានទម្រង់ $\int tan^n x sec^m x dx$ ដែល $n,\ m$ ជាចំនួនសេសនោះយើងប្រើវិធីសាស្រ្តក្នុង ផ្នែក 7.2។

យើងក៏អាចចាប់ផ្តើម តាមវិធីផ្សេងដែរ

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x} dx$$

នោះយើងអាចបន្តការគណនាដោយប្រើវិធីជំនួស $u = \cos x$ គេបាន

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1-u^2}{u^3}(-du) \\ &= \int \frac{u^2-1}{u^3} du = \int (u^5 - u^{-6}) du\end{aligned}$$

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{\sqrt{x}} dx$

សម្រាយបញ្ជាក់៖

តាម (ii) ក្នុង ជំហានទី3d យើងជំនួស $u = \sqrt{x}$ គេបាន $x = u^2$ នោះ $dx = 2udu$ និង

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int ue^u du$$

តាមទម្រង់នេះយើងគណនាអាំងតេក្រាលដោយផ្នែក។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{x^5+1}{x^3-3x^2-10x} dx$

សម្រួលកន្សោមពិជគណិត ឬជំនួស ដូចនេះ ជំហានទី1 និងជំហានទី2 មិនបានប្រើប្រាស់នៅកន្លែងនេះទេ។ ចំពោះអនុគមន៍ សនិទានគឺយើងអនុវត្តន៍ដូចក្នុងផ្នែក 7.4។

ឧទាហរណ៍៖

គណនាអាំងតេក្រាល $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

ចំពោះឧទាហរណ៍ ជំហានទី2 ត្រូវបានយកមកអនុវត្តន៍ ដោយប្រើវិធីជំនួស $u = \ln x$ ព្រោះយើងពិនិត្យឃើញថា $du = \frac{dx}{x}$ ។

ឧទាហរណ៍៖

គននាអាំងតេក្រាល $\int \sqrt{\frac{1-x}{(1+x)}}\ dx$

យើងបម្លែងអាំងតេក្រាល ជាទម្រង់សនិទានដោយតាង

$$u = \frac{1-x}{1+x}$$

តាម (ii) ក្នុងជំហាន 3d នោះយើងទទួលបានទម្រង់សនិទាន ដែលពិបាក។ ដូចនេះយើងប្តូរវិធី ដោយការរៀបចំទម្រង់ពិជគណិត (ក្នុងជំហាន១ និង៤ នៃ4c) ។ យើងធ្វើការបម្លែងដោយ គុណភាគយក និងភាគបែងនឹង $\sqrt{1-x}$ គេបាន

$$\begin{aligned} \int \frac{1-x}{1+x} dx \quad &= \int \frac{1-x}{\sqrt{\text{den}\, 1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

តើយើងសុទ្ធតែអាចគណនាអាំងតេក្រាលអនុគមន៍ជាប់ទាំងអស់មែនទេ ?

ឧទាហរណ៍៖ តើយើងអាចគណនាអាំងតេក្រាល $\int e^{x^2} dx$ បានទេ ? ចម្លើយគឺ មិនអាចទេ ព្រោះ វាមានទម្រង់ពិបាកក្នុងការកំណត់ព្រីមីទីវ។ អនុគមន៍ដែលយើងលើកមកសិក្សានៅទីនេះ គឺជាអនុគមន៍ងាយ (Elementary Function) ។ អនុគមន៍ទាំងនេះរួមមាន អនុគមន៍ពហុជា អនុគមន៍សនិទាន អនុគមន៍ស្វ័យគុណ(x^a) អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល(a^x) អនុគមន៍លោការីត អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ និង ចម្រាស់ត្រីកោណមាត្រ អនុគមន៍អ៊ីពែបូលិក និងចម្រាស់អ៊ីពែបូលិក និងអនុគមន៍ទាំងឡាយណាដែលផ្ទុក អនុគមន៍នេះជាមួយប្រមាណវិធីទាំងប្រាំ បូក ដក គុណ ចែក និងបណ្តាក់។

ឧទាហរណ៍៖

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x-1}} + ln(\, cosh\, x) - xe^{\sin 2x}$$

គឺជាអនុគមន៍ងាយ។

បើ f ជាអនុគមន៍ងាយ នោះគេបាន f' ជាអនុគមន៍ងាយ តែ បើ $\int f(x)dx$ មិនចាំបាច់ជាអនុគមន៍ងាយទេ។ ពិនិត្យ $f(x) = e^{x^2}$ ជាអនុគមន៍ជាប់ នោះវាមានអាំងតេក្រាល ។ យើងយក F កំណត់ដោយ

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

តាម ទ្រឹស្តីបទមូលដ្ឋានគ្រឹះគណនា (Fundamental Theorem of Calculus) គេបាន

$$F'(x) = e^{x^2}$$

ដូចនេះគេថា $f(x) = e^{x^2}$ មានព្រីមីទីវ F តែ F មិនមែនជាអនុគមន៍ងាយទេ ។

លំហាត់

[1-30]. គណនាអាំងតេក្រាលខាងក្រោម៖

1 $\int \cos x(1+\sin^2 x)dx$

2 $\int_0^1 (3x+1)^{\sqrt{2}}dx$

3 $\int \frac{\sin x + \sec x}{\tan x}dx$

4 $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

5 $\int \frac{t}{t^4+2}dt$

6 $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^2}dx$

7 $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}dy$

8 $\int t\sin t\cos t\,dt$

9 $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$

10 $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}dx$

11 $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx$

12 $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}dx$

13 $\int \sin^5 t\cos^4 t\,dt$

14 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

15 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

16 $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

17 $\int_0^{\pi} t\cos^2 t\,dt$

18 $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

19 $\int e^{x+e^x} dx$

20 $\int e^2 dx$

21 $\int \arctan\sqrt{x} dx$

22 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}} dx$

23 $\int_0^1 (1+\sqrt{x}) dx$

24 $\int_0^4 \frac{6z+5}{2z+1} dz$

25 $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8} dx$

26 $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8} dx$

27 $\int \frac{dx}{1+e^x}$

28 $\int \sin\sqrt{at} dt$

29 $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) dx$

30 $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

មេរៀនទី ៤ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់១

1. សញ្ញាណនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1

ឧទាហរណ៍: គេមានអនុគមន៍ $y = cx - 3$ កំណត់លើ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត c ។

គណនាដេរីវេទី 1 y' រួចសរសេរទំនាក់ទំនងរវាង y និង y' ។

- គណនាដេរីវេទី 1 y'

  $y = cx - 3$ នោះ $y' = c$

- សរសេរទំនាក់ទំនងរវាង y និង y'

  គេបាន $y = xy' - 3$

$$y + 3 = xy'$$

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{3}{x} \text{ ឬ } y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{x}$$

សមីការ $y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{x}$ ហៅថាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលមានអនុគមន៍ $y = cx - 3$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលនេះ ។

និយមន័យ

- **សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី1 ជាទំនាក់ទំនងរវាងអនុគមន៍ដេរីវេទី1 របស់អនុគមន៍ចំនួនថេរ និងអថេរ ។**
- **ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី1 ជាអនុគមន៍មួយដែលអនុគមន៍នេះ និងដេរីវេរបស់វាផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ។**
- **លំដាប់នៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល គឺជាលំដាប់នៃដេរីវេខ្ពស់ជាងគេក្នុងសមីការ ។**

សម្គាល់៖ អនុគមន៍ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានច្រើនរាប់មិនអស់ ។ គ្រប់ខ្សែកោងដែលតាងចម្លើយនីមួយៗនៃសមីការបង្កើតបានជា **គ្រួសារខ្សែកោង** ។

លំហាត់គំរូ: គេមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ កំណត់លើ $\mathbb{R}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត k ។

សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលមាន $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ ។

ដំណោះស្រាយ

យើងមាន $y = ke^{-3x}$ នាំឱ្យ $y' = -3ke^{-3x} = -3y$

ដូចនេះ $y' - 3y = 0$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលមានអនុគមន៍ $y = ke^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅ ។

2. វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

2.1. សមីការទម្រង់ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ឬ $y' = f(x)$

របៀបដោះស្រាយ

១. សរសេរ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ជា $dy = f(x)dx$

២. រកអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int dy = \int f(x)dx$ ឬ $y = \int f(x)dx + c$, c ជាចំនួនថេរ

៣. $y = \int f(x)dx + c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $\frac{dy}{dx} = f(x)$

៤. រកចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(x_0) = y_0$ គឺយក x_0 និង y_0 ទៅជំនួសក្នុងចម្លើយ

ទូទៅ រួចទាញយក $c = y_0 - F(x_0)$

$y = \int f(x)dx + y_0 - F(x_0)$ **ជាចម្លើយពិសេសតាមលក្ខខណ្ឌ** $y(x_0) = y_0$ **។**

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

ខ. $y' = 6x^2 + 4x + 5$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \ln\left(x^2+1\right) + c \ ,\left(c \in \mathbb{R}\right)$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = \ln\left(x^2+1\right) + c$

ដែល c ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

ខ. $y' = 6x^2 + 4x + 5 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 6x^2 + 4x + 5$

$$\Rightarrow dy = \left(6x^2 + 4x + 5\right) dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \left(6x^2 + 4x + 5\right) dx$$

$$\Rightarrow y = 2x^3 + 2x^2 + 5x + c \ ,\left(c \in \mathbb{R}\right)$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = 2x^3 + 2x^2 + 5x + c$

ដែល c ជាចំនួនថេរមួយណាក៏បាន ។

លំហាត់គំរូទី២: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}=6x^2+4x+5$

ខ. $y^{'}=xe^{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y^{'}=6x^2+4x+5$

$$y^{'}=6x^2+4x+5 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=6x^2+4x+5$$

$$\Rightarrow dy=\left(6x^2+4x+5\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int dy=\int\left(6x^2+4x+5\right)dx$$

$$\Rightarrow y=2x^3+2x^2+5x+c$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ គឺ $y=2x^3+2x^2+5x+c \;\; ,c\in\mathbb{R}$ ។

ខ. $y^{'}=xe^{x^2}$

$$y=xe^{x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{x^2}$$

$$\Rightarrow dy=\left(xe^{x^2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int dy=\int\left(xe^{x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ គឺ $y=\frac{1}{2}e^{x^2}+c, c\in\mathbb{R}$ ។

2.2 សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1ដែលអាចញែកអថេរបាន

(សមីការរាង $g\left(y\right)\frac{dy}{dx}=f\left(x\right)$)

ក. និយមន័យ

និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចញែកអថេរបាន ជាសមីការដែលក្រោយពីសម្រួលរួចមានទម្រង់ទូទៅៈ $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ ។

ខ. របៀបដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល មានទម្រង់ $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$

របៀបដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1 ដែលអាចញែកអថេរបាន គេត្រូវៈ

- សរសេរសមីការឲ្យទៅជារាង $g(y)\dfrac{dy}{dx}=f(x)$
- ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ ធៀបនឹងអថេរ x :

$\int g(y)dy=\int f(x)dx \Rightarrow G(x)=F(x)+c$, $(c\in\Re)$ ដែល $G(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $g(x)$ និង $F(x)$ ជាព្រីមីទីវនៃអនុគមន៍ $f(x)$ ។

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $(x+1)dy-ydx=0$ ខ. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x(y+1)}{y}$

គ. $y'=4y$ ឃ. $(y-2)y'=1-x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $(x+1)dy-ydx=0$

យើងបាន $(x+1)dy=ydx$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)dy}{y} = dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + c$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln|x+1|+c}$$

$$\Leftrightarrow |y| = |x+1|.e^{c}$$

$$\Leftrightarrow y = A(x+1), A = \pm e^{c}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y = A(x+1)$, A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ខ. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1)}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1)}{y} \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}\,\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y+1-1}{y+1}\right)dy = 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = 2xdx$$

$$\Leftrightarrow \int\left(1 - \frac{1}{y+1}\right)dy = \int 2xdx$$

$$\Leftrightarrow y - \ln|y+1| = x^2 + c \ , \ (c \in \mathbb{R})$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y - \ln|y+1| = x^2 + c$, $(c \in \mathbb{R})$ ។

គ. $y' = 4y$

$$y' = 4y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 4dx$$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 4dx$

$\Leftrightarrow \ln(y) = 4x + c \Rightarrow y = e^{4x+c} = e^c.e^{4x} = ke^{4x}, k = e^c$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ

ដែល $k \in \mathbb{R}$

ឃ. $(y-2)y' = 1-x$

$(y-2)y' = 1-x \Leftrightarrow (y-2)\frac{dy}{dx} = 1-x$

$\Rightarrow (y-2)dy = (1-x)dx$

$\Leftrightarrow \int (y-2)dy = \int (1-x)dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - 2y = x - \frac{1}{2}x^2 + c$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y - 2x = c \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = k$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយគឺ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = k, k \in \mathbb{R}$

លំហាត់គំរូទី២: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើមដូចខាងក្រោម៖

ក. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \quad , y(2) = 0$

ខ. $\frac{dy}{dx} = xy \quad , y(0) = 1$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} \quad , y(2) = 0$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x+y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x}.e^{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{e^{y}} = e^{x}dx$$

$$\Leftrightarrow e^{-y}dy = e^{x}dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-y}\,dy = \int e^{x}dx$$

$$\Leftrightarrow -e^{-y} = e^{x}+c \ ,\ (c\in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow e^{x}+e^{-y}=c \ ,(c\in \mathbb{R})$$

ដោយ $y(2)=0$ យើងបាន

$$e^{x}+e^{-y} = c \Leftrightarrow e^{2}+e^{0} = c \Rightarrow c = e^{2}+1$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការតាមតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(2)=0$ គឺ $e^{x}+e^{-y}=e^{2}+1$ ។

ខ. $\frac{dy}{dx}=xy \qquad , y(0)=1$

$$\frac{dy}{dx}=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=xdx$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int xdx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=\frac{x^2}{2}+c$$

$$\Leftrightarrow |y|=e^{\frac{x^2}{2}+c}=e^{c}.e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y=\pm e^{c}.e^{\frac{x^2}{2}}$$

យក $\pm e^{c}=A, A$ ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

យើងបាន $y=Ae^{\frac{x^2}{2}}$

ដោយ $y(0)=1$ យើងបាន $Ae^{0}=1 \Rightarrow A=1$

ដូចនេះ ចម្លើយសមីការតាមលក្ខខណ្ឌដើម $y(0)=1$ គឺ $y=e^{\frac{x^2}{2}}$ ។

2.3 សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែ លំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី២ ស្មើនឹងសូន្យ) ($y^{'}+ay=0$)

ក.និយមន័យ

និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែលំដាប់ទី 1 មេគុណថេរអូម៉ូសែន (អង្គទី២ ស្មើសូន្យ) ជាសមីការដែលមានរាងទូទៅ $y^{'}+ay=0$ (a ជាចំនួនថេរ) ។

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-ax}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ខ. របៀបដោះស្រាយសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន $y^{'}+ay=0$

ឧទាហរណ៍: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}+ay=0$

គេសរសេរសមីការឲ្យទៅជារាង $\frac{dy}{dx}=-ay$ តាមវិធីញែកអថេរ គេបាន $\frac{dy}{y}=-a\,dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx \Leftrightarrow \ln|y|=-ax+c$$

$$\Leftrightarrow \quad |y|=e^{-ax+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad y=\pm e^{c}.e^{-ax}$$

យក $A=\pm e^{c}\Rightarrow y=Ae^{-ax}$, A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែអូម៉ូសែន គឺ $y=Ae^{-ax}$

A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ខ. $y^{'}-ay=0$

គេសរសេរសមីការឲ្យទៅជារាង $\frac{dy}{dx} = ay$ តាមវិធីញែកអថេរ គេបាន $\frac{dy}{y} = a\,dx$

ធ្វើអាំងតេក្រាលលើអង្គទាំងពីរ $\int \frac{dy}{y} = a\int dx$

$$\int \frac{dy}{y} = a\int dx \Leftrightarrow \ln|y| = ax + c$$

$$\Leftrightarrow \quad |y| = e^{ax+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm e^{c}.e^{ax}$$

យក $A = \pm e^{c} \Rightarrow y = Ae^{ax}$, A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការលីនេអ៊ែរអូម៉ូសែន $y = Ae^{ax}$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ជាទូទៅ

សមីការ $ay' + by = 0$

មានសមីការសម្គាល់ $ar + b = 0 \Rightarrow r = -\frac{b}{a}$

នោះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay' + by = 0$ **គឺ** $y = Ae^{-\frac{b}{a}x}$ **,** A **ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន**

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 2y = 0$

ខ. $y' + 2y = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y' - 2y = 0$

ដោយ $a = -2$ គេបាន

$$\Rightarrow y = Ae^{2x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = Ae^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

ខ. $y' + 2y = 0$

ដោយ $a = 2$ គេបាន

$$\Rightarrow y = A.e^{-2x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទៅទៅនៃសមីការគឺ $y = Ae^{-2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន ។

លំហាត់គំរូទី២: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលតាមលក្ខខណ្ឌដើម៖

ក. $-3y' + 12y = 0, y(1) = 2$

ខ. $2y' + y = 0, y(\ln 4) = \dfrac{1}{2}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $-3y' + 12y = 0, y(1) = 2$

$$\Leftrightarrow y' - 4y = 0$$

$\Rightarrow y = Ae^{4x}$, A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដោយ $y(1) = 2$ យើងបាន $Ae^{4} = 2 \Rightarrow A = 2e^{-4}$

យើងបាន $y = 2e^{-4} \times e^{4x} = 2e^{4x-4}$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការតានលក្ខខណ្ឌ $y(1) = 2$ គឺ $y = 2e^{4x-4}$ ។

ខ. $2y' + y = 0, y(\ln 4) = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow y' + \frac{1}{2}y = 0$$

$\Rightarrow y = Ae^{-\frac{1}{2}x}$, A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដោយ $y(\ln 4)=\frac{1}{2}$ យើងបាន $Ae^{\frac{1}{2}\times\ln 4}=\frac{1}{2}$

$$Ae^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$A\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=1$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការតាមលក្ខខណ្ឌ $y(\ln 4)=\frac{1}{2}$ គឺ $y=e^{-\frac{1}{2}x}$ ។

2.4 សមីការពិត (សមីការប្រាកដ) -សមីការមិនពិត (សមីការមិនប្រាកដ)

(Exact and Non exact equation)

ក. សមីការពិត (Exact equation)

និយមន័យ

១. កន្សោមឌីផេរ៉ង់ស្យែល $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ ក្នុងតំបន់ R នៃប្លង់ (x,y) បើវាអាស្រ័យនឹងឌីផេរ៉ង់ស្យែលសរុបនៃអនុគមន៍ $f(x,y)$ ណាមួយ ។

២. សមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ហៅថា សមីការពិត បើកន្សោមនៅអង្គខាងឆ្វេងមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលពិត ។

ឧទាហរណ៍: សមីការ $x^3y^8dx+2x^3y^7dy=0$ ជាសមីការពិត ព្រោះ

$$d\left(\frac{1}{4}x^4y^8\right)=x^3y^8dx+2x^3y^7dy$$ ។

ទ្រឹស្តីបទ

គេឱ្យ $M(x,y)$ និង $N(x,y)$ ជាប់ និងមានដេរីវេដោយផ្នែកលំដាប់មួយជាប់នៅក្នុងតំបន់ R នៃប្លង់ ។ គេបានលក្ខខណ្ឌចាំបាច់ និងលក្ខខណ្ឌគ្រប់គ្រាន់ ដែល $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ក្លាយជាសមីការពិតគឺ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ។

លំហាត់គំរូ: បង្ហាញថាសមីការ $(2x^3-xy^2-2y+3)dx-(x^2y+2x)dy=0$ ជាសមីការប្រាកដ ។

ដំណោះស្រាយ

គេមានសមីការ $(2x^3-xy^2-2y+3)dx(x^2y+2x)dy=0$

ដោយ $\frac{\partial M}{\partial y}=-2xy-2$ និង $\frac{\partial N}{\partial x}=-2xy-2$

គេបាន $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-2xy-2$

នោះសមីការ $(2x^3-xy^2-2y+3)dx-(x^2y+2x)dy=0$ ជាសមីការពិត

ដូចនេះ $(2x^3-xy^2-2y+3)dx-(x^2y+2x)dy=0$ ជាសមីការពិត ។

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

បើគេមានសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (i) ជាសមីការពិត ។

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវអនុវត្តតាមវិធីដូចខាងក្រោម៖

- ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាសមីការ (i) ជាសមីការពិតគឺ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$
- សន្មតថា $M(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ឬ $N(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
- ទាញរក $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ ឬ $f(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)$ ដែល $g(y)$ ឬ $h(x)$ ជាថេរនៃអាំងតេក្រាល

- **ធ្វើដេរីវេនៃកន្សោម** $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ **ធៀបនឹង** y **រួចទាញរកកន្សោម** $g(y)$ **មានន័យថា** $\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)dx+g(y)\right)\Rightarrow g(y)=\ldots\right)$ **។**

ឬ ធ្វើដេរីវេនៃកន្សោម $f(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)$ **ធៀបនឹង** x **រួចទាញរកកន្សោម** $h(x)$ **មានន័យថា** $\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\int N(x,y)dx+h(x)\right)\Rightarrow h(x)=\ldots\right)$ **។**

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $\left(\cos x\sin x-xy^2\right)dx+y\left(1-x^2\right)dy=0; y(0)=2$

ខ. $y(y-1)dx+x(2y-1)dy=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\left(\cos x\sin x-xy^2\right)dx+y\left(1-x^2\right)dy=0; y(0)=2$

ដោយ $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-2xy$ និង $\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2xy$

គេបាន $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=-2xy$ នោះសមីការជាសមីការពិត

យក $M(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ គេបាន

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int\left(\cos x\sin x-xy^2\right)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int(\cos x\sin x)dx-\int xy^2dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}x^2y^2+g(y)$$

នោះ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-x^2y+g'(y)$ តែ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=y\left(1-x^2\right)=y-x^2y$

គេបាន $g^{'}(y)=y\Rightarrow g(y)=\frac{1}{2}y^2+c$

គេបាន $\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}y^2+c=0\Rightarrow \sin^2 x-y^2(x^2-1)+k=0;k=2c$

តែ $y(0)=2$ គេបាន $0+4+k=0\Rightarrow k=-4$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $\sin^2 x-y^2(x^2-1)=4$ ។

ខ. $y(y-1)dx+x(2y-1)dy=0$

ដោយ $\frac{\partial M}{\partial y}=2y-1$ និង $\frac{\partial N}{\partial x}=2y-1$

គេបាន $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2y-1$ នោះសមីការជាសមីការពិត

យក $N(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ គេបាន

$$f(x,y)=\int N(x,y)dy+h(x)$$

$$f(x,y)=\int x(2y-1)dx+h(x)$$

$$f(x,y)=x(y^2-y)+h(x)$$

នោះ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=y^2-y+h^{'}(x)$ តែ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)=y(y-1)=y^2-y$

គេបាន $h^{'}(x)=0\Rightarrow h(x)=c$

គេបាន $x(y^2-y)+c=0$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការគឺ $x(y^2-y)+c=0$ ។

ខ. សមីកាមិនពិត (Non exact equation)

ក្នុងករណីដែលសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (i) មាន $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ នោះសមីការ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ជា **សមីការមិនពិត** ។

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

ក្នុងករណីនេះគេត្រូវតាងរកអនុគមន៍ $\mu(x)$ ដែលគុណនឹងសមីការ (i) ឱ្យក្លាយជាសមីការពិត ។ គេបាន៖

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y}=\frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+M(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}=\mu(x,y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}\quad(ii)$$

ដោយហេតុថាសមីការ (ii) មានអថេរអាស្រ័យច្រើនជាងមួយ (គឺ x និង y) នោះវានចូលរាងសមីការមួយទៀតដែលហៅថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក (Partial differential equation)។ យើងសិក្សាពីករណីដូចខាងក្រោម៖

- ករណីទី១: អនុគមន៍ (មានតែ x សុទ្ធ)

  យើងបានសមីការ (ii) ទៅជា

$$\mu(x)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\mu(x)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}$$

$$\mu(x)\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]=N(x,y)\frac{\partial\mu(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)}=\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$$

មានន័យថាកន្សោម $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ ជាអនុគមន៍នៃ x តែមួយគត់

គេបាន $\int \frac{\partial \mu}{\mu} = \int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx$

$$\ln|\mu| = \int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx$$

គេបាន $\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx}$

ដែល $\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right) dx}$ ហៅថា កត្តាអាំងតេក្រាល (Integrating Factor)

- ករណីទី២: អនុគមន៍ (មានតែ y សុទ្ធ)

នោះសមីការ (ii) ទៅជា $\mu(y)\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + M(x,y)\frac{\partial \mu(y)}{\partial y} = \mu(y)\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

ធ្វើតាមលំនាំខាងលើកត្តាអាំងតេក្រាល គឺ $\mu(x) = e^{\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \right) dy}$ ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $\left(4xy + 3y^2 - x\right)dx + x\left(x + 2y\right)dy = 0$

ខ. $y\left(x + y + 1\right)dx + x\left(x + 3y + 2\right)dy = 0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\left(4xy + 3y^2 - x\right)dx + x\left(x + 2y\right)dy = 0 \quad (i)$

គេមាន $\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$ នោះ $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ជាសមីការមិនពិត

ដោយ $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{4x+6y-2x-2y}{x\left(x+2\right)}=\dfrac{2\left(x+2y\right)}{x\left(x+2y\right)}=\dfrac{2}{x}$

គេបាន $\mu(x)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=x^2$

គុណសមីការ (i) និង $\mu(x)$ គេបាន

$$x^2\left(4xy+3y^2-x\right)dx+x^3\left(x+2y\right)dy=0$$

$$\left(4x^3y+3x^2y^2-x^3\right)dx+\left(x^4+2x^3y\right)dy=0\quad(ii)$$

គេបាន $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=4x^3+6x^2y$ នោះសមីការ (ii) ជាសមីការពិត

យក $M\left(x,y\right)=\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}$ គេបាន

$$f(x,y)=\int M\left(x,y\right)dx+g\left(y\right)$$

$$f(x,y)=\int\left(4x^3y+3x^2y^2-x^3\right)dx+g\left(y\right)$$

$$f(x,y)=x^4y+x^3y^2-\frac{1}{4}x^4+g\left(y\right)$$

នោះ $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=x^4+2x^3y+g^{'}\left(y\right)$ តែ $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=N\left(x,y\right)=x^4+2x^3y$

គេបាន $g^{'}\left(y\right)=0\Rightarrow g\left(y\right)=c$

នោះ $x^4y+x^3y^2-\dfrac{1}{4}x^4+c=0\Leftrightarrow x^3\left(4xy+4y^2-x\right)=k;k=-4c$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x^3\left(4xy+4y^2-x\right)=k$ ។

ខ. $y\left(x+y+1\right)dx+x\left(x+3y+2\right)dy=0\quad(i)$

គេមាន $\dfrac{\partial M}{\partial y}=x+2y+1;\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x+3y+2$ នោះ $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ជាសមីការមិនពិត

ដោយ $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\dfrac{2x+3y+2-x-2y-1}{y(x+y+1)}=\dfrac{x+y+1}{y(x+y+1)}=\dfrac{1}{y}$

គេបាន $\mu(x)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{y}dx}=e^{\ln|y|}=y$

គុណសមីការ (i) និង $\mu(x)$ គេបាន

$\left(xy^2+y^3+y^2\right)dx+\left(x^2y+3xy^2+2xy\right)dy=0 \quad (ii)$

គេបាន $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=2xy+3y^2+2y$ នោះសមីការ (ii) ជាសមីការពិត

យក $M(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ គេបាន

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int\left(xy^2+y^3+y^2\right)dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3+xy^2+g(y)$$

នោះ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2y+3xy^2+2xy+g^{'}(y)$

តែ $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=x^2y+3xy^2+2xy$

គេបាន $g^{'}(y)=0\Rightarrow g(y)=c$

នោះ $\dfrac{1}{2}x^2y^2+xy^3+xy^2+c=0\Leftrightarrow xy^2(x+2y+2)=k;k=-2c$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $xy^2(x+2y+2)=k$ ។

2.5 សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល លីនេអ៊ែលំដាប់ទី១ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

(អង្គទី2 ខុសពីសូន្យ) ($ay^{'}+by=P(x),P(x)\neq 0$)

ក .ដោះស្រាយសមីការ $ay'+by=p(x)$ តាមវិធីសាស្ត្រមេគុណមិនកំណត់

របៀបដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $ay'+by=p(x)$ គេត្រូវ៖

- **រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay'+by=0$ តាងដោយ y_c**
- **រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay'+by=p(x)$ តាងដោយ y_p**
- **ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay'+by=p(x)$ កំណត់ដោយ $y=y_c+y_p$**

✍ របៀបរកចម្លើយពិសេស $(\mathbf{y_p})$ នៃសមីការ: $ay'+by=p(x)$

សមីការ $ay'+by=0$ មានសមីការសម្គាល់ $ar+b=0\Rightarrow r=-\frac{b}{a}$

1. ករណី $P(x)$ មានទម្រង់ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី n

$$(P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0)$$

- បើ $r\neq 0$ តាង $y_p=Q(x)$ ដែល $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដឺក្រេដូច $P(x)$
- បើ $r=0$ តាង $y_p=x.Q(x)$ ដែល $Q(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាមានដឺក្រេដូច $P(x)$

Ex: សមីការ $2y'-3y=x^2+1$ តាង $y_p=ax^2+bx+c$

Ex: សមីការ $y'+y=x^4+x+1$ តាង $y_p=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Ex: សមីការ $y'+2y=2$ តាង $y_p=ax$

ចំណាំ: បើ $ay'=p(x)\Rightarrow y'=\frac{1}{a}\int p(x)dx$

2. ករណី $p(x)=f(x).e^{ax}$ ដែល $f(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី n

- បើ $r\neq\alpha$ តាង $y_p=g(x).e^{\alpha x}$ ដែល $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេដូច $f(x)$
- បើ $r=\alpha$ តាង $y_p=x.g(x).e^{\alpha x}$ ដែល $g(x)$ ជាអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេដូច $f(x)$

Ex: សមីការ $y'+3y=e^x$ តាង $y_p=Ae^x$

Ex: សមីការ $y'+3y=e^{-3x}$ តាង $y_p=Axe^{-3x}$

Ex: សមីការ $y'-3y=x^2e^{3x}$ តាង $y_p=x(ax^2+bx+c)e^{3x}$

៣. ករណី $p(x)$ មានទម្រង់ $k\cos\beta x$ ឬ $k\sin\beta x$ ឬ $k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x$

តាង $y_p=A\cos\beta x+B\sin\beta x$

Ex: $y'+2y=\sin 2x$ តាង $y_p=A\cos 2x+B\sin 2x$

Ex: $y'-y=\cos x$ តាង $y_p=A\cos x+B\sin x$

Ex: $y'-2y=2\cos 3x-4\sin 3x$ តាង $y_p=A\cos 3x+B\sin 3x$

៤. ករណី $p(x)$ មានទម្រង់ $ke^{\alpha x}\cos\beta x$ ឬ $ke^{\alpha x}\sin\beta x$ ឬ $e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x+k_2\sin\beta x)$

តាង $y_p=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

Ex: $y'+2y=e^{2x}\cos x$ តាង $y_p=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$

Ex: $y'-3y=e^{x}(2\cos 3x+\sin 3x)$ តាង $y_p=e^{x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$

Ex: $2y'+y=4e^{-2x}\sin x$ តាង $y_p=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

៥. បើ $ay'+by=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+...+f_n(x)$ (*)

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay'+by=f_1(x)$ តាងដោយ y_{p_1}
- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay'+by=f_2(x)$ តាងដោយ y_{p_2}
- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay'+by=f_3(x)$ តាងដោយ y_{p_3}

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay'+by=f_n(x)$ តាងដោយ y_{p_n}

$\Rightarrow$ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (*) កំណត់ដោយ:

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}+...+y_{p_n}$$

Ex: សមីការ $y'+y=e^x+\cos x+x+1$

$f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=\cos x,\ f_3(x)=x+1$

តាង $y_{p_1}=ke^x$ ដែល y_{p_1} ជាចម្លើយពិសេសនៃ $y'+y=e^x$

តាង $y_{p_2}=A\cos x+B\sin x$ ដែល y_{p_2} ជាចម្លើយពិសេសនៃ $y'+y=\cos x$

តាង $y_{p_3}=ax+b$ ដែល y_{p_3} ជាចម្លើយពិសេសនៃ $y'+y=x+1$

នោះចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'+y=e^x+\cos x+x+1$ គឺ $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

ក. $2y'-3y=x^2+1$ ខ. $y'-2y=e^x$

គ. $3y'-6y=x^2e^{2x}$ ឃ. $2y'+y=2\sin x$

ង. $y'-2y=e^{2x}\cos x$ ច. $y'-y=2e^{2x}+3\cos 2x+x+1$

ដំណោះស្រាយ

ក. $2y'-3y=x^2+1$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y'-3y=0$

$y'-\dfrac{3}{2}y=0\Rightarrow y_c=Ae^{\frac{3}{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $2y'-3y=x^2+1$

តាង $y_p=ax^2+bx+c\Rightarrow y'_p=2ax+b$

y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-2y=e^x$

កាលណា $2y'_p-3y_p=x^2+1$

$\Leftrightarrow 2(2ax+b)-3(ax^2+bx+c)=x^2+1$

$\Leftrightarrow 4ax+2b-3ax^2-3bx-3c=x^2+1$

$\Leftrightarrow (4a-3b)x-3ax^2+2b-3c=x^2+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a-3b=0 \\ -3a=1 \\ 2b-3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{4}{9} \\ c=-\frac{8}{27} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{8}{27}$$

យើងបាន $y=y_c+y_p=Ae^{\frac{3}{2}x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{8}{27}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=Ae^{\frac{3}{2}x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x-\frac{8}{27}$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ខ. $y^{'}-2y=e^x$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y^{'}-2y=0$

$y^{'}-2y=0 \Rightarrow y_c=Ae^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y^{'}-2y=e^x$

តាង $y_p=ke^x \Rightarrow y_p^{'}=ke^x$

y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y^{'}-2y=e^x$

កាលណា $y_p^{'}-2y_p=e^x$

$$\Leftrightarrow ke^x-2ke^x=e^x$$
$$\Leftrightarrow -ke^x=e^x$$
$$\Rightarrow k=-1$$

នោះ $y_p=e^{-x}$

យើងបាន $y=y_c+y_p=Ae^{2x}-e^x$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=Ae^{2x}-e^x$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

គ. $3y' - 6y = x^2 e^{2x}$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $3y' - 6y = 0$

$$\Leftrightarrow y' - 2y = 0$$

$\Rightarrow y_c = Ae^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $3y' - 6y = x^2 e^{2x}$

តាង $y_p = x(ax^2 + bx + c)e^{2x}$

$$\Rightarrow y'_p = (xe^{2x})'(ax^2 + bx + c) + (ax^2 + bx + c)'(xe^{2x})$$

$$\Leftrightarrow y'_p = x^2 e^{2x}(3a + 2b) + 2ax^3 e^{2x} + (2b + 2c)xe^{2x} + ce^{2x}$$

y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $3y' - 6y = x^2 e^{2x}$

កាលណា $3y'_p - 6y_p = x^2 e^{2x}$

$$\Leftrightarrow 3\left[x^2 e^{2x}(3a + 2b) + 2ax^3 e^{2x} + (2b + 2c)xe^{2x} + ce^{2x}\right] - 6\left[x(ax^2 + bx + c)e^{2x}\right] = x^2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 e^{2x}(9a + 6b) + 6ax^3 e^{2x} + (6b + 6c)xe^{2x} + 3\mathrm{c}e^{2x} - xe^{2x}(6ax^2 + 6bx + 6c) = x^2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 e^{2x}(9a + 6b) + 6ax^3 e^{2x} + (-6ax^2 - 6bx + 6b)xe^{2x} + 3\mathrm{c}e^{2x} = x^2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 9ax^2 e^{2x} + 6bxe^{2x} + 3ce^{2x} = x^2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 1 \\ 6b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{9} \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = x(\frac{1}{9}x^2)e^{2x}$$

យើងបាន $y = y_c + y_p = Ae^{2x} + \dfrac{1}{9}x^3 e^{2x}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{2x} + \dfrac{1}{9}x^3 e^{2x}$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ឃ. $2y'+y=2\sin x$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y'+y=0$

$$\Leftrightarrow y'+\frac{1}{2}y=0$$

$\Rightarrow y_c=Ae^{-\frac{1}{2}x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $2y'+y=2\sin x$

តាង $y_p=a\cos x+b\sin x \Rightarrow y'_p=-a\sin x+b\cos x$

y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $2y'+y=2\sin x$

កាលណា $2y'_p+y_p=2\sin x$

$\Leftrightarrow 2(-a\sin x+b\cos x)+a\cos x+b\sin x=2\sin x$

$\Leftrightarrow (2b+a)\cos x+(b-2a)\sin x=2\sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=2 \\ 2b+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{5} \\ b=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{4}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$$

យើងបាន $y=y_c+y_p=Ae^{-\frac{1}{2}x}-\frac{4}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=Ae^{-\frac{1}{2}x}-\frac{4}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ង. $y'-2y=e^{2x}\cos x$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'-2y=0$

$\Rightarrow y_c = Ae^{2x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' - 2y = e^{2x}\cos x$

តាង $y_p = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

$$\Rightarrow y'_p = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x - Ae^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x$$

y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y' - 2y = e^{2x}\cos x$

កាលណា $y'_p - 2y_p = e^{2x}\cos x$

$$\Leftrightarrow Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x - Ae^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x - 2e^{2x}(A\cos x + B\sin x) = e^{2x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x - Ae^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x - 2Ae^{2x}\cos x - 2Be^{2x}\sin x = e^{2x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}\cos x(A + B - 2A) + (B - A - 2B)e^{2x}\sin x = e^{2x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}\cos x(B - A) - e^{2x}(A + B)\sin x = e^{2x}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - A = 1 \\ -(A + B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2}\sin x\right)$$

យើងបាន $y = y_c + y_p = Ae^{2x} + e^{2x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{3}{2}\sin x\right)$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y = Ae^{2x} + e^{2x}\left(-\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{3}{2}\sin x\right)$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ច. $y' - y = 2e^{2x} + 3\cos 2x + x + 1$

$f_1(x)=2e^{2x},\ f_2(x)=3co2x,\ f_3(x)=x+1$

- រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'-y=0$

$y'-y=0 \Rightarrow y_c=Ae^{x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

- រកចម្លើយពិសេសនៃមីការ $y'-y=2e^{2x}$

តាង $y_{p_1}=ke^{2x} \Rightarrow y'_{p_1}=2ke^{2x}$ ដែល y_{p_1} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

កាលណា $y'_{p_1}-y_{p_1}=2e^{2x}$

$$\Leftrightarrow 2ke^{2x}-ke^{2x}=2e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow ke^{2x}=2e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow k=2$$

យើងបាន $y_{p_1}=2e^{2x}$

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-y=3\cos 2x$

តាង $y_{p_2}=a\cos 2x+b\sin 2x$

$\Rightarrow y'_{p_2}=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$ ដែល y_{p_2} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

កាលណា $y'_{p_2}-y_{p_2}=3\cos 2x$

$$\Leftrightarrow (-2a\sin 2x+2b\cos 2x)-(a\cos 2x+b\sin 2x)=3\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow (2b-a)\cos 2x-(2a+b)\sin 2x=3\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b-a=3 \\ -(2a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{5} \\ b=\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

យើងបាន $y_{p_2}=-\dfrac{3}{5}\cos 2x+\dfrac{6}{5}\sin 2x$

- រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y'-y=x+1$

តាង $y_{p_3}=ax+b \Rightarrow y'_{p_3}=a$ ដែល y_{p_3} ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ

កាលណា $y'_{p_3}-y_{p_3}=x+1$

$$\Leftrightarrow a - ax - b = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{p_3} = -x - 2$$

យើងបាន $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = 2e^{2x} - \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{6}{5}\sin 2x - x - 2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃមីការ គឺ $y = Ae^x + 2e^{2x} - \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{6}{5}\sin 2x - x - 2$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

លំហាត់គំរូទី២: ដោះស្រាយសមីការ $(E): y' - 2y = 8x^2 - 8x$ ។

- រកចម្លើយទូទៅនៃសសមីការ $y' - 2y = 0$

$$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = 2x + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{2x+c}$$

$$\Rightarrow y_c = Ae^{2x}, \ (A = \pm e^c)$$

- រកចម្លើយពិសេសនៃ (E)

តាង $y_p = ax^2 + bx + c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

$\Rightarrow y_p' = 2ax + b$ យកទៅជំនួសក្នុងសមីការ (E) គេបាន៖

$$(E): 2ax + b - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 8x^2 - 8x$$

$$\Leftrightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + (b - 2c) = 8x^2 - 8x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 8 \\ 2a - 2b = 8 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p = -4x^2$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = y_c + y_p = Ae^{2x} - 4x^2$

ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

លំហាត់គំរូទី៣: គេមានសមីការ $(E): y' - 3y = 3x + 2$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ g កំណត់លើ ℝ

ដោយ $g(x) = ax + b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. បើ h ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' - 3y = 0$

បង្ហាញថា $f = h + g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយ h នៃសមីការ $y' - 3y = 0$ រួចទាញរកចម្លើយទូទៅ f នៃសមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b

បើ g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះ g និង g' ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (E):

$$g(x) = ax + b \Rightarrow g'(x) = a$$

$$g'(x) - 3g(x) = 3x + 2 \Leftrightarrow a - 3ax - 3b = 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow -3ax + (a - 3b) = 3x + 2$$

គេទាញបាន $\begin{cases} -3a = 3 \\ a - 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

ដូចនេះ $g(x) = -x - 1$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថា $f = h + g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)

បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - 3y = 0$ នោះគេបាន $h' - 3h = 0$ (1)

ម្យ៉ាងទៀត g ជាចម្លើយនៃ (E) នោះគេបាន $g' - 3g = 3x + 2$ (2)

យក $(1)+(2)$ គេបាន៖

$$h^{'}+g^{'}-3h-3g=3x+2 \Leftrightarrow (h+g)^{'}-3(h+g)=3x+2$$
$$\Rightarrow f^{'}-3f=3x+2$$

ដូចនេះ $f=h+g$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y^{'}-3y=0$

$$y^{'}-3y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=3y$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=3dx$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y}=3\int dx$$
$$\Leftrightarrow \ln|y|=3x+c$$
$$\Leftrightarrow |y|=e^{3x+c}$$
$$\Rightarrow y=Ae^{3x} ,(A=\pm e^{c})$$

ដូចនេះ $h=Ae^{3x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y^{'}-3y=0$

ដោយ $f=h+g \Rightarrow f(x)=Ae^{3x}-x-1$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) ។

ខ. របៀបដោះស្រាយសមីការ $y^{'}+ay=p(x)$ តាមវិធីបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ

របៀបដោះស្រាយ

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $y^{'}+ay=p(x)(*)$ គេត្រូវ:

- **ដោះស្រាយសមីការ $y^{'}+ay=0$ បានចម្លើយទូទៅ $y=Ae^{-ax}$**
  ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន
- **ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A ទៅជាអនុគមន៍ $A(x)$**
  យើងបាន $y=A(x).e^{-ax}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $(*)$

☞ **រកអនុគមន៍** $A(x)$

$$y = A(x)e^{-ax} \Rightarrow y' = A'(x)e^{-ax} - a\,A(x)e^{-ax}$$

$y = A(x).e^{-ax}$ **ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ** $(*)$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{-ax} - a\,A(x)e^{-ax} + a\,A(x)e^{-ax} = p(x)$$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{-ax} = p(x)$$

$$\Leftrightarrow A'(x) = p(x).e^{ax}$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \int P(x).e^{ax}\,dx$$

តាង $\int P(x).e^{ax}\,dx = I(x) + c$ **នោះ** $A(x) = I(x) + C$

យើងបានចម្លើយទូទៅនៃ $(*)$ **គឺ** $y = [I(x) + C].e^{-ax}$

ឬ $y = Ce^{-ax} + I(x).e^{-ax}$ **ដែល** C **ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន** $y' + 3y = e^{x} + e^{-x}$ **។**

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y' - 4y = xe^{4x}$

ខ. $y' + 3y = e^{x} + e^{-x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y' - 4y = xe^{4x}$

$y' - 4y = 0$ គឺ $y = Ae^{4x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A ទៅជាអនុគមន៍ $A(x)$ នោះ $y = A(x)e^{4x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ

សមីការ $\quad y' - 4y = xe^{4x}$

$y' = A'(x)e^{4x} + 4A(x)e^{4x}$

នោះ $y = A(x)e^{4x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' - 4y = xe^{4x}$

កាលណា $\quad A'(x)e^{4x} + 4A(x)e^{4x} - 4A(x)e^{4x} = xe^{4x}$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{4x} = xe^{4x}$$
$$\Leftrightarrow A'(x) = x$$
$$\Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

យើងបាន $y = (\frac{x^2}{2} + c)e^{4x}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y' - 4y = xe^{4x}$ គឺ $y = (\frac{x^2}{2} + c)e^{4x}$

ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ខ. $y' + 3y = e^x + e^{-x}$

$y' + 3y = 0$ គឺ $y = Ae^{-3x}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A ទៅជាអនុគមន៍ $A(x)$ នោះ $y = A(x)e^{-3x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃ

សមីការ $y' + 3y = e^x + e^{-x}$

$y' = A'(x)e^{-3x} - 3A(x)e^{-3x}$

នោះ $y = A(x)e^{-3x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y' + 3y = e^x + e^{-x}$

កាលណា $A'(x)e^{-3x} - 3A(x)e^{-3x} + 3A(x)e^{-3x} = e^x + e^{-x}$

$$\Leftrightarrow A'(x)e^{-3x} = e^x + e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow A'(x) = e^{3x}(e^x + e^{-x}) = e^{4x} + e^{2x}$$
$$\Rightarrow A(x) = \int (e^{4x} + e^{2x})dx = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

យើងបាន $y = (\frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{2}e^{2x} + c)e^{-3x} = ce^{-3x} + \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយទូទៅ $y' + 3y = e^x + e^{-x}$ គឺ $y = ce^{-3x} + \frac{1}{4}e^x + e^{-x}$

ដែល c ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

លំហាត់គំរូទី២: គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'+2y=3e^{-3x}$ (E) ។

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+2y=0$ (E') ។

ខ. តាងអនុគមន៍ f កំណត់ដោយ $f(x)=e^{-2x}g(x)$ ។

គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។

គណនា $g'(x)$ បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

គ. ទាញរក $g(x)$ រួចរក $f(x)$ ដើម្បីឲ្យ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y'+2y=0$ (E')

យើងមាន $y'+2y=0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx}=-2y$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-2dx$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y|=-2x+c$$

$$\Leftrightarrow |y|=e^{-2x+c}$$

$$\Rightarrow y=Ae^{-2x}\ ,\ (A=\pm e^{c})$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E') គឺ $y=Ae^{-2x}$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ និង $g'(x)$

ដោយ $f(x)=e^{-2x}g(x) \Rightarrow f'(x)=\left(e^{-2x}\right)'g(x)+e^{-2x}g'(x)$

$$\Rightarrow f'(x)=-2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)$$

បើ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) នោះគេបាន៖

$$f'(x)+2f(x)=3e^{-3x} \Leftrightarrow -2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)+2e^{-2x}g(x)=3e^{-3x}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{-2x}g'(x)=3e^{-3x}$$
$$\Rightarrow \quad g'(x)=\frac{3e^{-3x}}{e^{-2x}}=3e^{-x}$$

ដូចនេះ $f'(x)=-2e^{-2x}g(x)+e^{-2x}g'(x)$ និង $g'(x)=3e^{-x}$ ។

គ.ទាញរក $g(x)$ រួចរក $f(x)$:

ដោយ

$$g'(x)=3e^{-x} \Rightarrow g(x)=\int g'(x)dx = 3\int e^{-x}dx = -3e^{-x}+c \quad ,(c\in\mathbb{R})$$

ហើយ $f(x)$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) កាលណា $g'(x)=3e^{-x}$ នោះគេបាន

$$f(x)=e^{-2x}g(x)=e^{-2x}\left(-3e^{-x}+c\right)=ce^{-2x}-3e^{-x}$$

ដូចនេះ $f(x)=ce^{-2x}-3e^{-x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

លំហាត់គំរូទី៣: គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$ (E) ។

ក. ដោះស្រាយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=1$ ។

ខ. តាង f ជាអនុគមន៍មានដេរីវេលើ $\mathbb{R}$ ដែល $f(x)=e^{2x}g(x)$ ។

គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$ ។

គ. បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ឃ.ទាញរកកន្សោម $g(x)$ រួចរក $f(x)$ ដែល f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ដោះស្រាយ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y'-2y=0$

យើងមាន $y'-2y=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=2y$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = 2dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = 2x + c$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{2x+c}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{2x}\ ,\ (A = \pm e^{c})$$

ដូចនេះ $y = Ae^{2x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y' - 2y = 0$ ។

ខ. គណនា $f'(x)$ ជាអនុគមន៍នៃ $g(x)$ និង $g'(x)$:

ដោយ $f(x) = e^{2x}g(x) \Rightarrow f'(x) = (e^{2x})'g(x) + e^{2x}g'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$$

ដូចនេះ $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$ ។

គ. បង្ហាញថាបើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

បើ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) គេបាន

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

ដូចនេះ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) លុះត្រាតែ $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ ។

ឃ. ទាញរកកន្សោម $g(x)$ និង $f(x)$:

- រក $g(x)$: ដោយ $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Rightarrow g(x)=\int g'(x)dx=\int\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}dx$

$$\Rightarrow g'(x)=\int\frac{\left(1+e^{-2x}\right)'}{1+e^{-2x}}dx=\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

ដូចនេះ $g(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$ ។

- រក $f(x)$: ដោយ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (E)

គេបាន $f(x) = e^{2x}g(x)=e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c\right]$, $c\in\mathbb{R}$

ដូចនេះ $f(x)=e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-2x}\right)+c\right]$,$c\in\mathbb{R}$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y'+ay=p(x)$ តាមវិធីរកផលគុណអាំងតេក្រាល

របៀបដោះស្រាយ

យើងមានសមីការ $y'+ay=P(x)$ **(*)**

គុណអង្គទាំងពីរនៃ (*) និង $e^{\alpha x}$ **យើងបាន**

$$y'e^{\alpha x}+ae^{\alpha x}y=p(x)e^{\alpha x}$$

ដោយ $(uv)'=u'v+v'u$ **នោះ** $y'e^{\alpha x}+ae^{\alpha x}y=(ye^{\alpha x})'$

យើងបានសមីការទៅជា $(ye^{\alpha x})'=p(x)e^{\alpha x}$

$$\Leftrightarrow \int p(x)e^{\alpha x}dx=\int (ye^{\alpha x})'dx$$

$$\Leftrightarrow ye^{\alpha x}=\int p(x)e^{\alpha x}dx$$

តាង $\int P(x)e^{\alpha x}dx=I(x)+c$,c **ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន**

យើងបាន $ye^{\alpha x}=I(x)+c$

$$\Rightarrow y=\left[I(x)+c\right]e^{-\alpha x}=ce^{-\alpha x}+I(x)e^{-\alpha x}$$

លំហាត់គំរូទី១: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម

ក. $y'-3y=3x+2$

ខ. $y'+y=(3x^2+6x+2)e^x$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y'-3y=3x+2 \qquad (i)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (i) នឹង e^{-3x}

គេបាន $y'e^{-3x}-3e^{-3x}y=(3x+2)e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow (ye^{-3x})'=(3x+2)e^{-3x}$$

$$\Leftrightarrow ye^{-3x}=\int(3x+2)e^{-3x}dx$$

រក $\int(3x+2)e^{-3x}dx$

ដេរីវេ	អាំងតេក្រាល
	e^{-3x}
$3x+2$	$-\frac{1}{3}e^{-3x}$
-3	$\frac{1}{9}e^{-3x}$
$+0$	$-\frac{1}{27}e^{-3x}$

$$\Rightarrow \int(3x+2)e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}(3x+2)-\frac{1}{3}e^{-3x}+c=(-x-1)e^{-3x}+c$$

$$\Rightarrow y=-x-1+ce^{3x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=-x-1+ce^{3x}$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ។

ខ. $y'+y=(3x^2+6x+2)e^x \quad (i)$

គុណអង្គទាំងពីរនៃសមីការ (i) នឹង e^x

គេបាន $y'e^x+ye^x=(3x^2+6x+2)e^{2x}$

$$\Leftrightarrow (ye^x)'=(3x^2+6x+2)e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow ye^x=\int(3x^2+6x+2)e^{2x}dx$$

រក $\int(3x^2+6x+2)e^{2x}dx$

ដេរីវេ	អាំងតេក្រាល
$+3x^2+6x+2$	e^{2x}
$-(6x+6)$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
	$\frac{1}{4}e^{2x}$

$$\Rightarrow \int(3x^2+6x+2)e^{2x}dx=\frac{1}{2}(3x^2+6x+2)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}(6x+6)+\frac{3}{4}e^{2x}+c$$

$$=\frac{3}{2}x^2e^{2x}+\frac{3}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x^2e^{x}+\frac{3}{2}xe^{x}+\frac{1}{4}e^{x}+ce^{-2x}$$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ គឺ $y=\frac{3}{2}x^2e^{x}+\frac{3}{2}xe^{x}+\frac{1}{4}e^{x}+ce^{-2x}$ ដែល $c\in\mathbb{R}$ ។

2.6 សមីការលីនេអ៊ែរ (Linear equation)

និយមន័យ

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយអូម៉ូសែនមានរាង $a_1(x)y^{'}+a_2(x)y=g(x)$ ឬ $y^{'}+P(x)y=f(x)$ ដែល $P(x)=\dfrac{a_2(x)}{a_1(x)}$; $f(x)=\dfrac{g(x)}{a_1(x)}$

កត្តាអាំងតេក្រាល

តាង $\mu(x)$ ជាកត្តាអាំងតេក្រាលដែលត្រូវគុណនឹងសមីការ $y^{'}+P(x)y=f(x)$ ឱ្យក្លាយជាសមីការពិត ។ គេបាន

$$\mu(x)\left[y^{'}+P(x)y\right]=\mu(x)f(x)$$

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]=\mu(x)f(x)$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)f(x)$$

$$\mu(x)dy+\mu(x)P(x)ydx-\mu(x)f(x)dx=0$$

$$\left[\mu(x)P(x)y-\mu(x)f(x)\right]dx+\mu(x)dy=0$$

តាមលក្ខខណ្ឌនៃសមីការពិត $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ គេបាន

$$\mu(x)P(x)=\frac{\partial\mu(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)}=P(x)dx$$

$$\int\frac{\partial\mu(x)}{\mu(x)}=\int P(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)|=\int P(x)dx$$

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$$

នោះកត្តាអាំងតេក្រាលនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់មួយអូម៉ូសែនគឺ $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

- សរសេរសមីការជារាង $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)\quad(i)$
- រកកត្តាអាំងតេក្រាល $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$
- គុណសមីការ នឹង $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ គេបាន

$$e^{\int P(x)dx}\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx}+e^{\int P(x)dx}P(x)y=e^{\int P(x)dx}f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)\cdot y\right]=\mu(x)f(x)$$

$$\mu(x)\cdot y=\int\mu(x)f(x)dx+c$$

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\int\mu(x)f(x)dx+c$$

សម្គាល់៖ ក្នុងករណីខ្លះគេត្រូវប្តូរអថេរអាស្រ័យមកជា អថេរមិនអាស្រ័យវិញ ហើយអថេរមិនអាស្រ័យមានជាអថេរអាស្រ័យវិញនីក្នុងសមីការលីនេអ៊ែរ ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $(x^2+9)\frac{dy}{dx}+xy=0$

ខ. $x\frac{dy}{dx}+y=2x; y(1)=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\left(x^2+9\right)\dfrac{dy}{dx}+xy=0 \quad (i)$

សមីការ (i) អាចសរសេរជា $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{xy}{\left(x^2+9\right)}=0 \quad (ii)$

គេបាន $\mu(x)=e^{\int\frac{x}{\left(x^2+9\right)}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^2+9\right|}=\sqrt{x^2+9}$

គុណសមីការ (ii) នឹង $\mu(x)=\sqrt{x^2+9}$ គេបាន

$$\sqrt{x^2+9}\left(\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{x^2+9}\right)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+9}\cdot y\right)=0$$

$$\sqrt{x^2+9}\cdot y=c$$

$$y=\frac{c}{\sqrt{x^2+9}}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y=\dfrac{c}{\sqrt{x^2+9}}$ ។

ខ. $x\dfrac{dy}{dx}+y=2x; y(1)=0$

សមីការ (i) អាចសរសេរជា $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=2 \quad (ii)$

គេបាន $\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln|x|}=x$

គុណសមីការ (ii) នឹង $\mu(x)=x$ គេបាន

$$x\left(\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\right)=2x$$

$$\frac{d}{dx}(xy)=2x$$

$$xy=x^2+c$$

$$y = x + \frac{c}{x}$$

តែ $y(1) = 0$ គេបាន $0 = 1 + c \Rightarrow c = -1$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y = x - \frac{1}{x}$ ។

2.7 សមីការប៊ែនូយី រីកាទី និងក្លេរ៉ូ (The equation of Bernoulli, Ricatti and Clairaut)

ក. សមីការប៊ែនូយី (Bernoulli equation)

និយមន័យ

សមីការប៊ែនូយី ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$ ដែល $n \in ¡, n \neq 0, n \neq 1$ (រកឃើញដោយគណិតវិទូជនជាតិស្វីសលោក James Bernoulli (ឯកសារខ្លះថា Jacob Bernoulli) 1645-1705 ។

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

គេមានសមីការប៊ែនូយី $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$ (i)ដែល $n \in ¡, n \neq 0, n \neq 1$។ សមីការ (i)អាចសរសេរជា $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$ (ii) ។

តាង $w = y^{1-n}$ គេបាន $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx} \times \frac{1}{(1-n)}$ ។

នោះសមីការ (ii) អាចសរសេរទៅជា $\frac{dw}{dx} \times \frac{1}{(1-n)} + P(x)w = f(x)$ ឬ $\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរមានអថេរអាស្រ័យ w និងអថេរមិនអាស្រ័យ x ។

សម្គាល់៖ -សមីការ $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$ នៅពេល $n = 0$ សមីការក្លាយជាសមីការ

លីនេអ៊ែរ ។

-សមីការ $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n$ នៅពេល $n=1$ សមីការក្លាយជាសមីការអាច

ញែកអថេរបាន ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម

ក. $\frac{dy}{dx}=y\left(xy^3-1\right)$

ខ. $y\left(6y^2-x-1\right)dx+2xdy=0$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{dy}{dx}=y\left(xy^3-1\right)\ (i)$

សមីការ (i) អាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx}+y=xy^4\ \ (ii)$ ជាសមីការប៊ែនូយី

គុណសមីការ (ii) និង y^{-4} គេបាន $y^{-4}\frac{dy}{dx}+y^{-3}=x$

តាង $w=y^{-3}$ គេបាន $\frac{dw}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx}\Rightarrow y^{-4}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{dw}{dx}$

គេបានសមីការថ្មី $-\frac{1}{3}\cdot\frac{dw}{dx}+w=x\Leftrightarrow\frac{dw}{dx}-3w=-3x\ \ (iii)$ ជាសមីការលីនេអ៊ែរ

ដោយ $\mu(x)=e^{-\int 3dx}=e^{-3x}$

គុណសមីការ (iii) នឹង $\mu(x)=e^{-3x}$ គេបាន

$$e^{-3x}\left(\frac{dw}{dx}-3w\right)=-3x\cdot e^{-3x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}\cdot w\right)=-3x\cdot e^{-3x}$$

$$e^{-3x}\cdot w=-3\int x\cdot e^{-3x}dx$$

$$e^{-3x}\cdot w=-3I$$

ដែល $I=\int x\cdot e^{-3x}dx$

តាង $u=x\Rightarrow du=dx$

$$dv=e^{-3x}dx\Rightarrow v=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}$$

នោះ $I=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\left(xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$

គេបាន $e^{-3x}\cdot w=-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\left(xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\right)+c$

$e^{-3x}\cdot w=xe^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+c$

$$w=x+\frac{1}{3}+ce^{3x}$$

តែ $w=y^{-3}$ គេបាន $y^{-3}=x+\frac{1}{3}+ce^{3x}$

$$xy^3+\frac{1}{3}y^3+ce^{3x}y^3-1=0$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $xy^3+\frac{1}{3}y^3+ce^{3x}y^3-1=0$ ។

ខ. $y\left(6y^2-x-1\right)dx+2xdy=0$ (i)

សមីការ (i) អាចសរសេរជា $\frac{dy}{dx}-\frac{x+1}{2x}y=-\frac{6}{2x}y^3$ (ii) ជាសមីការប៊ែនូយី

គុណសមីការ (ii) និង y^{-3} គេបាន $y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{x+1}{2x}y^{-2}=-\frac{3}{x}$

តាង $w=y^{-2}$ គេបាន $\frac{dw}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}\Rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx}=\frac{dw}{dx}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

គេបានសមីការថ្មី $-\frac{1}{2}\cdot\frac{dw}{dx}-\frac{x+1}{2x}w=-\frac{3}{x}\Leftrightarrow\frac{dw}{dx}+\frac{x+1}{x}w=\frac{6}{x}$ (iii)

ជាសមីការលីនេអ៊ែរ

ដោយ $\mu(x)=e^{\int\frac{x+1}{x}dx}=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=e^{x+\ln|x|}=xe^x$

គុណសមីការ (iii) នឹង $\mu(x)=xe^{x}$ គេបាន

$$xe^{x}\cdot\left(\frac{dw}{dx}+\frac{x+1}{x}w\right)=xe^{x}\cdot\frac{6}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{x}\cdot w\right)=6e^{x}$$

$$xe^{x}\cdot w=6\int e^{x}dx$$

$$xe^{x}\cdot w=6e^{x}+c$$

$$dp=0\Rightarrow p=c\ w=\frac{6e^{x}+c}{xe^{x}}$$

តែ $w=y^{-2}$ គេបាន $y^{-2}=\dfrac{6e^{x}+c}{xe^{x}}$

$$y^{2}\left(6e^{x}+c\right)=xe^{x}$$

$$\Rightarrow x=y^{2}e^{-x}\left(6e^{x}+c\right)$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x=y^{2}e^{-x}\left(6e^{x}+c\right)$ ។

ខ. សមីការរីកាទី (Ricatti equation)

និយមន័យ

សមីការរីកាទី ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង $y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^{2}$ (រកឃើញដោយគណិតវិទូជនជាតិអ៊ីតាលីឈ្មោះ Jacobo Francesco Ricatti (1676-1754))។

វិធីស្រាស្តដោះស្រាយ

ចម្លើយនៃសមីការរីកាទីមានទម្រង់ $y=y_{1}+u$ ដែល៖

- y_1 **ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការរីកាទី**
- u **ជាចម្លើយនៃសមីការប៊ែនូយីមានទម្រង់** $u'-\left[Q(x)+2y_1R(x)\right]u=R(x)u^2$ **ដែលអាចបម្លែងទជាសមីការលីនេអ៊ែដែលមានទម្រង់** $w'+w\left[Q(x)+2y_1R(x)\right]=-R(x)$ **។**

សម្រាយបញ្ជាក់

ឧបមា $y=y_1+u$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $y'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$ (i)

គេបាន $y=y_1+u$ ផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ (i)

ដោយ $y=y_1+u \Rightarrow y'=y_1+u'$ គេបាន

$$y_1^{'}+u^{'}=P=Q(y_1+u)+R(y_1+u)^2$$

$y_1^{'}+u^{'}=P+Qy_1+Qu+Ry_1^{\,2}+2Ry_1u+Ru^2$

$y_1^{'}+u^{'}=(P+Qy_1+Ry_1^{\,2})+u(Q+2Ry_1)+Ru^2$

$y_1^{'}+u^{'}=y_1^{'}+u(Q+2Ry_1)+Ru^2$

$u^{'}-u(Q+2Ry_1)=Ru^2$

គេបាន u ជាចម្លើយនៃសមីការប៊ែនូយី $u^{'}-u(Q+2Ry_1)=Ru^2$ (ii)

គុណសមីការ (ii) នឹង u^{-2} គេបាន $u^{-2}u^{'}-u^{-1}(Q+2Ry_1)=R$

តាង $w=u^{1-2}=u^{-1}$ គេបាន $w^{'}=-u^{-2}u^{'} \Leftrightarrow u^{-2}u=-w^{'}$ គេបានសមីការថ្មី

$$-w^{'}-w(Q+2Ry_1)=R$$

$$w^{'}+w(Q+2Ry_1)=-R$$

ដូចនេះ ចម្លើយនៃសមីការរីកាទីមានទម្រង់ $y=y_1+u$ ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

$$\text{ក. } \frac{dy}{dx}=-2-y+y^2; y_1=2$$

ខ. $\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2;y_1=\frac{2}{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $\frac{dy}{dx}=-2-y+y^2;y_1=2$

សមីការមានរាងជាសមីការរីកាទី នោះចម្លើយនៃសមីការគឺ $y=y_1+u$

ដែល $y_1=2$ និង u ជាចម្លើយនៃសមីការ

$u^{'}-(-1+2\cdot2\cdot1)u=1\cdot u^2\Leftrightarrow u^{'}-3u=u^2\quad(i)$

គុណសមីការ (i) និង u^{-2} គេបាន $u^{-2}u^{'}-3u^{-1}=1$

តាង $w=u^{-1}$ គេបាន $w^{'}=-u^{-2}u^{'}\Rightarrow u^{-2}u^{'}=-w^{'}$

គេបានសមីការថ្មីគឺ $-w^{'}-3w=1\Leftrightarrow w^{'}+3w=-1\quad(ii)$

នោះ $\mu(x)=e^{\int 3dx}=e^{3x}$

គុណសមីការ (ii) និង $\mu(x)=e^{3x}$ គេបាន

$$e^{3x}\left(w^{'}+3w\right)=-e^{3x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\cdot w\right)=-e^{3x}$$

$$e^{3x}\cdot w=\int -e^{3x}dx$$

$$e^{3x}\cdot w=-\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

$$w=\frac{-1+3ce^{-3x}}{3}$$

$$w=\frac{-1+ke^{-3x}}{3};k=3c$$

តែ $w=u^{-1}$ គេបាន $u^{-1}=\frac{-1+ke^{-3x}}{3}\Rightarrow u=\frac{3}{-1-ke^{-3x}}$

គេបាន $y=y_1+u=2+\dfrac{3}{-1+ke^{-3x}}$

ដូចនេះ $y=2+\dfrac{3}{-1+ke^{-3x}}$ ។

ខ. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x}y+y^2; y_1=\dfrac{2}{x}$

សមីការមានរាងជាសមីការរីកាទី នោះចម្លើយនៃសមីការគឺ $y=y_1+u$

ដែល $y_1=\dfrac{2}{x}$ និង u ជាចម្លើយនៃសមីការ

$u'-\left(-\dfrac{1}{x}+2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot 1\right)u=u^2 \Leftrightarrow u'-\dfrac{3}{x}u=u^2 \quad (i)$

គុណសមីការ (i) និង u^{-2} គេបាន $u^{-2}u'-\dfrac{3}{x}u^{-1}=1$

តាង $w=u^{-1}$ គេបាន $w'=-u^{-2}u' \Rightarrow u^{-2}u'=-w'$

គេបានសមីការថ្មីគឺ $-w'-\dfrac{3}{x}w=1 \Leftrightarrow w'+\dfrac{3}{x}w=-1 \quad (ii)$

នោះ $\mu(x)=e^{3\int\frac{1}{x}dx}=e^{3\ln|x|}=x^3$

គុណសមីការ (ii) និង $\mu(x)=x^3$ គេបាន

$$x^3\left(w'+\frac{3}{x}\right)=-x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\cdot w\right)=-x^3$$

$$x^3\cdot w=-\int x^3dx$$

$$x^3\cdot w=-\frac{1}{4}x^4+c$$

$$w=\frac{-\frac{1}{4}x^4+c}{x^3}=\frac{-x+4cx^{-3}}{4}$$

$$w=\frac{-x+kx^{-3}}{4};k=4c$$

តែ $w=u^{-1}$ គេបាន $u^{-1}=\frac{-x+kx^{-3}}{4}\Rightarrow u=\frac{4}{-x+kx^{-3}}$

គេបាន $y=y_1+u=\frac{2}{x}+\frac{4}{-x+kx^{-3}}$

ដូចនេះ $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{-x+kx^{-3}}$ ។

គ. សមីការក្លេរ៉ូ (Clairaut equation)

និយមន័យ

សមីការក្លេរ៉ូ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមានរាង $y=xy'+f(p)$ **(រកឃើញដោយគណិតវិទូជនជាតិបារាំង ឈ្មោះ Alexis claude Clairaut (1713-1765) ។**

វិធីសាស្ត្រដោះស្រាយ

តាង $y'=p$ **គេបាន** $dy=pdx$

នោះសមីការ $y=xy'+f(p)$ **អាចសរសេរ**

$$y=xp+f(p)$$

$$dy=xdp+pdx+f'(p)dp$$

$$pdx=xdp+pdx+f'(p)dp$$

$$0=xdp+f'(p)dp$$

$$\left[x+f'(p)\right]dp=0$$

នោះគេទាញបានសមីការមានចម្លើយពីគឺ៖

- $dp=0\Rightarrow p=c$ តែ $y^{'}=p\Rightarrow y^{'}=c\Rightarrow y=cx+f\left(c\right)$ ដែល c ជាចំនួនថេរ

  ចម្លើយ $y=cx+f\left(c\right)$ ហៅថា គ្រួសារខ្សែកោងនៃបន្ទាត់ ។

- $x+f^{'}\left(p\right)=0\Rightarrow x=-f^{'}\left(p\right)$ យក $p=t\Rightarrow x=-f^{'}\left(t\right)$

  តែ $y=xp+f\left(p\right)=t\left[-f^{'}\left(t\right)\right]+f\left(t\right)=f\left(t\right)-t\left[f^{'}\left(t\right)\right]$

  គេមានសមីការមានចម្លើយប៉ារ៉ាម៉ែត $\begin{cases} x=-f^{'}\left(t\right) \\ y=f\left(t\right)-t\cdot f^{'}\left(t\right) \end{cases}$ (ហៅថាចម្លើយទោល Singular) ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y=x\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{3}$

ខ. $xy^{'}-y=e^{y^{'}}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y=x\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{3}\quad\left(i\right)$

សមីការ $\left(i\right)$ អាចសរសេរ $y=xy^{'}+f\left(y^{'}\right)$ ដែល $f\left(y^{'}\right)=-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{3}=-\left(y^{'}\right)^{3}$

តាង $p=\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow dy=pdx$

នោះសមីការ $\left(i\right)$ អាចសរសេរ

$$y=xp-p^{3}$$

$$dy=xdp+pdx-3p^{2}dp$$

$$pdx=xdp+pdx-3p^{2}dp$$

$$\left(x-3p^{2}\right)dp=0$$

គេទាញបាន $dp=0\Rightarrow p=c$ តែ $p=y^{'}\Rightarrow y^{'}=c\Leftrightarrow y=cx+f\left(c\right)=cx-c^3$

និង $x-3p^2=0\Rightarrow x=3p^2$

យក $p=t\Rightarrow x=3t^2\Rightarrow t^2=\dfrac{1}{3}x$

គេបាន $y=xp-p^3=3t^2\cdot t-t^3=2t^3$ ឬ $y^2=\left(2t^3\right)^2=4\left(t^2\right)^3=4\left(\dfrac{1}{3}x\right)^2=4\cdot\dfrac{1}{27}x^3$

ឬ $27y^2=4x^3$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y=cx-c^3;\ \ 27y^2=4x^3$ ។

ខ. $xy^{'}-y=e^{y^{'}}\quad (i)$

សមីការ (i)អាចសរសេរ $y=xy^{'}-e^{y^{'}}$ ដែល $f\left(y^{'}\right)=e^{y^{'}}$

តាង $p=\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow dy=pdx$

នោះសមីការ (i)អាចសរសេរ

$$y=xp-e^p$$

$$dy=xdp+pdx-e^pdp$$

$$pdx=xdp+pdx-e^pdp$$

$$\left(x-e^p\right)dp=0$$

គេទាញបាន $dp=0\Rightarrow p=c$ តែ $p=y^{'}\Rightarrow y^{'}=c\Leftrightarrow y=cx+f\left(c\right)=cx+e^c$

និង $x-e^p=0\Rightarrow x=e^p$

យក $p=t\Rightarrow x=e^t\Rightarrow t=\ln x$

គេបាន $y=xp-e^p=e^p\cdot t-e^t=e^{\ln x}\ln x-e^{\ln x}=x\ln x-x$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $y=cx-e^c;\ \ y=x\ln x-x$ ។

✚ ករណីពិសេស $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{px+qy+r}$ ឬ $y'-\frac{ax+by+c}{px+qy+r}=0$

យើងត្រូវតាង $\begin{cases}x=u+\alpha\\ y=v+\beta\end{cases}$ ដែល α,β ជាចម្លើយរបស់ប្រព័ន្ធ $\begin{cases}ax+by+c=0...(1)\\ px+qy+r=0...(2)\end{cases}$

នោះ $\frac{dv}{du}=\frac{au+bv}{pu+qv}=\frac{a+b\cdot\frac{v}{u}}{p+q\cdot\frac{v}{u}}=f(t)...(i)$ ដែល $t=\frac{u}{v}\Leftrightarrow v=ut$ គេបាន $dv=udt+tdu$

តាមសមីការ (i) គេបាន $\frac{dv}{du}=\frac{a+bt}{p+qt}\Leftrightarrow dv=\left(\frac{a+bt}{p+qt}\right)du\Leftrightarrow udt+tdu=\left(\frac{a+bt}{p+qt}\right)du$

$udt=\left(\frac{a+bt}{p+qt}-t\right)du\Rightarrow\frac{du}{u}=\left(\frac{p+qt}{a+bt-pt-qt^2}\right)dt\Leftrightarrow\int\frac{du}{u}=\int\left(\frac{p+qt}{a+bt-pt-qt^2}\right)dt$

បន្ទាប់ពីនេះយើងអាចរកចម្លើយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលអូម៉ូសែនបាន ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y+1}$

ដំណោះស្រាយ

យើងដោះស្រាយសមីការ $\begin{cases}x+y+3=0\\ x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$

តាង $\begin{cases}x=u-2\\ y=v-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=du\\ dy=dv\end{cases}$

យើងបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y+1}\Leftrightarrow\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v}\Leftrightarrow\frac{du}{dv}=\frac{1+\frac{u}{v}}{1-\frac{u}{v}}$

តាង $t=\frac{u}{v}\Leftrightarrow v=ut\Rightarrow dv=tdu+udt$

គេបាន $\frac{tdu+udt}{du}=\frac{1+t}{1-t}\Leftrightarrow t+\frac{udt}{du}=\frac{1+t}{1-t}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1+t}{1-t}-t\right)du=udt\Leftrightarrow\frac{du}{u}=\left(\frac{1-t}{t+t^2}\right)dt\Rightarrow\int\frac{du}{u}=\int\left(\frac{1}{t+t^2}-\frac{t}{t+t^2}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow\ln|u|=\tan^{-1}t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+c$$

$\Rightarrow u=A\cdot\frac{e^{\tan^{-1}t}}{\sqrt{1+t^2}}$ តាង $B=e^{\tan^{-1}t},A\in\mathbb{R}$

យើងបាន $u=\frac{AB}{\sqrt{1+t^2}}$ តែ $v=ut=\frac{ABt}{\sqrt{1+t^2}}$

នោះ $\begin{cases}x=\frac{AB}{\sqrt{1+t^2}}-2\\ y=\frac{AB}{\sqrt{1+t^2}}-1\end{cases}$ ដែល $A=\pm e^c\ \&\ B=e^{\tan^{-1}t},t=\frac{u}{v}$ ។

ករណីពិសេស $\begin{cases}ax+by+c=0...(1)\\ px+qy+r=0...(2)\end{cases}$ គ្មានចម្លើយ

យើងត្រូវតាង $u=ax+by\Rightarrow du=adx+bdy$ ដែល $\begin{vmatrix}a & b\\ p & q\end{vmatrix}=0$ ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការ $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x+y-1}$

ដំណោះស្រាយ

តាង $u=x+y\Rightarrow dy=du-dx$

គេបាន $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x+y-1}=\frac{u+3}{u-1}\Rightarrow dy=\left(\frac{u+3}{u-1}\right)dx\Leftrightarrow du-dx=\left(\frac{u+3}{u-1}\right)dx$

$$\Leftrightarrow du=\left(1+\frac{u+3}{u-1}\right)dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u+1}\right)du$$

$$\Leftrightarrow\int dx=\int\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{u+1}\right)du$$

$$\Rightarrow x=\frac{u}{2}-\ln|1+u|+c$$

ដូចនេះ $\begin{cases} x=\frac{u}{2}-\ln|1+u|+c \\ y=\frac{u}{2}+\ln|1+u| \end{cases}$

2.8 ការជំនួស

សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលមិនចូលរាងណាមួយខាងលើ គេប្រើវិធីជំនួសដើម្បីឱ្យសមីការក្លាយជារាងជាក់លាក់ណាមួយដើម្បីដោះស្រាយ ។

លំហាត់គំរូ: ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y(1+2xy)dx+x(1-2xy)dy=0$

ខ. $2xy\frac{dy}{dx}+2y^2=3x-6$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y(1+2xy)dx+x(1-2xy)dy=0 \quad (i)$

តាង $u=2xy \Rightarrow y=\frac{1}{2x}u$ គេបាន $du=2xdy+2ydx$ នោះ

$$dy=\frac{1}{2x}(du-2ydx)$$

$$dy=\frac{1}{2x}\left(du-2\cdot\frac{1}{2x}udx\right)$$

$$dy=\frac{1}{2x}\left(du-\frac{u}{x}dx\right)$$

គេបានសមីការ (i) អាចសរសេរទៅជា

$$\frac{1}{2x}u(1+u)dx+x(1-u)\cdot\frac{1}{2x}\left(du-\frac{u}{x}dx\right)=0$$

$$u(1+u)dx+(1-u)(xdu-udx)=0$$

$$u(1+u)dx+x(1-u)du-u(1-u)dx=0$$

$$u(1+u-1+u)dx+x(1-u)du=0$$

$$u^2dx+x(1-u)du=0$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-u)du}{2u^2}=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(1-u)du}{2u^2}=c$$

$$\ln|x|+\int\frac{du}{2u^2}-\int\frac{u}{2u^2}du=c$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2u}-\frac{1}{2}\ln|u|=c$$

$$-\frac{1}{2u}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{u}}\right|=c$$

$$\ln\left|\frac{x}{\sqrt{u}}\right|=c+\frac{1}{2u}$$

$$\frac{x}{\sqrt{u}}=e^{c+\frac{1}{2u}}$$

$$x=\sqrt{u}e^{c+\frac{1}{2u}}$$

$$x^2=ue^{2\left(c+\frac{1}{2u}\right)}$$

$$x^2=2xye^{2c}\cdot e^{\frac{1}{2xy}}$$

$$x^2=kxy\cdot e^{\frac{1}{2xy}};k=2e^{2c}$$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x^2=kxy\cdot e^{\frac{1}{2xy}};k=2e^{2c}$ ។

ខ. $2xy\frac{dy}{dx}+2y^2=3x-6\quad(i)$

តាង $u=y^2$ នោះ $\frac{du}{dx}=2y\frac{dy}{dx}$

នោះសមីការ (i) អាចសរសេរទៅជា

$$x\frac{du}{dx}+2u=3x-6$$

$$xdu+2udx=(3x-6)dx$$

$$(2u-3x+6)dx+xdu=0 \quad (ii)$$

ដោយ $\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}(2u-3x+6)=2\neq\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1$

នោះសមីការ (ii) ជាសមីការមិនពិត

គេបាន $\frac{\frac{\partial M}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2-1}{x}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln|x|}=x$$

គុណសមីការ (ii) និង $\mu(x)=x$ គេបាន

$$x\left[(2u-3x+6)dx+xdu\right]=0$$

$$\left(2ux-3x^2+6x\right)dx+x^2du=0$$

ដោយ $\frac{\partial M}{\partial u}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$ នោះវាជាសមីការពិត

យក $N(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial u}$ គេបាន

$$f(x,y)=\int N(x,y)du+h(x)$$

$$f(x,y)=\int x^2du+h(x)$$

$$f(x,y)=x^2u+h(x)$$

នោះ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial u}=2ux+h^{'}(x)$ តែ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial u}=M(x,y)=2ux-3x^2+6x$

គេបាន $h'(x)=-3x^2+6x$ នាំឱ្យ $h(x)=\int(-3x^2+6x)dx=-x^3+3x^2+c$

នោះ $x^2u-x^3+3x^2+c=0$

តែ $u=y^2$ គេបាន $x^2y^2-x^3+3x^2+c=0$

ដូចនេះ សមីការមានចម្លើយ $x^2y^2-x^3+3x^2+c=0$ ។

ការអនុវត្ត

អនុវត្តន៍សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល នៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ

ក. អនុវត្តន៍នៅក្នុងគីមីវិទ្យា

ឧទាហរណ៍: អ្នកវិទ្យាសាស្ត្របានសង្កេតឃើញថា ចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃសារជាតុវិទ្យុសកម្ម ត្រូវថយចុះទៅតាមរយៈពេលដែលប្រើប្រាស់ ។ គេដឹងថាល្បឿននៃការបំបែកណ្វៃយ៉ូនេះសមាមាត្រ នឹងចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់ ។ តាង N_0 ជាចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃសារៈជាតុវិទ្យុសកម្មដែលមាននៅខណៈពេល $t=0$ ។ រកចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់ក្នុងខណៈពេល t ជាអនុគមន៍នៃ t ។

ដំណោះស្រាយ

រកចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់ក្នុងខណៈពេល t ជាអនុគមន៍នៃ t

តាង k ជាមេគុណសមាមាត្រ

N ជាចំនួនណ្វៃយ៉ូនៃសារៈជាតុវិទ្យុសកម្ម ដែលនៅសល់ក្នុងខណៈពេល t

ដោយល្បឿននៃការបំបែកណ្វៃយ៉ូនេះសមាមាត្រ នឹងចំនួនណ្វៃយ៉ូដែលនៅសល់នោះគេអាចសរសេរ

$\frac{dN}{dt}=-kN$ ដែលជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ទី 1

$$\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = -k\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dN}{N} = -k\int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|N| = -kt + c$$

$$\Leftrightarrow |N| = e^{-kt+c}$$

$$\Leftrightarrow N = \pm e^{c}.e^{-kt}$$

$\Leftrightarrow N = Ae^{-kt}$ យក $A = \pm e^{c}$ ដែល A ជាចំនួនថេរណាមួយក៏បាន

ដោយ $N(t) = Ae^{-kt}$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $N(0) = N_0$ គេបាន $N(0) = Ae^{-k(0)}$

នាំឲ្យ $A = N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-kt}$

ដូចនេះ នៅខណៈពេល t សារៈជាតុវិទ្យុសកម្ម នៅសល់ណ្ហៃយ៉ូចំនួន $N_0 e^{-kt}$ ។

ខ. អនុវត្តន៍នៅក្នុងរូបវិទ្យា

ឧទាហរណ៍: នំប៉័ងដែលគេទើបលើកចេញពីចង្រ្កានមានសីតុណ្ហភាព $120^0 C$ ។ គេយកនំនេះមកដាក់ក្នុងបន្ទប់មួយមានសីតុណ្ហភាព $28^0 C$ ។ គេឃើញថា 3 នាទីក្រោយមកសីតុណ្ហភាពនំធ្លាក់មកនៅ $80^0 C$ ។

ក.សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដែលទាក់ទងនឹងសីតុណ្ហភាព T របស់នំនៅខណៈ t និងលក្ខខណ្ឌដើមនៃចំណោទ ។

ខ. គណនាសីតុណ្ហភាពនំ នៅខណៈពេល t ។

គ. គណនារយៈពេលដែលសីតុណ្ហភាពនំ ថយចុះដល់ $30^0 C$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. សរសេរសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

អត្រាថយចុះនៃសីតុណ្ហភាពនំគឺ $-\frac{dT}{dt}$

ដោយអត្រាថយចុះនេះសមាមាត្រនឹងផលដកវាងសីតុណ្ហភាពនំ និងសីតុណ្ហភាពបរិយាកាសជុំវិញ នោះគេបានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលៈ

$-\frac{dT}{dt}=k(T-M)$ តាមលក្ខខណ្ឌដើម $T(0)=T_0=120^0C$

ដោយសីតុណ្ហភាព $M=28^0C$ គេបាន

$\frac{dT}{dt}=-k(T-28),\ T(0)=120$ ។

ខ. គណនាសីតុណ្ហភាពនំ នៅខណៈពេល t

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-28)\Leftrightarrow \frac{dT}{(T-28)}=-kdt$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dT}{(T-28)}\,dt=-k\int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln|T-28|=-kt+c$$

$$\Leftrightarrow |T-28|=e^{-kt+c}$$

$$\Leftrightarrow T-28=\pm e^{-kt+c}$$

$$\Leftrightarrow T-28=Ae^{-kt},\ (A=\pm e^c)$$

$$\Rightarrow T(t)=Ae^{-kt}+28$$

ដោយ $T(0)=T_0=120^0C$ នោះ $120=Ae^{-k(0)}+28\Rightarrow A=92$

គេបាន $T(t)=92e^{-kt}+28$

ហើយ 3 នាទីក្រោយមកសីតុណ្ហភាពនំ ថយចុះពី 120^0C មក 80^0C នោះគេបាន

$$80 = 92e^{-k(3)} + 28 \Leftrightarrow e^{-3k} = \frac{52}{92} = \frac{13}{23}$$

$$\Leftrightarrow -3k = \ln\left(\frac{13}{23}\right) \Rightarrow k = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{13}{23}\right) = 0.19$$

ដូចនេះ $T(t) = 92e^{-0.19t} + 28$ ។

គ. គណនារយៈពេលដែលសីតុណ្ហភាពនំ ថយចុះដល់ $30^0 C$

$$30 = 92e^{-0.19t} + 28$$

$$\Leftrightarrow e^{-0.19t} = \frac{2}{92} = \frac{1}{46}$$

$$\Leftrightarrow -0.19t = \ln\left(\frac{1}{46}\right) \Rightarrow t = -\frac{1}{0.19}\ln\left(\frac{1}{46}\right) = -3.829$$

ដូចនេះ $t = 20$ នាទី 9 វិនាទី ។

គ. អនុវត្តន៍ក្នុងជីវវិទ្យា

ឧទាហរណ៍: គេសិក្សាអំពីកំណើននៃការបណ្ដុះបាក់តេរីក្នុងមជ្ឈដ្ឋានមួយ ។ តាង $N(t)$ ជាអនុគមន៍នៃ t ជាចំនួនបាក់តេរីដែលមាននៅខណៈពេល t (t គិតជាម៉ោង) ។ គេដឹងថាចំនួនបាក់តេរីកើនឡើង 10% ក្នុង 1 ម៉ោង ។

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់:

$N(t+1) - N(t) = 0.1N(t)$

ខ. គេចាត់ទុក $N(t+1) - N(t)$ ខិតទៅរក $N'(t)$ ដែលជាដេរីវេនៃ N ។

គណនាចំនួនបាក់តេរីនៅខណៈពេល $t = 3h$ បើគេដឹងថា ចំនួនបាក់តេរីនៅពេលចាប់ផ្ដើមបណ្ដុះមាន $N_0 = 10^4$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ t ជាចំនួនពិតវិជ្ជមានផ្ទៀងផ្ទាត់:

$$N(t+1)-N(t)=0.1N(t)$$

ដោយចំនួនបាក់តេរីមាន $N(t)$ នៅម៉ោង t ហើយកើនបាន 10% ក្នុង 1 ម៉ោង

នោះមួយក្រោយមកចំនួនបាក់តេរីមាន

$$N(t+1)=N(t)+\frac{10}{100}N(t)$$

ដូចនេះ $N(t+1)-N(t)=0.1N(t)$ ។

ខ. គណនាចំនួនបាក់តេរីនៅខណៈពេល $t=3h$

ដោយ $N'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{N(t+1)-N(t)}{t+1-t}$

$N'(t)=0.1N(t)$ ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

$\dfrac{dN}{dt}=0.1N$ នាំឱ្យ $\dfrac{dN}{N}=0.1dt$

$$\ln|N|=0.1t+c$$

$$N(t)=Ae^{0.1t}$$

ដោយ $N(0)=N_0=10^4$

នោះ $10^4=Ae^{0.1(0)}$ នាំឱ្យ $A=10^4$

$$N(t)=10^4e^t$$

$t=3:\ N(3)=10^4e^{0.3}=13498$ បាក់តេរី

ដូចនេះ នៅខណៈពេល $t=3h$ មាន 13498 បាក់តេរី ។

អនុវត្តន៍សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល នៅក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

ឧទាហរណ៍: លោក A បានសម្រេចចិត្តថានឹងឈប់ជក់បារីដើម្បីថែរក្សាសុខភាព និងធ្វើការសន្សំប្រាក់ឡើងវិញ ។ គាត់ជក់បារីក្នុងមួយថ្ងៃអស់ 2កញ្ចប់ បើគិតជាប្រាក់គាត់ត្រូវចំណាយអស់ 3ម៉ឺនរៀលក្នុងមួយសប្តាហ៍ ។ ឧបមាថា គាត់បញ្ចូលប្រាក់នេះជារៀងរាល់សប្តាហ៍ក្នុងគណនីសន្សំនៃធនាគារ នោះគាត់នឹងទទួលបានអត្រាការប្រាក់សមាស 10% ក្នុងមួយឆ្នាំ ។

តើគាត់ទទួលបានប្រាក់ទាំងការ ទាំងដើមប៉ុន្មាន បើគាត់ព្យាយាមផ្ញើរប្រាក់នេះ ចូលធនាគារក្នុងរយៈពេល30 ឆ្នាំ ។

ដំណោះស្រាយ

បើ S ជាទឹកប្រាក់ដែលមាន ក្នុងឆ្នាំ t ហើយអត្រាការប្រាក់សមាស 10% ក្នុងមួយឆ្នាំ

នោះកំណើនទឹកប្រាក់ក្នុងឆ្នាំគឺ $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{10}{100}s$

បើគេបន្ថែមទឹកប្រាក់ d ទៀតនោះកំណើនទឹកប្រាក់គឺ

$$\frac{dS}{dt}=0.1\,s+d \Leftrightarrow \frac{dS}{dt}-0.1\,s=d$$

ដោយក្នុងមួយសប្តាហ៍លោក A សន្សំប្រាក់បាន 3 ម៉ឺនរៀល ហើយក្នុងមួយឆ្នាំគាត់សន្សំបាន $3\times 52=156$ ម៉ឺនរៀល

គេបាន $\dfrac{dS}{dt}=0.1\,s=156$ ម៉ឺនរៀល ជាសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ដែលមានចម្លើយជាអនុគមន៍ $S(t)$ ជាចំនួនទឹកប្រាក់ដែលមានក្នុងធនាគារ

នៅខណៈពេល t

$$\frac{dS}{dt}=0.1\,s=156\ \ (1)$$

សមីការ $\frac{dS}{dt} = 0.1\, s = 0$ មានចម្លើយទូទៅគឺ $S(t) = A(x)\, e^{0.1t}$

ធ្វើបម្រែបម្រួលចំនួនថេរ A គេបាន

$$S^{'}(t) = A^{'}(x) e^{0.1t} + 0.1 A(x) e^{0.1t}$$

$$(1): A^{'}(x)e^{0.1t} + 0.1A(x)e^{0.1t} - 0.1A(x)e^{0.1t} = 156,\ \left(\frac{ds}{dt} = S^{'}(t),\ \ S = S(t)\right)$$

$$\Rightarrow A^{'}(x)e^{0.1t} = 156$$

$$\Rightarrow A^{'}(x) \quad = 156e^{-0.1t}$$

$$\Rightarrow A(x) \quad = 156\int e^{-0.1t}dt = -1560\, e^{-0.1t} + c,\ (c \in \mathbb{R})$$

ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $S(t) = \left(-1560e^{-0.1t} + c\right)e^{0.1t} = -1560 + ce^{0.1t}$

ដោយនៅឆ្នាំដំបូងប្រាក់ដើមរបស់លោក A គ្មានសោះ នោះគេបាន

$$S(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -1560 + ce^{0.1(0)} \Rightarrow c = 1560$$

គេបាន $S(t) = 1560\, e^{0.1t} - 1560$

30 ឆ្នាំក្រោយលោក Aមានប្រាក់ចំនួន $S(30) = 1560\, e^{0.1(30)} - 1560 = 29\,773.43$៛

ដូចនេះ $S(30) = 29\,773.43$ ម៉ឺនរៀល ។

លំហាត់ជ្រើសរើស

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$ ខ. $y^{'} = \sin x$

គ. $y^{'} = \sin(\ln x)$ ឃ. $y^{'} = \tan^6 x$

ង. $y^{'} = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$ ច. $y^{'} = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}+8y=0$ ខ. $2y^{'}-3y=0$

គ. $y^{'}-\sqrt{3}y=0$ ឃ. $5y^{'}+2y=0$

ង. $\frac{dy}{dx}-\sqrt[3]{2}y=0$ ច. $6\frac{dy}{dx}+y=0$

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលក្ខខណ្ឌដើមខាងក្រោម៖

ក. $-y^{'}+2y=0, y(3)=-2$ ខ. $2y^{'}+y=0, y(\ln 4)=\frac{1}{5}$

គ. $y^{'}-y=0, y(0)=1$ ឃ. $2y^{'}-5y=0, y\left(\frac{2}{5}\right)=-3$

ង. $\frac{dy}{dx}-5y=0, y\left(\frac{1}{5}\right)=-1$ ច. $\cos xdy-dx=0, y(0)=1$

៤. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}+3y=3x^2-x+2$ ខ. $y^{'}-2y=e^x$

គ. $y^{'}-2y=xe^{2x}$ ឃ. $2y^{'}+y=2\sin x$

ង. $y^{'}+y=e^{2x}(\cos 3x-3\sin 3x)$ ច. $y^{'}+y=y^2$

ឆ. $y^{'}-y=\sin x\cos x$ ជ. $2y^{'}-3y=(x+3)^2$

ឈ. $y^{'}-6y=3x+1$ ញ. $-y^{'}+\frac{1}{2}y=\sin 2x+\cos 2x$

ដ. $y^{'}+y=xe^{-x}$ ឋ. $-y^{'}+y=x^2-2x+1$

ឌ. $2y^{'}-3y=(x+3)^2$ ឍ. $y^{'}+y=2e^{2x}+3\cos 2x+x+1$

៥. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលក្ខខណ្ឌដើមខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}+2y=x^2, y(0)=2$ ខ. $y^{'}+y=\sin x+\cos x, y(0)=1$

គ. $\frac{dy}{dx}-y^2=-9, y(0)=3$ ឃ. $y^{'}=\frac{y}{e}, y(0)=\ln 2$

ង. $\left(x^2+4x+1\right)\frac{dy}{dx}=2, y\left(0\right)=0$ ច. $y^{'}=x^2+1+\cos x, y\left(0\right)=1$

៦. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $2y^{'}-3y=2$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $2y^{'}-3y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $y_p=k$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយមួយនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថា $y^{'}\left(0\right)=2$ ។

៧. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y^{'}-2y=2x+1$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}-2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=ax+b$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយទូទៅមួយនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ កាត់អ័ក្សអាប់ស៊ីសត្រង់ចំនុចដែលមានអាប់ស៊ីស $x=1$ ។

៨. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $y^{'}-y=x^2-2x+1$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}-y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. រកចម្លើយមួយនៃ (E) ។

៩. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (E): $3y^{'}+2y=3e^{4x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $3y^{'}+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត k ដើម្បីឱ្យ $y_p=ke^{4x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ កាត់តាមអ័ក្សអរដោនេត្រង់ចំនុចដែលមានអរដោនេ $y=e$ ។

១០. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}-3y=-2xe^{x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ $f(x)$ នៃសមីការ $y^{'}-3y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=(ax+b)e^{x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ កាត់តាមចំនុច $A(0,\ln 2)$ ។

១១. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}-2y=(1-x)e^{2x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ $f(x)$ នៃសមីការ $y^{'}-2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=(ax^{2}+bx)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E)

គ. បង្ហាញថា $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយ កាត់បន្ទាត់ $(d): y=x+2$ ត្រង់ $x=0$ ។

១២. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+2y=(x^{2}-x)e^{-x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ $f(x)$ នៃសមីការ $y^{'}+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=(ax^{2}+bx+c)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $h(x)=f(x)+g(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមចំនុច $I(0,-1)$ ។

១៣. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+3y=\cos x$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}+3y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ។

១៤. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+3y=\cos x$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}+3y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។ រកចម្លើយមួយនៃ (E) ។

១៥. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+2y=(\sin x+2\cos x)e^{2x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=(a\cos x+b\sin x)e^{2x}$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃ (E) ។

១៦. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+y=e^{-x}\cos x$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y^{'}+y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $y_p=xe^{-x}(a\cos x+b\sin x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

គ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃ (E) ។

១៧. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+2y=x^2$ ។

ក. កំណត់ពហុធា g មានដឺក្រេទី2 ដែលជាចម្លើយពិសេសនៃ (E) ។

ខ. តាង h ជាអនុគមន៍ដែល $h(x)=f(x)-g(x)$ ។ បើ h ជាចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y^{'}+2y=0$ នោះបង្ហាញថា f ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E)។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $y^{'}+2y=0$ រួចទាញរកអនុគមន៍ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ។

១៨. គេមានសមីការ $(E): y^{'}-\ln 3.y=0$ ។

ក. រកសំណុំចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. កំណត់ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដោយដឹងថា $f(1)=2$ ។

គ. បង្ហាញថា $g(x)=3^{x-1}$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

១៩. អនុគមន៍ g កំណត់ចំពោះ $x\neq -1$ ដោយ $g(x)=\dfrac{4x-1}{(x+1)^2}$ ។

ក. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឱ្យ $g(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ចំពោះគ្រប់ $x\neq -1$ ។

ខ. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(x+1)^2 y^{'}=4x-1$ ចំពោះ $x\neq -1$ ដោយដឹងថា $y(0)=2012$ ។

២០. រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម៖

ក. $y^{'}+y=0$ ដោយដឹងថាក្រាបចម្លើយកាត់តាមចំនុច $M(1,e)$ ។

ខ. $y^{'}=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$ ដោយដឹងថាក្រាបចម្លើយកាត់តាមចំនុច $N(0,1)$ ។

២១. គេមានសមីការ $(E):\left(e^x+2013\right)y^{'}=e^x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E):\left(e^x+2013\right)y^{'}=e^x$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដោយដឹងថាក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមគល់អរដោនេ O នៃតម្រុយ ។

២២. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y^{'}+2y=\dfrac{2e^{-x}}{1+2e^x}$ ។

ក. ផ្ទៀងផ្ទាត់ថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=e^{-2x}\ln\left(1+2e^x\right)$ ជាចម្លើយនៃ (E) ។

ខ. បង្ហាញថាអនុគមន៍ φ ជាចម្លើយនៃ (E) លុះត្រាតែ $f-\varphi$ ជាចម្លើយនៃសមីការ $\left(E^{'}\right): y^{'}+2y=0$ ។

មេរៀនទី សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២

II. សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ និងការអនុវត្ត

១. និយមន័យ ទ្រឹស្តីបទ លក្ខណៈ

១.១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរ

១.១.១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរអូម៉ូសែន

និយមន័យ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ និងមានមេគុណថេរអូម៉ូសែនគឺគ្រប់សមីការដែលមានទម្រង់ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in\mathbb{R}$ ដែល $a\neq 0$ ។

ឧទាហរណ៍៖ សមីការអាចមានទម្រង់ជា $\begin{cases} 2y''+3y'+y=0 \\ 2y''+y=0 \\ 2y''+3y'=0 \end{cases}$

ទ្រឹស្តីបទទី១៖ បើ y_0 ជាឫសមួយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in\mathbb{R}$ ដែល $a\neq 0$ នោះគេបាន $\forall k\in\mathbb{R}$ ដែល ky_0 ជាឫសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in\mathbb{R}$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ y_0 ជាឫសមួយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in\mathbb{R}$

នោះ $ay_0''+by_0'+cy_0=0$

បើ ky_0 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in$

តាង $y=ky_0$ នោះ $y'=ky_0', y''=ky_0''$

គេបាន

$$aky_0''+bky_0''+cky_0=0$$

$$k(ay_0''+by_0''+cy_0)=0$$

$$ay_0''+by_0'+cy_0=0$$ (ពិត)

ដូចនេះ បើ y_0 ជាឬសមួយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in$ ដែល $a\neq 0$ នោះគេបាន $\forall k\in$ ដែល ky_0 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in$

ទ្រឹស្តីបទទី២៖ បើ y_1, y_2 ជាជាឬសមួយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in$ ដែល $a\neq 0$ នោះគេបាន y_1+y_2 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c\in$ ។

សម្រាយបញ្ជាក់

បើ y_1 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$

នោះគេបាន $ay_1''+by_1'+cy_1=0 \quad (1)$

បើ y_2 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$

នោះគេបាន $ay_2''+by_2'+cy_2=0 \quad (2)$

យក $(1)+(2)$ គេបាន

$$ay_1''+by_1'+cy_1+ay_2''+by_2'+cy_2=0$$

$$ay_1''+ay_2''+by_1'+by_2'+cy_1+cy_2=0$$

$$a(y_1''+y_2'')+b(y_1'+y_2')+c(y_1+y_2)=0$$

$$a(y_1+y_2)''+b(y_1+y_2)'+c(y_1+y_2)=0$$ (ពិត)

ដូចនេះ បើ y_1, y_2 ជាជាឬសមួយនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c \in \mathbb{R}$ ដែល $a \neq 0$ នោះគេបាន y_1+y_2 ជាឬសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a,b,c \in \mathbb{R}$ ។

របៀបដោះស្រាយ៖

ដើម្បីដោះស្រាយសមីការ $ay''+by'+cy=0$ គេត្រូវបង្កើតសមីការសម្គាល់ដែលមានរាង $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ រួចដោះស្រាយសមីការ ។

សម្គាល់៖ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$ អាស្រ័យទៅនឹងឬសរបស់សមីការ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ ។

សមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+b\lambda+c=0$	អនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$
$\Delta=b^2-4ac>0$ មានឬសពីរ λ_1, λ_2 ជាចំនួនពិត	$y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}; A,B \in \mathbb{R}$
$\Delta=b^2-4ac=0$ មានឬសឌុប $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$	$y=(Ax+B)e^{\lambda_0 x}; A,B \in \mathbb{R}$
$\Delta=b^2-4ac<0$ មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចឆ្លាស់ $\lambda_1=\alpha+\beta i, \lambda_2=\alpha-\beta i$	$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x); A,B,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

ចំណាំ៖ ចំនួនថេរ A និង B អាចរកឃើញតាមបម្រាប់ប្រធានផ្សេងទៀតនៃប្រធានលំហាត់ ។

ខ្សែកោងតាងអនុគមន៍ $y=f(x)$ ប៉ះបន្ទាត់ $y=ax+b$ ត្រង់ចំណុច $A(x_0, y_0)$ កាលណា
$$\begin{cases} f(x_0)=y_0 \\ f'(x_0)=a \end{cases}$$

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម

ក. $2y''-3y'+y=0$ ខ. $y''-y'+9y=0$ គ. $2y''+y'+y=0$

ចម្លើយ

ក. $2y''-3y'+y=0$

គេមាន: សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $2y''-3y'+y=0$ គឺ

$2\lambda^2-3\lambda+1=0$ មានឫស $\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y''-3y'+y=0$ គឺ $y=Ae^x+Be^{\frac{1}{2}x}; A, B$ ជាចំនួនថេរ។

ខ. $y''-6y'+9y=0$

គេមាន: សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $y''-6y'+9y=0$ គឺ

$\lambda^2-6\lambda+9=0$ មានឫសឌុបគឺ $\lambda_1=\lambda_2=3$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-6y'+9y=0$ គឺ $y=(Ax+B)e^{3x}; A, B$ ជាចំនួនថេរ ។

គ. $2y''+y'+y=0$

គេមាន : សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $2y''+y'+y=0$ គឺ

$2\lambda^2+\lambda+1=0$ មានឫស $\lambda_1=-\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{7}}{4}; \lambda_2=-\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{7}}{4}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $2y''+y'+y=0$ គឺ $y=\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{4}x+B\sin\frac{\sqrt{7}}{4}x\right)e^{-\frac{1}{4}x}; A, B$ ជាចំនួនថេរ ។

១.១.២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

- និយមន័យ៖ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរមិនអូម៉ូសែនគឺគ្រប់សមីការដែលមានទម្រង់ $ay''+by'+cy=p(x)$ (E) ដែល $P(x)\neq 0$ ។
- របៀបដោះស្រាយ៖ ដើម្បីដោះស្រាយសមីការនេះគេត្រូវ :
    - ➢ រកអនុគមន៍ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$ តាងដោយអនុគមន៍ y_c
    - ➢ រកអនុគមន៍ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$

តាងដោយអនុគមន៍ y_p ។ គេតាង y_p ទៅតាមរាងនៃ $P(x)$ ។

➢ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺជាអនុគមន៍ y ដែល $y = y_c + y_p$

- របៀបមួយចំនួនដើម្បីរកចម្លើយពិសេស y_p

$P(x)$	ឫសសមីការសម្គាល់	y_p
$ke^{\alpha x}$	$\lambda \neq \alpha$	$Ae^{\alpha x}$
	$\lambda = \alpha$	$Axe^{\alpha x}$
	$\lambda = \alpha;(\Delta = 0)$	$Ax^2e^{\alpha x}$
$k\cos\beta x$ ឬ $k\sin\beta x$	$\lambda \neq i\beta$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
	$\lambda = i\beta$	$x(A\cos\beta x + \sin\beta x)$
$kx^ne^{\alpha x}$	$\lambda \neq \alpha$	$e^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0)$
	$\lambda = \alpha$	$xe^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0)$
	$\lambda = \alpha;(\Delta = 0)$	$x^2e^{\alpha x}(A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0)$
$ke^{\alpha x}\cos\beta x$ ឬ $ke^{\alpha x}\sin\beta x$	$\lambda \neq \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + \sin\beta x)$
	$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + \sin\beta x)$

ចំណាំ៖ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $ay'' + by' + cy = f(x)$ (1) និង $ay'' + by' + cy = 0$ (2) ។

១. បើ f_1 ជាចម្លើយនៃ (1) ហើយ f_2 ជាចម្លើយនៃ (2) នោះ $f_1 + f_2$ ជាចម្លើយនៃ (1) ។

២. បើ f_1 និង f_2 ជាចម្លើយនៃ (1) នោះ $f_1 - f_2$ ជាចម្លើយនៃ (2) ។

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. $y'' - 3y' + 5y = 4x^3 - 2x$ ខ. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$

គ. $y''-2y'+4y=e^{x}$ ឃ. $y''-2y'-5y=x^{2}e^{x}$

ដំណោះស្រាយ

ក. $y''-3y'+5y=4x^{3}-2x \quad (E)$

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y''-3y'+5y=0 \quad (1)$

គេមាន : សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $y''-3y'+5y=0$ គឺ $\lambda^{2}-3\lambda+5=0$

មានឫស $\lambda_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i;\lambda_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \Rightarrow \alpha=\frac{3}{2};\beta=\frac{\sqrt{11}}{2}$

គេបាន : ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c=\left(A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x+B\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)e^{\frac{3}{2}x};A,B$ ជាចំនួនថេរ

។

រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង : $y_p=ax^{3}+bx^{2}+cx+d$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ : $y_p'=3ax^{2}+2bx+c;y_p''=6ax+2b$

គេបាន : $y''-3y'+5y=4x^{3}-2x$

$$(6ax+2b)-3\left(3ax^{2}+2bx+c\right)+5\left(ax^{3}+bx^{2}+cx+d\right)=4x^{3}-2x$$

$$5ax^{3}+\left(-9a+5b\right)x^{2}+\left(6a-6b+5c\right)x+\left(2b-3c+5d\right)=4x^{3}-2x$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការ គេបាន :

$$\begin{cases}5a=4\\-9a+5b=0\\6a-6b+5c=-2\\2b-3c+5d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{4}{5}\\b=\frac{36}{25}\\c=\frac{46}{125}\\d=-\frac{222}{625}\end{cases}$$

គេបាន : ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = y_c + y_p = \left(A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right)e^{\frac{3}{2}x} + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}; A, B$ ជាចំនួនថេរ ។

ខ. $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x \quad (E)$

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y'' - 2y' + 5y = 0 \quad (1)$

គេមាន : សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $y'' - 2y' + 5y = 0$ គឺ

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ មានឫស $\lambda_1 = 1 - 2i, \lambda_2 = 1 + 2i \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$

គេបាន : ចម្លើយនៃសមីការ (1) គឺ $y_c = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x; A, B$ ជាចំនួនថេរ ។

រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p = a\cos x + b\sin x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ : $y_p' = -a\sin x + b\cos x, y_p'' = -a\cos x - b\sin x$

គេបាន : $y'' - 2y' + 5y = 10\cos x$

$$(-a\cos x + b\sin x) - 2(-a\sin x + b\cos x) + 5(a\cos x + b\sin x) = 10\cos x$$

$$(4a - 2b)\cos x + (2a + 4b)\sin x = 10\cos x + 0\sin x$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការ

$$\begin{cases} 4a - 2b = 10 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

គេបាន ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p = 2\cos x - \sin x$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y = y_c + y_p = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^x + 2\cos x - \sin x; A, B$ ជាចំនួនថេរ ។

គ. $y'' - 2y' + 4y = e^x \ (E)$

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y''-2y'+4y=0$ (1)

គេមាន : សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $y''-2y'+4y=0$ គឺ

$\lambda^2-2\lambda+4=0$ មានឫស $\lambda_1=1-i\sqrt{3};\lambda_2=1+i\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=1,\beta=\sqrt{3}$

គេមាន : ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c=\left(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x\right)e^x;A,B$ ជាចំនួនថេរ ។

រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង $y_p=ae^x$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ : $y_p'=ae^x, y_p''=ae^x$

គេបាន : $y''-2y'+4y=e^x$

$$\left(ae^x\right)-2\left(ae^x\right)+4\left(ae^x\right)=e^x$$

$$3ae^x=e^x$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការទាំងពីរគេទាញបាន

$3a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{3}$

គេបាន : ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p=\dfrac{1}{3}e^x$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=y_p+y_c=\left(A\cos\sqrt{3}x+B\sin\sqrt{3}x\right)e^x+\dfrac{1}{3}e^x;A,B$ ជាចំនួនថេរ ។

ឃ. $y''-2y'-5y=x^2e^x$ (E)

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការអូម៉ូសែន $y''-2y'-5y=0$ (1)

គេមាន : សមីការសម្គាល់នៃសមីការ $y''-2y'-5y=0$ គឺ

$\lambda^2-2\lambda-5=0$ មានឫស $\lambda_1=1+\sqrt{6},\lambda_2=1-\sqrt{6}$

គេបាន : ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y_c=Ae^{\left(1+\sqrt{6}\right)x}+Be^{\left(1-\sqrt{6}\right)x};A,B$ ជាចំនួនថេរ ។

រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E)

តាង : $y_p=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ ជាចម្លើយនៃពិសេសនៃសមីការ (E)

នាំឲ្យ : $y_p'=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x=\left(ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right)e^x$

$$y_p''=(2ax+2a+b)e^x+\left(ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right)e^x=\left(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c)\right)e^x$$

គេបាន : $y''-2y'-5y=x^2e^x$

$$\left(ax^2+(4a+b)x+(2a+2b+c)\right)e^x-2\left(ax^2+(2a+b)x+(b+c)\right)e^x-5\left(ax^2+bx+c\right)e^x=x^2e^x$$

$$\left(-6ax^2-6bx+2a-6c\right)e^x=x^2e^x$$

ផ្ទឹមមេគុណនៃសមីការ គេបាន :

$$\begin{cases}-6a=1\\-6b=0\\2a-6c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{6}\\b=0\\c=-\dfrac{1}{18}\end{cases}$$

គេបាន : ចម្លើយពិសេសនៃសមីការ (E) គឺ $y_p=\left(-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{18}\right)e^x=-\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{18}\right)e^x$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (E) គឺ $y=y_c+y_p=Ae^{\left(1+\sqrt{6}\right)x}+Be^{\left(1-\sqrt{6}\right)x}-\left(\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{18}\right)e^x;A,B$ ជាចំនួនថេរ ។

២. ការវិភាគ និងបកស្រាយ

២.១ បកស្រាយលើរូបមន្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរអូម៉ូសែន

យើងមាន សមីការ $ay''+by'+cy=0;a\neq 0$ (1)

តាង $y=e^{\lambda x}$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (1)

គេបាន $y'=\lambda e^{\lambda x}$

$$y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

តាម $(1) \Rightarrow a\lambda^2 e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$

$$e^{\lambda x}\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)=0$$

គេបាន $\begin{cases} e^{\lambda x}>0 \forall x\in\mathbb{R} \\ a\lambda^2+b\lambda+c=0 \end{cases}$

$$a\left(\lambda^2+\frac{b}{a}\lambda+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\lambda^2+\frac{b}{a}\lambda+\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(\lambda+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\lambda+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

ករណី $\Delta=b^2-4ac>0$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{cases} \lambda_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \lambda_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ដូចនេះ: $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x}; A,B\in\mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a\neq 0$

តាង $y=xe^{\lambda x}$

នោះ: $y'=e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}; y''=\lambda e^{\lambda x}+\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2 xe^{\lambda x}=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2 e^{\lambda x}$

គេបាន :

$$a\left(2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2 e^{\lambda x}\right)+b\left(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}\right)+cxe^{\lambda x}=0$$

$e^{\lambda x}\left(2a\lambda + a\lambda^2 x + b + b\lambda x + cx\right) = 0$

$e^{\lambda x}\left[2a\lambda + b + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)x\right] = 0$

តាមសម្រាយខាងលើ $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$e^{\lambda x}\left(2a\lambda + b\right) = 0$

$\begin{cases} e^{\lambda x} > 0 \\ 2a\lambda + b = 0 \end{cases}$

ករណី $(\Delta = 0)$

$\lambda = -\dfrac{b}{2a}$

ដូចនេះ $y = \left(A + Bx\right)e^{\lambda x}; A, B \in \mathbb{R}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay'' + by' + cy = 0; a \neq 0$

ករណី $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$\Rightarrow \lambda = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm i\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

តាង $\alpha = -\dfrac{b}{2a}; \beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow \lambda = \alpha \pm i\beta$

$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - i\beta \\ \lambda_2 = \alpha + i\beta \end{cases}$

តាម $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$

$y = Ae^{(\alpha - i\beta)x} + Be^{(\alpha + i\beta)x}$

$= Ae^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} + Be^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$

ដោយ $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

នោះ $y = e^{\alpha x}\left[A\left(\cos\left(-\beta x\right) + i\sin\left(-\beta x\right)\right) + B\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)\right]$

$$= e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x - Ai\sin\beta x + B\cos\beta x + Bi\sin\beta x\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[(A+B)\cos\beta x + (-Ai+Bi)\sin\beta x\right]$$

តាង $C = A+B; D = -Ai+Bi$

គេបាន :

$$y = (C\cos\beta x + D\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

ដូចនេះ $y = (C\cos\beta x + D\sin\beta x)e^{\alpha x}$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a\neq 0$

២.២ បកស្រាយលើរូបមន្តសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលីនេអ៊ែរលំដាប់២ មានមេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

គេមានសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$ មានចម្លើយទូទៅ $y = y_c + y_p$ ដែល y_c ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a\neq 0$ ហើយ y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$ ។

បើ y_p ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$ និង y_c ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0; a\neq 0$ នោះ $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$

គេបាន

$$ay_p''+by_p'+cy_p = P(x) \quad (1)$$

$$ay_c''+by_c'+cy_c = 0 \quad (2)$$

យក $(1)+(2)$ គេបាន :

$$ay_p''+by_p'+cy_p+ay_c''+by_c'+cy_c = P(x)$$

$$a(y_p''+y_c'')+b(y_p'+y_c')+c(y_p+y_c) = P(x)$$

$$a(y_p+y_c)''+b(y_p+y_c)'+c(y_p+y_c) = P(x)$$

$$ay''+by'+cy = p(x)$$

ដូចនេះ $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=p(x)$

៣. ទូទៅកម្ម និងការបកស្រាយថ្មី

៣.១ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរអូម៉ូសែនដែលមានតួ b ស្មើសូន្យ

ជាទូទៅ៖ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy=o;a\neq 0 \quad (1)$

បើ $b=0$ នោះ $ay''+cy=0$

មានសមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+c=0$

$\Delta=b^2-4ac=-4ac$

បើ $a>0;c>0$ នោះ $\Delta<0$

នោះ $\lambda_1=0-i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0-i\beta;\lambda_2=0+i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0+i\beta$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right);A,B\in$

បើ $a>0;c<0$ នោះ $\Delta>0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a};\lambda_2=0+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x};A,B\in$

បើ $a<0;c<0$ នោះ $\Delta<0$

នោះ $\lambda_1=0-i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0-i\beta;\lambda_2=0+i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0+i\beta$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right);A,B\in$

បើ $a<0;c>0$ នោះ $\Delta>0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a};\lambda_2=0+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x};A,B\in$

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម

ក. $y''+y=0$ ខ. $y''-4y=0$ គ. $-4y''-y=0$ ឃ. $-9y''+1=0$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល

ក. $y''+y=0$

មានសមីការសម្គាល់ $\lambda^2+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=-4ac=-4<0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{-4}}{2}=0-i;\lambda_2=0+\frac{\sqrt{-4}}{2}=0+i$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=\left(A\cos x+B\sin x\right);A,B\in\mathbb{R}$

ខ. $y''-4y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-4=0$

$\Delta=0-4(1)(-4)=16>0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{16}}{2}=-2;\lambda_2=0+\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{-2x}+Be^{2x};A,B\in\mathbb{R}$

គ. $-4y''-y=0$

សមីការសម្គាល់ $-4\lambda^2-1=0$

$\Delta=0-4(-4)(-1)=-16<0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{-16}}{-8}=0+\frac{1}{2}i;\lambda_2=0+\frac{\sqrt{-16}}{-8}=0-\frac{1}{2}i$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=\left(A\cos\frac{1}{2}x+B\sin\frac{1}{2}x\right);A,B\in\mathbb{R}$

ឃ. $-9y''+1=0$

សមីការសម្គាល់ $-9\lambda^2+1=0$

$\Delta=0-4(-9)(1)=36>0$

នោះ $\lambda_1=0-\frac{\sqrt{36}}{-18}=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3};\lambda_2=0+\frac{\sqrt{36}}{-18}=-\frac{1}{3}$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y=Ae^{\frac{1}{3}x}+Be^{\frac{1}{3}x};A,B\in\mathbb{R}$

៣.២ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរអូម៉ូសែនដែលមានតួ c ស្មើសូន្យ

ជាទូទៅ៖ គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy=o;a\neq 0\quad(1)$

បើ $c=0$ នោះ $ay''+by'=0$

មានសមីការសម្គាល់ $a\lambda^2+b\lambda=0$

$\Delta=b^2-4ac=b^2>0$

$\lambda_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{2a}=0$

គេបាន ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ (1) គឺ $y=Ae^{\lambda_1 x}+Be^{\lambda_2 x};A,B\in\mathbb{R}$

ឧទាហរណ៍៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម

ក. $5y''+4y'=0$

មានសមីការសម្គាល់ $5\lambda^2+4\lambda=0$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-0=16$

នោះ $\lambda_1=-\frac{b}{a}=-\frac{4}{5};\lambda_2=0$

ដូចនេះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការគឺ $y = Ae^{-\frac{4}{5}x} + B; A, B \in \mathbb{R}$

៣.៣ វិធីផ្សេងៗក្នុងការរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

គេមាន សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ មេគុណថេរមិនអូម៉ូសែន

$ay''+by'+cy = P(x)$

- ដំបូងគេត្រូវរកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$ ដែលមានចម្លើយទូទៅ $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$
- តាង $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy = P(x)$
- នោះ $y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$ លក្ខខណ្ឌ $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ និង $y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$
- យក y_p' និង y_p'' ជំនួសក្នុងសមីការ $ay''+by'+cy = P(x)$

គេបាន

$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = P(x)$

$u_1(ay_1''+by_1'+cy_1) + u_2(ay_2''+by_2'+cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = P(x)$

ឧបមាថា y_1 និង y_2 ជាចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $ay''+by'+cy=0$ នោះ

$$\begin{cases} ay_1''+by_1'+cy_1 = 0 \\ ay_2''+by_2'+cy_2 = 0 \end{cases}$$

គេបាន $a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = P(x)$

យកសមីការ $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ និងសមីការ $a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = P(x)$ ចងជាប្រព័ន្ធសមីការដើម្បីដោះស្រាយរកតម្លៃ u_1 និង u_2 គេបាន :

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = P(x) \end{cases}$$

ក្រោយពីរកឃើញតម្លៃ u_1 និង u_2 យកទៅជំនួសក្នុង $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

ដូចនេះ $y=y_c+y_p$ ជាចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $ay''+by'+cy=P(x)$

ឧទាហរណ៍ ៖ ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-2y'-3y=\cos 2x$

ចម្លើយ

ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $y''-2y'-3y=\cos 2x$

រកចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-2y'-3y=0$

សមីការសម្គាល់ $\lambda^2-2\lambda-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4(1)(-3)=4+12=16$

$$\lambda_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2}=\frac{2-4}{2}=-1;\lambda_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2}=\frac{2+4}{2}=3$$

នោះ ចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-2y'-3y=0$ គឺ $y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{3x};c_1,c_2\in\mathbb{R}$

រកចម្លើយពិសេសនៃសមីការ $y''-2y'-3y=\cos 2x$

តាង $y_p=u_1(x)e^{-x}+u_2(x)e^{3x}$

$y_p'=u_1'(x)e^{-x}-e^{-x}u_1(x)+u_2'(x)e^{3x}+3e^{3x}u_2(x)$

លក្ខខណ្ឌ $u_1'(x)e^{-x}+u_2'(x)e^{3x}=0 \quad (1)$

$y_p'=3e^{3x}u_2(x)-e^{-x}u_1(x)$

$y_p''=9e^{3x}u_2(x)+3e^{x}u_2'(x)+u_1(x)e^{-x}-u_1'(x)e^{-x}$

គេបាន

$$9e^{3x}u_2(x)+3e^{x}u_2'(x)+u_1(x)e^{-x}-u_1'(x)e^{-x}-2\left[3e^{3x}u_2(x)-e^{-x}u_1(x)\right]-3\left[u_1(x)e^{-x}+u_2(x)e^{3x}\right]=\cos 2x$$

$$9e^{3x}u_2(x)+3e^{x}u_2'(x)+u_1(x)e^{-x}-u_1'(x)e^{-x}-6e^{3x}u_2(x)+2e^{-x}u_1(x)-3u_1(x)e^{-x}-3u_2(x)e^{3x}=\cos 2x$$

$$3e^{3x}u_2'(x)-u_1'(x)e^{-x}=\cos 2x \quad (2)$$

តាម(1) និង (2)គេបាន

$$\begin{cases} u_1'(x)e^{-x}+u_2'(x)e^{3x}=0 \\ 3e^{3x}u_2'(x)-u_1'(x)e^{-x}= \end{cases}$$

$$4u_2'(x)e^{3x}=\cos 2x$$

$$u_2'(x)=\frac{1}{4}e^{-3x}\cos 2x$$

តាម(1)នោះ $u_1'(x)e^{-x}+\frac{1}{4}e^{-3x}e^{3x}\cos 2x=0$

$$\Rightarrow u_1'(x)=-\frac{1}{4}e^{x}\cos 2x$$

រក $u_1(x)$

$$u_1(x)=-\frac{1}{4}\int e^{x}\cos 2x dx$$

តាង $u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx$

$$v=\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x$$

គេបាន

$$\int e^{x}\cos 2x dx=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x-\frac{1}{2}\int e^{x}\sin 2x dx$$

ចំពោះ $\int e^{x}\sin 2x dx$

តាង $u=e^{x}\Rightarrow du=e^{x}dx$

$$v=\int\sin 2x dx=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

នោះ $\int e^{x}\sin 2x dx=-\frac{1}{2}e^{x}\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^{x}\cos 2x dx$

$$\Rightarrow\int e^{x}\cos 2x dx=\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x+\frac{1}{4}e^{x}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{x}\cos 2x dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{2}{4}e^x \sin 2x + \frac{1}{4}e^x \cos 2x$$

$$5\int e^x \cos 2x dx = 2e^x \sin 2x + e^x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5}e^x \left(2\sin 2x + \cos 2x\right)$$

គេបាន $u_1(x) = -\frac{1}{20}e^x \left(2\sin 2x + \cos 2x\right)$

រក $u_2(x)$

$$u_2(x) = \frac{1}{4}\int e^{-3x} \cos 2x dx$$

តាង $u = e^{-3x} \Rightarrow du = -3e^{-3x}dx$

$$v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x$$

នោះ $\int e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin 2x + \frac{3}{2}\int e^{-3x} \sin 2x dx$

ចំពោះ $\int e^{-3x} \sin 2x dx$

តាង $u = e^{-3x} \Rightarrow du = -3e^{-3x}dx$

$$v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

នោះ $\int e^{-3x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-3x} \cos 2x - \frac{3}{2}\int e^{-3x} \cos 2x dx$

គេបាន $\int e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin 2x - \frac{3}{4}e^{-3x} \cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{-3x} \cos 2x dx$

$$\frac{13}{4}\int e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{2}{4}e^{-3x} \sin 2x - \frac{3}{4}e^{-3x} \cos 2x$$

$$\int e^{-3x} \cos 2x dx = \frac{1}{13}e^{-3x} \left(\sin 2x - \cos 2x\right)$$

គេបាន $u_2(x) = \frac{1}{52}e^{-3x} \left(\sin 2x - \cos 2x\right)$

នោះ $y_p=-\frac{1}{20}e^{x}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)\cdot e^{-x}+\frac{1}{52}e^{-3x}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$

$$y_p=-\frac{1}{20}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)+\frac{1}{52}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$$

គេបាន

$$y=y_c+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{20}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)+\frac{1}{52}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$$

ដូចនេះចម្លើយទូទៅនៃសមីការ $y''-2y'-3y=\cos 2x$ គឺ

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{20}\left(2\sin 2x+\cos 2x\right)+\frac{1}{52}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$$

II. ការអនុវត្ត និងការសន្និដ្ឋាន

១. ការអនុវត្តនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរ

១.១ ការអនុវត្តក្នុងរូបវិទ្យា

ក. រំញ័រនៃរ៉ឺស័រ

នៅពេលយើងថ្លក់វត្ថុមួយនឹងរ៉ឺស័រមួយអាចជារ៉ឺស័រដេងដេក ឬរ៉ឺស័រដេងឈរយើងសង្កេតឃើញថា ទម្ងន់របស់វត្ថុនោះទាញរ៉ឺស័រឲ្យយឺតហើយចលនានឹងកើតឡើងជៀបនឹងទីតាំងនៃវត្ថុនៅលើរ៉ឺស័រដែលយឺតនោះ ។

ច្បាប់ Hooke បានពោលថា ប្រសិនបើរ៉ឺស័រលូតបានប្រវែង x ពីប្រវែងដើមនោះវាមានកម្លាំងមួយដែលសមាមាត្រទៅប្រវែងសាច់លូត x ។

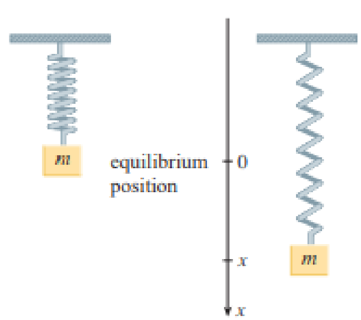
គេបាន $F=-kx$ ដែល k ជាថេរកម្រាញនៃរ៉ឺស័រ $(k>0)$

តាមច្បាប់ទី២ ញ៉ូតុន

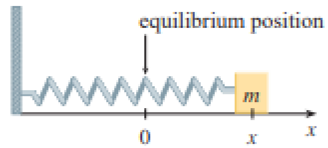
$$F=ma$$

តែ $a=\frac{d^2x}{dt}$

$$\Rightarrow F=m\frac{d^2x}{dt}$$



តែ $F=-kx$



គេបាន $m\dfrac{d^2x}{dt}=-kx$

$m\dfrac{d^2x}{dt}+kx=0$ មានសមីការសម្គាល់ $mr^2+k=0$

មានឫស $r=\pm i\omega$ ដែល $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (ពុសាស្បុង)

នោះចម្លើយទូទៅគឺ $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$

$$x(t)=\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}}\cos\omega t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}}\sin\omega t\right)$$

តាង $\cos\theta=\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}};\sin\theta=\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}}$

$A=\sqrt{c_1^{\,2}+c_2^{\,2}}$

គេបាន $x(t)=A(\cos\theta\cos\omega t+\sin\theta\sin\omega t)$

$x(t)=A\cos(\omega t-\theta)$

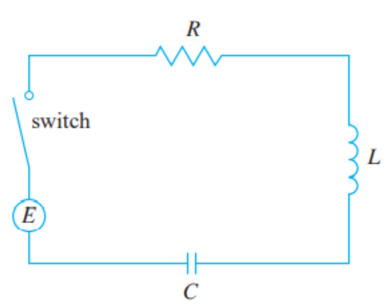
ដូចនេះ $x(t)=A\cos(\omega t-\theta)$

ខ. សៀគ្វី RLC

នៅក្នុងសៀគ្វី RLC វាមានកម្លាំងអគ្គិសនីចលករ E រេស៊ីស្តង់មួយ R អាំងឌុចតង់មួយ L និងកាប៉ាស៊ីតេ C មួយតជាសេរី ។ នៅខណៈ $t=0$ បន្ទុកនៃកាប៉ាស៊ីតេ $Q=Q(t)$ នោះអាំងតង់ស៊ីតេចរន្ត ស្មើនឹងបម្រែបម្រួលបន្ទុក Q ធៀបនឹងរយៈពេល t ដែល $I=\dfrac{dQ}{dt}$ ។ តង់ស្យុងគោលនៃរេស៊ីស្តង់ កាប៉ាស៊ីតេ និងអាំងឌុចតង់គឺ

$V=RI;V=L\dfrac{dI}{dt};V=\dfrac{Q}{C}$ ផលបូកនៃតង់ស្យុងទាំងនេះស្មើនឹងតង់ស្យុងគោលនៃសៀគ្វី ។

គេបាន



$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=E(t)$$

តែ $I=\frac{dQ}{dt}\Rightarrow\frac{dI}{dt}=\left(\frac{dQ}{dt}\right)'=\frac{d^2Q}{dt^2}$

នោះ $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$

ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់២ នៃសៀគ្វី RLC គឺ $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t)$

១.២ ការអនុវត្តក្នុងសេដ្ឋកិច្ច

ក. គោលការណ៍សម្រាប់ផលិតកម្មទំនិញ

ក្នុងលំនាំនេះបានបង្ហាញពីគម្រូផ្សេងៗនៃគោលការណ៍ទៅលើការផលិតទំនិញរបស់ក្នុងក្រុមហ៊ុនមួយ ។

$$\frac{dP}{dt}=-k\left(L(t)-L_0\right)$$

$$\frac{dL}{dt}=Q(t)-S(t)$$

$$S(t)=500-40P-10\frac{dP}{dt}$$

$$Q(t)=250-5P$$

ដែល $P(t)$: តម្លៃនៃទំនិញ

$S(t)$: ការព្យាករណ៍ក្នុងការលក់

$L(t)$: កម្រិតសារពើភ័ណ្ឌ

$Q(t)$: កម្រិតផលិតកម្ម

L_0 : កម្រិតល្អបំផុត

k : តម្លៃថេរវិជ្ជមាន

គេបាន

$$\frac{d^2P}{dt^2} = -k\frac{dL}{dt} = -k\big(Q(t) - S(t)\big)$$

$$= -k\left(250 - 5P - \left(500 - 40P - 10\frac{dP}{dt}\right)\right)$$

$$= -k\left(-250 + 35P + 10\frac{dP}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 250k - 35kP - 10k\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 10k\frac{dP}{dt} + 35kP = 250k$$

ដូចនេះ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលលំដាប់ពីរនៃគោលការណ៍ផលិតកម្មទំនិញគឺ

$$\frac{d^2P}{dt^2} + 10k\frac{dP}{dt} + 35kP = 250k$$

លំហាត់អនុវត្ត

១. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. $y''-9y=0$	ដ. $2y''+3y'-2y=0$
ខ. $y''-3y'+3y=0$	ឋ. $y''-2\sqrt{11}y'+11y=0$
គ. $2y''+3y'-2y=0$	ឌ. $9y''+6y'+y=0$
ឃ. $y''-3y'+y=0$	ឍ. $4y''+12y'+9y=0$
ង. $y''+2y'+y=0$	ណ. $y''+y=0$
ច. $y''+4y'-5y=0$	ត. $y''-2y'+y=0$
ឆ. $y''+6y'+13y=0$	ថ. $4y''-4y'+y=0$
ជ. $y''+y'-2y=0$	ទ. $y''+4y'+4y=0$
ឈ. $y''-4y'=0$	ធ. $9y''+6y'+y=0$
ញ. $y''+9y=0$	ន. $9y''-12y'+11y=0$

២. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលខាងក្រោម :

ក. $y''-9y'-10y=8+72x-40x^2$ ដ. $y''-2y'-3y=2\sin x$

ខ. $y''-6y'-7y=x^2-1$ ឋ. $y''+y'-2y=3\cos 2x$

គ. $y''+3y'+2y=x^2$ ឌ. $y''+4y=5\sin 3x-5\cos 3x$

ឃ. $y''-2y'=x+2e^x$ ឍ. $y''+y'+y=\sin x+\cos x$

ង. $y''+2y'+y=xe^{-x}$ ណ. $2y''+3y'+y=1+\cos 2x$

ច. $y''+4y'-5y=x+2$ ត. $y''+y'-y=xe^{3x}-3$

ឆ. $y''-3y'-4y=x^2-2x+1$ ថ. $y''-5y'+6y=(2x-3)\cos x$

ជ. $y''+6y'+9y=(x+2)e^{2x}$ ទ. $4y''+4y'+y=x+1+e^{2x}$

ឈ. $y''-4y'+4y=(x^2+2x-3)e^x$ ធ. $y''+7y'+12y=x^2-x$

ញ. $y''+2y'-3y=2+\sin x$ ន. $y''-y'-6y=\sin x-\cos 2x$

៣. ដោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលមានលក្ខខណ្ឌដើម :

ក. $y''+2y'-3y=0$ បើ $y(0)=0$ និង $y'(0)=1$

ខ. $y''-5y'+6y=0$ បើ $y(0)=0$ និង $y'(0)=1$

គ. $y''+4y=0$ បើ $y(0)=1$ និង $y'(0)=2$

ឃ. $y''+3y=0$ បើ $y(0)=1$ និង $y'(0)=3$

ង. $y''-2y'+5y=0$ បើ $y(0)=1$ និង $y'(0)=-1$

ច. $y''+2y'+5y=0$ បើ $y(0)=0$ និង $y'(0)=1$

៤. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''-5y'+6y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាបន្ទាត់ $(D): y=-x+2$ ប៉ះក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ $x=0$

៥. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថា ក្រាបនៃចម្លើយកាត់តាមចំណុច $A(0,3)$ ហើយបន្ទាត់ប៉ះនឹង ក្រាបនៃចម្លើយត្រង់ចំណុចដែលមានអាប់ស៊ីស $\ln 2$ ស្របនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។

៦. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''+4y'-5y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(0)=6, y'(0)=0$ ។

៧. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''-y'-6y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $y(1)=2, y'(1)=4$ ។

៨. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចម្លើយ f មួយនៃសមីការ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0)=4$ និង $f'(0)=0$ ។

គ. ដោះស្រាយក្នុង $\mathbb{R}$ វិសមីការ $f(x)>0$ ។

៩. ក. ដោះស្រាយសមីការ $y''-y'+\frac{1}{4}y=0 \quad (F)$

ខ. កំណត់អនុគមន៍ f ជាចម្លើយនៃសមីការ (F) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌខាងក្រោម :

-ក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយកាត់តាមចំណុច $A(0,4)$ ។

-បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបនេះត្រង់ចំណុចមានអាប់ស៊ីស 2 មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើសូន្យ ។

១០. ក. ដោះស្រាយសមីការ $y''+9y=0 \quad (E)$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថាក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយប៉ះនឹងបន្ទាត់ $(T): y+1=x+\pi$ ត្រង់ចំណុច $M(\pi,-1)$ ។

១១. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(E): 9y''+y=0$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ចម្លើយ f ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(0)=3$ និង $f'(0)=3$ ។

គ. កំណត់អនុគមន៍ g ដែលជាចម្លើយនៃ (E) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = 0$ និង $\int_0^{\pi} g(x)dx = 3$

១២. ក. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y''+4y=0$ ។

ខ. រកចម្លើយ g នៃសមីការ (F) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ និង $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ ។

គ. ដោះស្រាយសមីការ $g(x)=1$; g ជាអនុគមន៍ចម្លើយក្នុងសំណួរ ខ ។

១៣. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=-x^2+x+2$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត m, n និង p ដើម្បីឲ្យ $y_p = mx^2+nx+p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ ទាញរកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) បើគេដឹងថា បន្ទាត់ប៉ះនឹងក្រាបនៃអនុគមន៍ចម្លើយត្រង់ចំណុច $(0,2)$ មានមេគុណប្រាប់ទិសស្មើ 1 ។

១៤. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-3y'+2y=8x^2-24$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $y''-3y'+2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a,b និង c ដើម្បីឲ្យ $y_p = ax^2+bx+c$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $y = y_c + y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

១៥. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(1): y''-y'-6y=-6x-1$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $(2): y''-y'-6y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត a និង b ដើម្បីឲ្យ $f_2 = ax+b$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) ។

គ. បង្ហាញថា បើ f_1 ជាចម្លើយនៃសមីការ (1) នោះ $f = f_1 - f_2$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (2) ។

ឃ. ទាញរកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (1) ។

ង. រកចម្លើយ f មួយនៃសមីការ (1) បើ $f(1)=1$ និង $f'(1)=4$ ។

១៦. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y'+8y=3\sin x-2\cos x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $(F): y''+4y'+8y=0$ ។

ខ. កំណត់អនុគមន៍ g ដែល $g(x)=a\cos x+b\sin x$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។ ទាញរកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

១៧. គេមានសមីការ $(E): y''-y'-2y=\cos x-2\sin x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y''-y'-2y=0$ ។

ខ. កំណត់ចំនួនពិត m និង n ដើម្បីឲ្យ $f(x)=m\cos x+n\sin x$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។ ទាញរកសំណុំចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

១៨. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''+4y=3\sin x$ ។

ក. ដោះស្រាយសមីការ $y''+4y=0$ ។

ខ. តាង $f(x)=g(x)+k\sin x$ ដែល k ជាចំនួនពិត ហើយ g ជាអនុគមន៍នៃអញ្ញាត x ។ រកតម្លៃនៃចំនួនពិត k ដើម្បីឲ្យអនុគមន៍ g ផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង: $g''(x)+4g(x)=0$ បើ f ជាចម្លើយនៃ (E) ។

គ. កំណត់ចម្លើយនៃ (E) បើ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ និង $f'(\pi)=0$ ។

១៩. គេឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): y''-6y'+5y=xe^{2x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_h នៃសមីការ $y''-6y'+5y=0$ ។

ខ. កំណត់ A និង B ដើម្បីឲ្យ $y_p=(Ax+B)e^{2x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

គ. បង្ហាញថា $y=y_h+y_p$ ជាចម្លើយនៃសមីការ (E) ។

២០. គេមានសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល $(E): 3y''-2y'-y=4xe^{-x}$ ។

ក. រកចម្លើយទូទៅ y_c នៃសមីការ $3y''-3y'-y=0$ ។

ខ. កំណត់តម្លៃ m និង n ដើម្បីឲ្យ $y_p=(mx+n)e^{-x}$ ជាចម្លើយមួយនៃសមីការ (E) ។

គ. រកចម្លើយទូទៅ y នៃសមីការ (E) ។

២១. សៀគ្វីអគ្គិសនីមួយតជាសេរីដែលមានរេស៊ីស្តង់ $R=20\Omega$ អាំងឌុចតង់ $L=1H$ និងកាប៉ាស៊ីតេ $C=5\times10^{-3}F$ ហើយតង់ស្យុងប្រភព $V=12v$ ។ ប្រសិនបើបរិមាណបន្ទុកអគ្គិសនី $Q(0)=0$ និងអាំងតង់ស៊ីចរន្ត $I(0)=0$ ។ គណនា $Q(t)$ និង $I(t)$ ។

២២.សៀគ្វីអគ្គិសនីមួយតជាសេរីដែលមានរេស៊ីស្តង់ $R=20\Omega$ អាំងឌុចតង់ $L=1H$ និងកាប៉ាស៊ីតេ $C=5\times10^{-3}F$ និងកម្លាំងអគ្គិសនីចលករ $E(t)=12\sin10t$ ។ រកបរិមាណបន្ទុកអគ្គិសនី Q នៅខណៈ t ។

២៣. រ៉ឺស័រមួយបានព្យួរម៉ាស $2kg$ ដោយតម្លៃថេរកម្រាញ់នៃរ៉ឺស័រ $k=14$ ហើយកម្លាំង $6N$ ទាញរ៉ឺស័រដែលមានប្រវែងដើម $0.5m$ ឲ្យលូត ។ រ៉ឺស័រលូតបានប្រវែង $1m$ ពីប្រវែងដើម ហើយលែងនៅល្បឿន $V=0m/s$ ។ រកទីតាំងលំនឹងនៃម៉ាសនៅខណៈ t ។

២៤. កម្លាំង $13N$ ត្រូវបានទាញរ៉ឺស័រដែលព្យួរម៉ាស $2kg$ ឲ្យរ៉ឺស័រលូតបានប្រវែង $0.25m$ ពីប្រវែងដើម ។ ថេរកម្រាញ់ $k=8$ ។

ក. ប្រសិនបើម៉ាសចាប់មានលំនឹងនៅល្បឿន $0.5m/s$ ។ រកទីតាំងលំនឹងនៅខណៈ t ។

ខ. ចូរគូសក្រាបទីតាំងជាអនុគមន៍នៃម៉ាស ។

គន្ថនិទ្ទេស

- James Steward, Calculus early transcendental 7e, 2012
- សៀវភៅសិក្សាគោលមុខវិជ្ជាគណិតវិទ្យាថ្នាក់ទី១០ដល់ទី១២របស់ក្រសួងអប់រំ យុវជន និងកីឡា
- William Briggs, Calculus for Scientists and Engineers,University of Colorado, Denver.
- Edwin J. Prucell, Calculus with Analytic Geometry Fifth Edition, University of Arizona